

אי-שוויון הממוצעים

הממוצע החשבוני של שני מספרים חיוביים גדול מהממוצע ההנדסי שלהם או שווה לו – באלגברה, בחצי מעגל ובנגזרת, וגם קיצור דרך לבעיות קיצון

כ־20 דקות קריאה

3 הוכחות

אלגברה ובעיות קיצון

ברמת 4-5 יח"ל

להעמקה

מה כדאי לדעת קודם

- שורש ריבועי: $(\sqrt{a})^2 = a$ לכל $a \geq 0$.
- ריבוע של הפרש, מהמסמך "נוסחאות הכפל המקוצר".
- להוכחה 2: דמיון משולשים, זוויות היקפית שנשענת על קוטר.
- להוכחה 3: נגזרת ונקודות קיצון (ראו את המסמך "הנגזרת וכללי הגזירה" בסדרה).

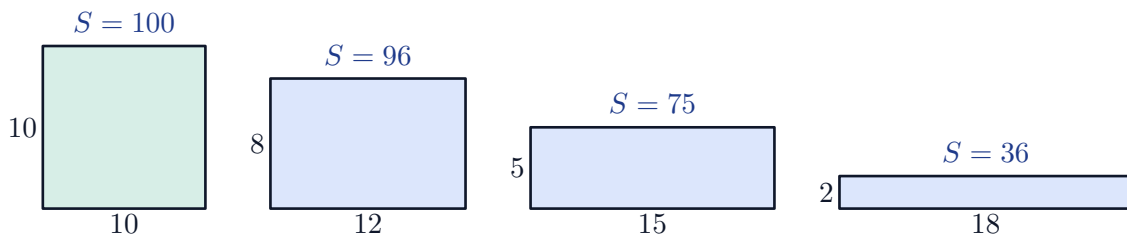
מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: לאיזו ערוגה מלבנית שהיקפה 40 מטר יש השטח הגדול ביותר?
- שלוש הוכחות: אלגברית (עם סרטוט של מלבנים), גאומטרית בחצי מעגל, ובעזרת נגזרת.
- בנוס: ארבעה ממוצעים בסרטוט אחד.
- להעמקה: אי-השוויון לשלושה מספרים ויותר.
- בעיות קיצון בלי נגזרת, מלכודות, היסטוריה וחמש שאלות לבדיקה עצמית.

1 האינטואיציה: 40 מטר של גדר

האינטואיציה

לחקלאי יש 40 מטר של גדר, והוא רוצה לגדר בעזרתה ערוגה מלבנית. איזה מלבן כדאי לו לבחור כדי שהערוגה תהיה גדולה ככל האפשר?
לכל המלבנים האפשריים יש אותו היקף, 40 מטר, ולכן בכל אחד מהם האורך והרוחב מסתכמים ב־20 מטר – חצי מההיקף. אבל השטחים שונים מאוד: מלבן ארוך וצר, למשל 19 על 1, מכיל רק 19 מ"ר, ואילו בריבוע 10 על 10 יש 100 מ"ר. ככל שהאורך והרוחב **קרובים** יותר זה לזה, השטח גדל, והשטח הגדול ביותר מתקבל כשהם **שווים** – בריבוע.



סרטוט 1: ארבעה מלבנים שההיקף של כל אחד מהם 40 מטר, בקנה מידה. ככל שהמלבן קרוב יותר לריבוע, השטח שלו גדול יותר.

דוגמה מספרית: מלבנים שהיקפם 40 מטר

נבדוק כמה מלבנים כאלה, שאורכי הצלעות שלהם הם מספרים שלמים של מטר:

10	11	12	15	18	19	האורך (מטרים)
10	9	8	5	2	1	הרוחב (מטרים)
100	99	96	75	36	19	השטח (מ"ר)
0	1	4	25	64	81	כמה חסר עד 100

שימו לב לשורה האחרונה: מה שחסר עד 100 הוא תמיד ריבוע של מספר שלם, כמו $25 = 5^2$ או $81 = 9^2$. המספר שמעלים בריבוע הוא המרחק של כל צלע מ-10: למשל, הצלעות 15 ו-5 רחוקות מ-10 ב-5. בהוכחה 1 נראה שזה תמיד כך.

2 המשפט

יש כמה סוגים של ממוצע. לשני מספרים אי־שליליים a ו- b נגדיר שניים:

- **הממוצע החשבוני** הוא $\frac{a+b}{2}$ — הממוצע ה"רגיל": מחברים את המספרים ומחלקים ב-2.
- **הממוצע ההנדסי** הוא $\sqrt{ab}$ — כופלים את המספרים ומוציאים שורש.

לדוגמה, הממוצע החשבוני של 2 ו-8 הוא 5, והממוצע ההנדסי שלהם הוא $\sqrt{16} = 4$.

אי־שוויון הממוצעים

לכל שני מספרים אי־שליליים a ו- b :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

ושוויון מתקבל אם ורק אם $a = b$.

במילים: הממוצע החשבוני של שני מספרים אי־שליליים גדול מהממוצע ההנדסי שלהם או שווה לו, והשניים שווים רק כשהמספרים עצמם שווים.

למה "חשבוני" ו"הנדסי"? כמו בסדרות. בסדרה חשבונית כל איבר הוא הממוצע החשבוני של שני שכניו: למשל, בסדרה 2, 5, 8 מתקיים $5 = \frac{2+8}{2}$. בסדרה הנדסית שאיבריה חיוביים כל איבר הוא הממוצע ההנדסי של שכניו: בסדרה 2, 4, 8 מתקיים $4 = \sqrt{2 \cdot 8}$. (יש מקורות שבהם הממוצע ההנדסי נקרא "ממוצע גאומטרי").

ומה הקשר לגדר? נחשוב על a ו- b כעל האורך והרוחב של מלבן. הצלע של ריבוע בעל אותו היקף היא $\frac{a+b}{2}$, כי $4 \cdot \frac{a+b}{2} = 2a + 2b$. נעלה את שני האגפים של אי־שוויון הממוצעים בריבוע (מותר, כי שניהם אי־שליליים), ונקבל $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$: שטח הריבוע גדול משטח המלבן או שווה לו. כלומר, **מבין כל המלבנים בעלי היקף נתון, לריבוע יש השטח הגדול ביותר** — בדיוק מה שגילה החקלאי.

3 הוכחה 1: ריבוע אינו שלילי

הרעיון ריבוע של מספר ממשי אף פעם אינו שלילי. נבחר מספר מתאים, נעלה אותו בריבוע ונפתח סוגריים.

כיוון ש- $a, b \geq 0$, השורשים $\sqrt{a}$ ו- $\sqrt{b}$ מוגדרים, ומתקיים $(\sqrt{a})^2 = a$ וגם $(\sqrt{b})^2 = b$.

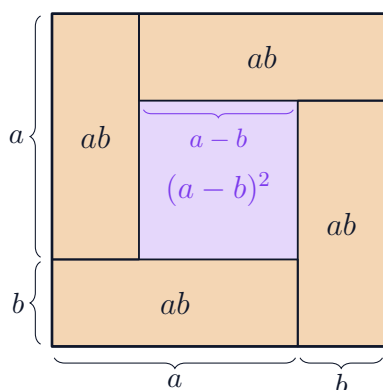
נימוק	טענה
ריבוע של מספר ממשי אינו שלילי	① $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$
ריבוע של הפרש	② $(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0$
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ו- $(\sqrt{a})^2 = a$	③ $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$
הוספת $2\sqrt{ab}$ לשני האגפים	④ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
חילוק ב-2	⑤ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

מש"ל

מתי יש שוויון? במעברים בין הצעדים לא "איבדנו" שום מידע: פתחנו סוגריים, הוספנו לשני האגפים אותו מספר וחילקנו במספר חיובי. לכן בצעד 5 יש שוויון בדיוק כשיש שוויון בצעד 1, כלומר כש- $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$. זה קורה אם ורק אם $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, כלומר אם ורק אם $a = b$. ומצעד 3 אפשר לקרוא גם את הגודל המדויק של הפער בין הממוצעים: $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$.

איך ממציאם הוכחה כזאת? בדרך כלל עובדים מהסוף להתחלה: מתחילים מאי-השוויון שרוצים להוכיח, כופלים ב-2 ומעבירים אגף. מקבלים $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, ומזהים בביטוי $a - 2\sqrt{ab} + b$ ריבוע של הפרש. בהוכחה עצמה כותבים את אותם צעדים בסדר הפוך, כך שכל צעד נובע מהצעד שלפניו.

אותו רעיון בסרטוט: ארבעה מלבנים בתוך ריבוע



סרטוט 2: ארבעה מלבנים a על b בתוך ריבוע שצלעו $a+b$.

הפעם נחשוב על a ו- b כעל אורכים, ונניח ש- $a > b$. בתוך ריבוע שצלעו $a+b$ נסדר ארבעה מלבנים זהים, a על b , כמו בסרטוט: כל מלבן צמוד לצלע אחרת של הריבוע, ואין לשני מלבנים שטח משותף. באמצע נשאר ריבוע קטן שצלעו $a-b$. נחשב את שטח הריבוע הגדול בשתי דרכים:

$$(a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2.$$

השטח של הריבוע הקטן אינו שלילי, ולכן $(a+b)^2 \geq 4ab$. נחלק ב-4 ונוציא שורש משני האגפים, ונקבל $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

שוויון מתקבל רק כשהריבוע הקטן נעלם, כלומר כש- $a = b$: אז ארבעת המלבנים ממלאים את כל הריבוע הגדול. (כש- $a < b$ מחליפים בין התפקידים של a ו- b). גם כאן הרעיון הוא ש"ריבוע אינו שלילי", רק שהפעם זה ריבוע אמיתי, עם שטח.

וזה גם מסביר את הטבלה מסעיף 1. נחלק את השוויון ב-4 ונעביר אגף:

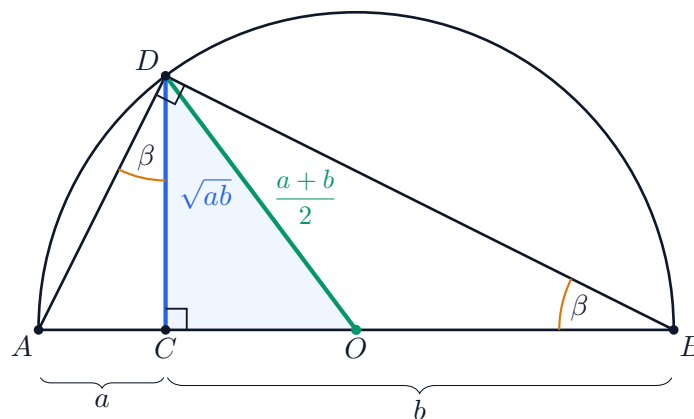
$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

זאת בעצם נוסחת הפרש הריבועים: אם נסמן $m = \frac{a+b}{2}$ ו- $d = \frac{a-b}{2}$ אז $a = m + d$ ו- $b = m - d$, ולכן מכפלת הצלעות היא $ab = (m+d)(m-d) = m^2 - d^2$. כשההיקף הוא 40 מטר, $m = 10$, ו- d הוא בדיוק המרחק של כל צלע מ-10. לכן השטח הוא 100 פחות הריבוע של המרחק הזה. למשל, $15 \cdot 5 = 100 - 5^2 = 75$.

4 הוכחה 2: חצי מעגל

הרעיון נבנה את שני הממוצעים כקטעים באותו סרטוט: הממוצע החשבוני יהיה רדיוס של חצי מעגל, והממוצע ההנדסי יהיה אנך מהקוטר אל הקשת. אחר כך נשאר רק להשוות בין שני האורכים.

הבנייה. נניח $a, b > 0$. על ישר נסמן קטע AC שאורכו a , ומייד אחריו קטע CB שאורכו b . נסרטט חצי מעגל שהקוטר שלו הוא AB , ונסמן את המרכז שלו ב- O . ב- C נעלה אנך לקוטר, והוא יפגוש את חצי המעגל בנקודה D . נעביר את המיתרים AD ו- DB , ואת הרדיוס OD .



סרטוט 3: חצי מעגל על הקוטר $AB = a + b$. הרדיוס OD (בירוק) הוא הממוצע החשבוני, והאנך CD (בכחול) הוא הממוצע ההנדסי.

נימוק	טענה
OD הוא רדיוס, כלומר חצי מהקוטר $AB = a + b$	$OD = \frac{a+b}{2}$ ①
זווית היקפית שנשענת על קוטר (ראו את המסמך "זווית היקפית וזווית מרכזית")	$\angle ADB = 90^\circ$ ②
שתיהן משלימות את $\angle CDB$ ל- 90° (צעד 2, וסכום הזוויות ב- $\triangle DCB$)	$\angle ADC = \angle CBD = \beta$ ③
$\angle ACD = \angle DCB = 90^\circ$, וצעד 3	$\triangle ACD \sim \triangle DCB$ ④
מהדמיון: $\frac{AC}{DC} = \frac{CD}{CB}$, ואחר כך כפל "בהצלבה"	$CD^2 = AC \cdot CB = ab$, כלומר $CD = \sqrt{ab}$ ⑤

ב- $\triangle OCD$ הזווית שב- C ישרה, והיתר OD
אורך מהניצב CD

$$OD \geq CD \quad (6)$$

הצבה של צעדים 1 ו-5 בצעד 6

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (7)$$

מש"ל

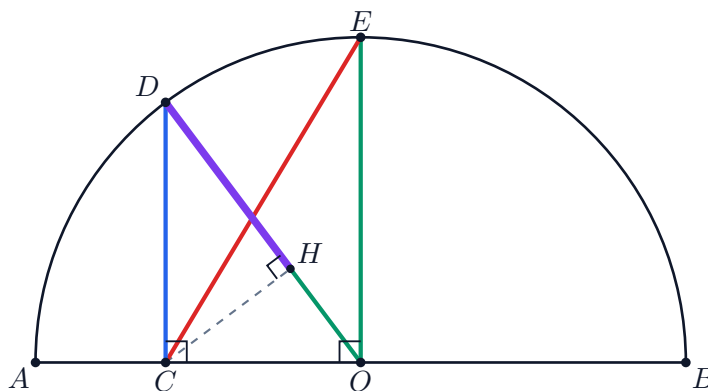
מקרה השוויון. הנקודה C היא המרכז O בדיוק כש- $a = b$. אז האנך CD הוא בעצמו רדיוס, ו- $CD = OD$.
אם $a \neq b$, אז $C \neq O$, והיתר OD ארוך **ממש** מהניצב CD . ואם אחד המספרים הוא 0, אין צורך בסרטוט: אז $\sqrt{ab} = 0$, ואי-השוויון ברור.

עצרו ובדקו

בצעדים 2-5 הגענו ל- $CD^2 = ab$ בעזרת דמיון משולשים. אפשר להגיע לאותה תוצאה גם בעזרת משפט פיתגורס ב- $\triangle OCD$ (ראו את המסמך "משפט פיתגורס"). מה אורך הקטע OC ? השלימו את החישוב. (התשובה בשאלה 5 שבסוף המסמך.)

בנוסף: ארבעה ממוצעים בסרטוט אחד

באותו סרטוט מסתתרים עוד שני ממוצעים מפורסמים. נסמן ב- E את הנקודה הגבוהה ביותר על חצי המעגל, כך ש- $OE \perp AB$. מ- C נוריד אנך לרדיוס OD , ואת עקב האנך נסמן ב- H .



$$CE = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad \text{ממוצע ריבועי: (red)}$$

$$OD = OE = \frac{a+b}{2} \quad \text{ממוצע חשבוני: (green)}$$

$$CD = \sqrt{ab} \quad \text{ממוצע הנדסי: (blue)}$$

$$DH = \frac{2ab}{a+b} \quad \text{ממוצע הרמוני: (purple)}$$

סרטוט 4: ארבעה ממוצעים של a ו- b בחצי מעגל אחד. בסרטוט $a = 2$ ו- $b = 8$.

• **הממוצע הריבועי** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ הוא הקטע CE . במשולש COE הזווית שב- O ישרה, $OE = \frac{a+b}{2}$ (רדיוס),

$$\text{ו-} OC = \frac{|a-b|}{2} \text{ (המרחק של } C \text{ מהמרכז). לפי משפט פיתגורס, } CE^2 = \frac{(a-b)^2 + (a+b)^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

• **הממוצע הרמוני** $\frac{2ab}{a+b}$ הוא הקטע DH . המשולשים DHC ו- DCO דומים (ז.ז: בשניהם יש זווית ישרה,

$$\text{והזווית שב-} D \text{ משותפת), ולכן } \frac{DH}{DC} = \frac{DC}{DO}, \text{ כלומר } DH = \frac{DC^2}{DO} = \frac{ab}{(a+b)/2} = \frac{2ab}{a+b}.$$

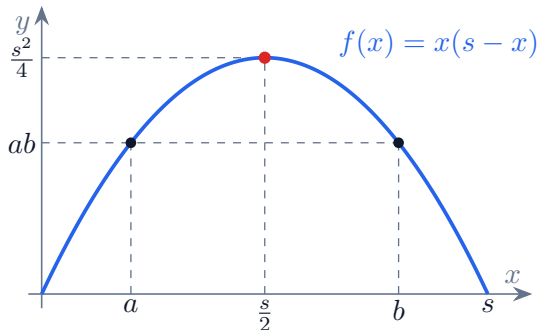
במשולש DHC היתר הוא DC , במשולש DCO היתר הוא DO , ובמשולש COE היתר הוא CE . כיוון שבכל משולש ישר-זווית הניצב קצר מהיתר, $DH \leq DC \leq DO = OE \leq CE$, כלומר:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

בסרטוט $a = 2$ ו- $b = 8$, ולכן השרשרת היא $3.2 \leq 4 \leq 5 \leq \sqrt{34} \approx 5.83$. וגם כאן כל ארבעת הממוצעים שווים רק כש- $a = b$. את הממוצע ההרמוני פוגשים, למשל, כשמחשבים מהירות ממוצעת בנסיעה הלך ושוב (שאלה 3 שבסוף המסמך).

5 הוכחה 3: נגזרת

הרעיון נחזור לשאלה של החקלאי, הפעם באופן כללי: נקבע את הסכום של שני המספרים, ונמצא בעזרת נגזרת מתי המכפלה שלהם היא הגדולה ביותר.



סרטוט 5: הגרף של $f(x) = x(s-x)$. המספרים a ו- b רחוקים מ- $\frac{s}{2}$ באותו מרחק, והמכפלה ab נמוכה מהקודקוד.

נסמן $s = a + b$, ונניח ש- $s > 0$ (אם $s = 0$ או $a = b = 0$, ואין מה להוכיח). בזוג של מספרים אי-שליליים שסכומם s , אם אחד המספרים הוא x , השני הוא $s - x$, ומכפלתם היא

$$f(x) = x(s-x) = sx - x^2, \quad 0 \leq x \leq s.$$

הזוג שלנו הוא אחד מהזוגות האלה: $ab = f(a)$ כי $b = s - a$. לכן מספיק להראות שהערך הגדול ביותר של f הוא $\left(\frac{s}{2}\right)^2$.

טענה	נימוק
① $f'(x) = s - 2x$	גזירה של $sx - x^2$
② $f'(x) > 0$ כאשר $x < \frac{s}{2}$, ו- $f'(x) < 0$ כאשר $x > \frac{s}{2}$	הסימן של $s - 2x$
③ $f(x) \leq f\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{s^2}{4}$	f עולה עד $\frac{s}{2}$ ויורדת אחריו, ולכן זה הערך הגדול ביותר בתחום
④ $ab = f(a) \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$	הצבה של $x = a$ ו- $s = a + b$ בצעד 3
⑤ $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$	הוצאת שורש משני האגפים, שהם אי-שליליים

מש"ל

מתי יש שוויון? משמאל ל- $\frac{s}{2}$ הפונקציה עולה ממש, ומימין לו היא יורדת ממש. לכן היא מגיעה לערך $\frac{s^2}{4}$ רק ב- $x = \frac{s}{2}$. מכאן שבצעד 4 יש שוויון רק כש- $a = \frac{s}{2} = \frac{a+b}{2}$, כלומר כש- $a = b$.

ובלי נגזרת? הגרף של f הוא פרבולה עם נקודת מקסימום (המקדם של x^2 שלילי), והיא חותכת את ציר ה- x ב- 0 וב- s . הקודקוד של פרבולה נמצא באמצע בין נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x , כלומר ב- $x = \frac{s}{2}$. כך מגיעים לאותה מסקנה גם בלי נגזרות.

6 שלוש הדרכים זו מול זו

הוכחה 1: ריבוע אינו שלילי	הוכחה 2: חצי מעגל	הוכחה 3: נגזרת	
הרעיון	ריבוע של הפרש אינו שלילי	הממוצעים הם יתר וניצב במשולש ישר־זווית	בסכום קבוע, המכפלה הגדולה ביותר מתקבלת כשהמספרים שווים
הכלים	ריבוע של הפרש, שורשים	זווית היקפית ודמיון משולשים	נגזרת, עלייה וירידה
השוויון	$\sqrt{a} = \sqrt{b}$	C היא המרכז O	$a = \frac{s}{2}$
היתרון	קצרה, ונותנת גם את הפער המדויק בין הממוצעים	”רואים” את הממוצעים, ועוד שניים כבונוס	עונה ישירות לשאלה של החקלאי

7 להעמקה: שלושה מספרים ויותר

אי־שוויון הממוצעים נכון גם לשלושה מספרים, ונשתמש בו בדוגמה 3 שבסעיף הבא.

אי־שוויון הממוצעים לשלושה מספרים

לכל שלושה מספרים אי־שליליים a, b, c :

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

ושוויון מתקבל אם ורק אם $a = b = c$.

הרעיון כמו בהוכחה 1: נכתוב את ההפרש בין שני האגפים כמכפלה של ביטויים שאינם שליליים. הכלי הוא זהות אלגברית מפורסמת:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &= \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]. \end{aligned}$$

את השוויון הראשון מוכיחים בפתיחת סוגריים: יש 18 מכפלות, ו־12 מהן מבטלות זו את זו בזוגות, למשל $x \cdot y^2$ מול $y \cdot (-xy)$. נשאר רק $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ (בדקו זאת בעצמכם). את השוויון השני מוכיחים בפתיחת הסוגריים המרובעים: מתקבל פעמיים הביטוי שבסוגריים של השורה הראשונה.

נימוק	טענה
נסמן. שלושת המספרים אי־שליליים	$x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{b}, z = \sqrt[3]{c}$ ①
$xyz = \sqrt[3]{abc}$ ו־ $x^3 = a, y^3 = b, z^3 = c$	$a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ②
לפי הזהות: $x + y + z \geq 0$, וסכום של ריבועים אינו שלילי	$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$ ③

צעדים 2 ו-3, העברת אגף וחילוק ב-3

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad (4)$$

מש"ל

מתי יש שוויון? כשהמכפלה שבזהות שווה ל-0. זה קורה אם $x+y+z=0$, ואז $x=y=z=0$ (כי שלושתם אי-שליליים), או אם סכום הריבועים הוא 0, ואז $x=y=z=0$. בשני המקרים $a=b=c$.

יותר משלושה מספרים? לכל n מספרים אי-שליליים מתקיים $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, ושוויון מתקבל רק כשכל המספרים שווים. את רעיון ההוכחה הכללית תמצאו בתיבה "הידעתם?", ועל שיטת האינדוקציה – במסמך "הוכחה באינדוקציה".

8 מה עושים עם אי-השוויון? בעיות קיצון בלי נגזרת

בתוכנית הלימודים פותרים בעיות קיצון בעזרת נגזרת. אי-שוויון הממוצעים אינו חלק מהתוכנית, אבל הוא פותר חלק מהבעיות האלה בדרך קצרה, ועוזר לבדוק תשובה שמצאתם בנגזרת. הרעיון:

- **מכפלה קבועה נותנת מינימום לסכום.** אם $u, v > 0$ והמכפלה uv קבועה, אז הסכום $u+v$ אינו יורד אל מתחת ל- $2\sqrt{uv}$.
- **סכום קבוע נותן מקסימום למכפלה.** אם $u, v \geq 0$ והסכום $u+v$ קבוע, אז המכפלה uv אינה עולה אל מעל $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2$.

בשני המקרים הקיצון מתקבל רק אם יש בתחום ערך שבו $u=v$ – ואת זה **חובה** לבדוק.

דוגמה 1: מספר חיובי ועוד ההופכי שלו

הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים $x + \frac{1}{x} \geq 2$. מתי יש שוויון?
המספרים x ו- $\frac{1}{x}$ חיוביים, והמכפלה שלהם היא 1 – מספר קבוע. לפי אי-שוויון הממוצעים:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2\sqrt{1} = 2.$$

שוויון מתקבל רק כש- $x = \frac{1}{x}$, כלומר $x^2 = 1$, ועבור $x > 0$ זה קורה רק ב- $x = 1$. למשל, $2 + \frac{1}{2} = 2.5$, אבל $10 + \frac{1}{10} = 10.1$.

דוגמה 2: אותה בעיה בשתי דרכים

מצאו את הערך הקטן ביותר של $f(x) = x + \frac{9}{x}$ עבור $x > 0$.

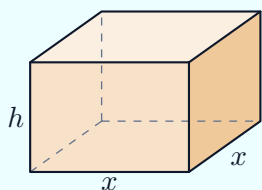
בעזרת אי-שוויון הממוצעים

- המכפלה $x \cdot \frac{9}{x} = 9$ קבועה, ולכן $x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{9} = 6$.
- שוויון מתקבל כש- $x = \frac{9}{x}$, כלומר ב- $x = 3$. לכן הערך הקטן ביותר הוא 6.

בעזרת נגזרת

- $f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$, והיא מתאפסת כש- $x^2 = 9$ (כלומר $x > 0$) ב- $x = 3$.
 - $f' < 0$ משמאל ל-3 ו- $f' > 0$ מימין לו, ולכן ב- $x = 3$ יש מינימום: $f(3) = 6$.
- שתי הדרכים נותנות אותה תשובה. בדרך של הממוצעים אין צורך בגזירה ובטבלת סימנים: אי-השוויון $f(x) \geq 6$ נכון מייד לכל $x > 0$, והשוויון ב- $x = 3$ מראה ש-6 הוא באמת הערך הקטן ביותר.

דוגמה 3 (להעמקה): הקופסה החסכונית ביותר



סרטוט 6: תיבה שבסיסה

ריבוע.

רוצים לבנות מקרטון קופסה סגורה בצורת תיבה, שבסיסה ריבוע ונפחה 1000 סמ"ק (ליטר). אילו מידות דורשות הכי מעט קרטון, כלומר נותנות את שטח הפנים הקטן ביותר?

נסמן ב- x את צלע הבסיס וב- h את הגובה. אז $x^2 h = 1000$, כלומר $h = \frac{1000}{x^2}$. לקופסה יש שני בסיסים ריבועיים וארבע דפנות מלבניות, ולכן

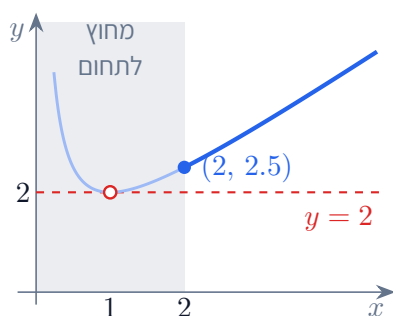
$$S = 2x^2 + 4xh = 2x^2 + \frac{4000}{x}.$$

המכפלה $2x^2 \cdot \frac{4000}{x} = 8000x$ אינה קבועה, ולכן אי-השוויון לשני מספרים לא יעזור כאן. הטריק: נפצל את האיבר השני לשני חצאים שווים, $\frac{4000}{x} = \frac{2000}{x} + \frac{2000}{x}$, עכשיו המכפלה של שלושת האיברים היא קבועה, $2x^2 \cdot \frac{2000}{x} \cdot \frac{2000}{x} = 8,000,000$, ולפי אי-השוויון לשלושה מספרים:

$$S = 2x^2 + \frac{2000}{x} + \frac{2000}{x} \geq 3\sqrt[3]{8,000,000} = 3 \cdot 200 = 600.$$

שוויון מתקבל כששלושת האיברים שווים זה לזה, כלומר כש- $2x^2 = \frac{2000}{x}$. מכאן $x^3 = 1000$, ולכן $x = 10$. וגם $h = \frac{1000}{10^2} = 10$. הקופסה החסכונית ביותר היא אפוא **קובייה** שמקצועה 10 ס"מ, ושטח הפנים שלה 600 סמ"ר.

מלכודת: שוויון שאי אפשר להשיג



סרטוט 7: הגרף של $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

בתחום $x \geq 2$ הגרף אינו מגיע לקו $y = 2$.

מצאו את הערך הקטן ביותר של $f(x) = x + \frac{1}{x}$ עבור $x \geq 2$. **תשובה שגויה:** "לפי דוגמה 1, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, ולכן הערך הקטן ביותר הוא 2." אבל השוויון מתקבל רק ב- $x = 1$, ו-1 אינו בתחום. לכן f אף פעם אינה שווה ל-2 בתחום, ו-2 אינו הערך הקטן ביותר.

הפתרון הנכון: כש- $x > 1$ מתקיים $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} > 0$, ולכן f עולה בכל התחום, והערך הקטן ביותר מתקבל בקצה:

$$f(2) = 2 + \frac{1}{2} = 2.5.$$

ואפשר גם בעזרת הממוצעים, בפיצול חכם: $x + \frac{1}{x} = \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right) + \frac{3x}{4}$. המכפלה $\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$ קבועה, ולכן $\frac{x}{4} + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$ וכש- $x \geq 2$ מתקיים גם $\frac{3x}{4} \geq \frac{3}{2}$. לכן $f(x) \geq 1 + 1.5 = 2.5$, ושני אי-השוויונות הופכים לשוויון באותה נקודה, $x = 2$ (בדקו!).

בשורה התחתונה: מתכון למינימום של סכום 🔍

1. כותבים את הביטוי כסכום של מחוברים חיוביים.
2. בודקים שהמכפלה של המחברים קבועה. אם לא, מנסים לפצל מחובר לכמה חלקים כך שהמכפלה תהיה קבועה (כמו בדוגמה 3).
3. מפעילים את אישווין הממוצעים (לשני מחוברים או לשלושה), ומקבלים חסם תחתון קבוע.
4. בודקים שיש בתחום ערך שבו כל המחברים שווים זה לזה. רק אז החסם הוא באמת הערך הקטן ביותר.

⚠ טעויות נפוצות

- **מספרים שליליים.** אישווין מובטח רק למספרים אי-שליליים. עבור $a = -4$ ו- $b = -1$ הממוצע החשבוני הוא -2.5 , ואילו $\sqrt{ab} = \sqrt{4} = 2$ גדול ממנו. גם $x + \frac{1}{x} \geq 2$ נכון רק כש- $x > 0$: עבור $x = -1$ מקבלים -2 . כש- $x < 0$ מפעילים את אישווין על המספר החיובי $-x$, ומקבלים $x + \frac{1}{x} \leq -2$.
- **שוויון שאי אפשר להשיג.** החסם $2\sqrt{uv}$ הוא הערך הקטן ביותר רק אם יש בתחום ערך שבו $u = v$ (ראו את המלכודת).
- **מכפלה שאינה קבועה.** אישווין $8\sqrt{x} = 2\sqrt{16x} \geq x + \frac{16}{x}$ נכון, אבל אינו נותן מינימום: החסם $8\sqrt{x}$ משתנה עם x . קודם צריך לדאוג שהמכפלה תהיה קבועה (שאלה 4).

🕒 הידעתם?

אוקלידס (בערך 300 לפני הספירה) מתאר ב"יסודות" את הבנייה של הוכחה 2. בספר השישי, טענה 13, הוא מוצא **ממוצע פרופורציוני** לשני קטעים, כלומר קטע x שמקיים $x : a = x : b$, ולכן $x = \sqrt{ab}$. כדי למצוא אותו, הוא מניח את שני הקטעים זה אחר זה, מסרטט חצי מעגל על הקטע כולו ומעלה אנך מנקודת החיבור – בדיוק כמו בסרטוט 3. אותה בנייה מופיעה כבר בספר השני (טענה 14), כשאוקלידס בונה ריבוע ששטחו שווה לשטח של מצולע נתון. שם הוא מוכיח אותה בעזרת משפט פיתגורס, כמו בתיבה "עצרו ובדקו", כי דמיון משולשים מופיע רק בספר השישי. אפילו אישווין עצמו נובע מטענה 25 בספר החמישי.

פאפוס מאלכסנדריה (המאה ה-4 לספירה) הקדיש לממוצעים חלק מהספר השלישי של ה"אוסף" שלו. אחת הבעיות שם היא איך להציג במעגל אחד את שלושת הממוצעים של שני קטעים: החשבוני, ההנדסי וההרמוני. סרטוט 4 מראה בנייה כזאת.

אוגוסטין-לואי קושי הוכיח את אישווין ל- n מספרים, לכל n , בספר הלימוד שלו לאנליזה, שיצא לאור ב-1821. קודם הוכיח אותו לזוגות, אחר כך ל-4 מספרים, ל-8, ל-16 וכן הלאה – לכל חזקה של 2. למספר n אחר הוסיף עותקים של הממוצע החשבוני של n המספרים עד שהגיע לחזקה של 2, וכך "חזר אחורה" אל n . בגלל המהלך הזה, קדימה ואחר כך אחורה, קוראים לשיטה "אינדוקציה הלך ושוב".

9 בדקו את עצמכם

✓ חמש שאלות

1. הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים $x + \frac{4}{x} \geq 4$. מתי יש שוויון?
2. מבין כל המלבנים ששטחם 36 סמ"ר, לאיזה מלבן יש ההיקף הקטן ביותר? מה ההיקף שלו?
3. נסעתם לעיר אחרת במהירות 60 קמ"ש, וחזרתם באותה דרך במהירות 40 קמ"ש. מה הייתה המהירות הממוצעת שלכם בכל הנסיעה? (רמז: היא אינה 50.)
4. מצאו בלי נגזרת את הערך הקטן ביותר של $x^2 + \frac{16}{x}$ עבור $x > 0$. רמז: פצלו את $\frac{16}{x}$ לשני חצאים שווים.
5. השלימו את החישוב מתיבת "עצרו ובדקו": הוכיחו בעזרת משפט פיתגורס ב- $\triangle OCD$ ש- $CD^2 = ab$.

תשובות

1. המכפלה של המספרים החיוביים x ו- $\frac{4}{x}$ היא 4, ולכן $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{4} = 4$. שוויון מתקבל כש- $x = \frac{4}{x}$, כלומר (כי $x > 0$) רק ב- $x = 2$.
2. אם הצלעות הן a ו- b , אז $ab = 36$, ולפי אי-שוויון הממוצעים $a + b \geq 2\sqrt{36} = 12$. לכן ההיקף $2(a + b)$ הוא לפחות 24 ס"מ, ושוויון מתקבל רק בריבוע 6 על 6.
3. נסמן ב- d את המרחק לכל כיוון. הדרך הלך נמשכה $\frac{d}{60}$ שעות, והדרך חזרה נמשכה $\frac{d}{40}$ שעות. המהירות הממוצעת היא הדרך הכוללת חלקי הזמן הכולל: $\frac{2d}{\frac{d}{60} + \frac{d}{40}} = \frac{2 \cdot 60 \cdot 40}{60 + 40} = 48$. קמ"ש – הממוצע ההרמוני של 60 ו-40, ולא הממוצע החשבוני שלהם, 50.
4. $x^2 + \frac{16}{x} = x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} = 3\sqrt[3]{64} = 12$. כלומר $x^3 = 8$ ו- $x = 2$. בדיקה: $2^2 + \frac{16}{2} = 12$. גם הנגזרת, $2x - \frac{16}{x^2}$, מתאפסת ב- $x = 2$.
5. $OD = \frac{a+b}{2}$ (רדיוס), והמרחק של C מהמרכז הוא $OC = \left| a - \frac{a+b}{2} \right| = \frac{|a-b|}{2}$. לפי משפט פיתגורס ב- $\triangle OCD$ מתקיים $CD^2 = OD^2 - OC^2 = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = ab$. זה בדיוק השוויון $(a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2$ בספר השני של "היסודות". מטרטוט 2, ובדרך הזאת הוכיח אוקלידס את הבנייה בספר השני של "היסודות".