

המשיק לאליפסה ולהיפרבולה

משוואת המשיק בשלוש דרכים – ולמה קרן אור שיוצאת ממוקד אחד של אליפסה מוחזרת אל המוקד השני

כ־25 דקות קריאה

8 הוכחות

תכונת ההחזרה: להעמקה

מקומות גאומטריים

5 יח"ל

כיתה י"ב

מה כדאי לדעת קודם

- משוואות האליפסה וההיפרבולה, כולל המרחקים מהמוקדים (המסמכים "משוואת האליפסה" ו"משוואת ההיפרבולה").
- משוואת ישר לפי נקודה ושיפוע, ונגזרת של שורש.
- המשיק למעגל (המסמך "המשיק למעגל").
- לתכונת ההחזרה: המשפט ההפוך למשפט חוצה הזווית.

מה תמצאו כאן

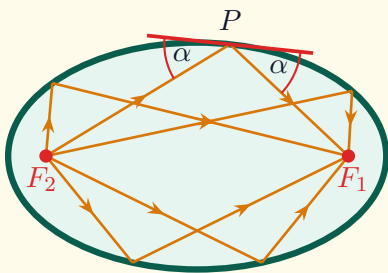
- אינטואיציה: ביליארד על שולחן אליפטי.
- המשיק לאליפסה בשלוש הוכחות: נגזרת, ישר שנשאר בחוץ ומעגל "מעוך".
- המשיק להיפרבולה בשתי הוכחות – ולמה בהיפרבולה "נקודה משותפת אחת" לא מספיקה.
- להעמקה: תכונת ההחזרה של האליפסה (שתי הוכחות) ושל ההיפרבולה.
- דוגמאות, טעויות נפוצות, היסטוריה ושאלות לבדיקה עצמית.

1 האינטואיציה: ביליארד על שולחן אליפטי

האינטואיציה

דמיינו שולחן ביליארד בצורת אליפסה, ועליו שתי נקודות מסומנות: **המוקדים** של האליפסה. מניחים כדור על מוקד אחד ומכים בו בכל כיוון שרוצים: הכדור פוגע בדופן, ניתז ממנה – ועובר דרך המוקד השני! (שולחן כזה באמת קיים: ב־2015 הציג הסופר הבריטי אלכס בלוס, שכותב על מתמטיקה, שולחן אליפטי בשם Loop, ובו כיס אחד בלבד – באחד המוקדים.)

הדופן מעוקלת, אבל ברגע הפגיעה הכדור "מרגיש" רק את הכיוון שלה באותה נקודה, כלומר את **המשיק** שם: הוא ניתז כמו מקיר ישר שמונח לאורך המשיק, באותה זווית שבה פגע. לכן כדי להבין את המסלול של הכדור צריך לדעת למצוא משיק לאליפסה. כך מתנהגים גם קול ואור: באולם בצורת אליפסה, לחישה ליד מוקד אחד נשמעת היטב ליד המוקד השני.



סרטוט 1: לא משנה לאן ייצא הכדור מ־ F_2 : אחרי הפגיעה בדופן הוא יעבור דרך F_1 . ב־ P המשיק (באדום) יוצר זוויות שוות עם שני הקטעים.

דוגמה מספרית קטנה

נתונים האליפסה $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ("הערוגה של הגן" מהמסמך "משוואת האליפסה") והישר $4x + 5y = 25$. הנקודה $P(4, \frac{9}{5})$ נמצאת על שניהם: $\frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$, וגם $16 + 9 = 25$. נקודה נמצאת מחוץ לאליפסה כש- $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} > 1$, ובתוכה כשהביטוי קטן מ-1. נבדוק עוד כמה נקודות של הישר:

הנקודה	(0, 5)	($\frac{5}{2}$, 3)	(4, $\frac{9}{5}$)	(5, 1)	(10, -3)
$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9}$	$\frac{25}{9} \approx 2.78$	1.25	1	$\frac{10}{9} \approx 1.11$	5
איפה היא?	בחוץ	בחוץ	על האליפסה	בחוץ	בחוץ

כל הנקודות שבטבלה, פרט ל- P , נמצאות מחוץ לאליפסה. בהוכחה 2 נראה שכך קורה בכל נקודה של הישר: הוא נוגע באליפסה רק ב- P , כלומר הוא **המשיק** לאליפסה ב- P .

2 המשפט

נשתמש בסימונים של המסמכים "משוואת האליפסה" ו"משוואת ההיפרבולה": a ו- b הם מספרים חיוביים, והמוקדים הם $F_1(c, 0)$ מימין ו- $F_2(-c, 0)$ משמאל. באליפסה $c^2 = a^2 - b^2$, ובהיפרבולה $c^2 = a^2 + b^2$.

משוואת המשיק לאליפסה ולהיפרבולה

המשיק לעקומה בנקודה $P(x_1, y_1)$ שעליה הוא הישר:

$$\text{בהיפרבולה } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} - \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1$$

$$\text{באליפסה } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1$$

במילים: כותבים את משוואת העקומה ו"מפצלים" כל ריבוע: את $x^2 = x \cdot x$ כותבים כ- $x \cdot x_1$, ואת $y^2 = y \cdot y$ כותבים כ- $y \cdot y_1$.

אותו כלל בכל חתכי החרוט. כך נראים גם המשיק למעגל $x^2 + y^2 = R^2$, שהוא $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = R^2$, והמשיק לפרבולה $y^2 = 2px$, שהוא $y^2 = 2p(x + x_1)$ — בפרבולה מפצלים גם את האיבר ממעלה ראשונה: את $2x = x + x$ כותבים כ- $x + x_1$ (ראו את המסמכים "המשיק למעגל" ו"המשיק לפרבולה"). הנוסחאות של המשיק לאליפסה ולהיפרבולה אינן בדף הנוסחאות של 5 יח"ל, שבו יש משוואת משיק רק למעגל ולפרבולה, ולכן כדאי לדעת מאיפה הן באות.

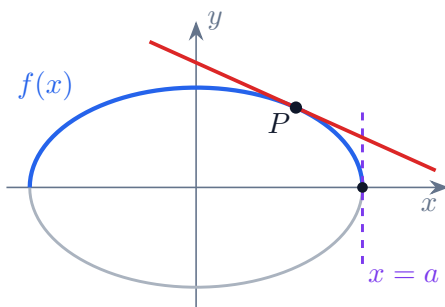
דוגמה. המשיק לאליפסה $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ בנקודה $(4, \frac{9}{5})$ הוא $\frac{4x}{25} + \frac{9}{5} \cdot \frac{y}{9} = 1$. אחרי כפל ב-25 מקבלים $4x + 5y = 25$ — הישר מהדוגמה שבסעיף 1. הוא חותך את הצירים בנקודות $(\frac{25}{4}, 0)$ ו- $(0, 5)$. באופן כללי, המשיק ב- (x_1, y_1) חותך את הצירים ב- $(\frac{a^2}{x_1}, 0)$ וב- $(0, \frac{b^2}{y_1})$ (כש- $x_1 \neq 0$ ו- $y_1 \neq 0$).

מהו בדיק משיק לאליופסה ולהיפרבולה?

במעגל, משיק הוא ישר שיש לו עם המעגל נקודה משותפת אחת בדיק. כאן נעבוד עם שתי הגדרות, ובהוכחות נראה ששתייהן מובילות לאותו ישר. **הגדרה 1 (נגזרת):** ליד נקודה P שאינה על ציר ה- x , העקומה היא גרף של פונקציה (החצי העליון שלה או התחתון), והמשיק ב- P הוא הישר דרך P ששיפועו הוא ערך הנגזרת ב- P . **הגדרה 2 (נגיעה):** המשיק לאליופסה ב- P הוא ישר דרך P שאין לו עם האליופסה אף נקודה משותפת נוספת, כמו במעגל (בהוכחה 2 נראה שיש ישר אחד בדיק כזה). בהיפרבולה צריך גם שהישר לא יהיה מקביל לאסימפטוטה (סעיף 6).

3 הוכחה 1: נגזרת

הרעיון החצי העליון של האליופסה הוא גרף של פונקציה. נגזור אותה, נמצא את שיפוע המשיק ונכתוב את משוואת הישר. בסוף נשתמש בכך ש- P על האליופסה, והמשוואה "תסתדר" בצורה היפה.



סרטוט 2: בכחול: הגרף של f . באדום: המשיק ב- P . בסגול: המשיק האנכי בקודקוד.

נבודד את y ממשוואת האליופסה:

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \quad (y \geq 0)$$

הוא הגרף של

$$f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad -a \leq x \leq a.$$

תהי נקודה על החצי העליון, עם $y_1 > 0$. אז $P(x_1, y_1)$ ו- $-a < x_1 < a$. כלומר $y_1 = f(x_1)$ ו- $\sqrt{a^2 - x_1^2} = \frac{a}{b} y_1$.

נימוק

טענה

$$\text{גזירת שורש: } (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \quad -a < x < a$$

$$f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (1)$$

$$\sqrt{a^2 - x_1^2} = \frac{a}{b} y_1$$

$$m = f'(x_1) = -\frac{bx_1}{a \cdot \frac{a}{b} y_1} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \quad (2)$$

$$\text{משוואת ישר לפי נקודה ושיפוע,} \\ \frac{y_1}{b^2} y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\frac{y \cdot y_1}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = -\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{x_1^2}{a^2} \quad (3)$$

העברת אגפים, ו- P על האליופסה

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

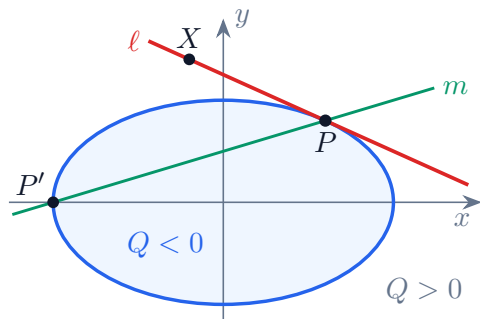
מש"ל

החצי התחתון ($y_1 < 0$). שם $\sqrt{a^2 - x_1^2} = -\frac{a}{b} y_1$ ו- $y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. שני סימני המינוס מתבטלים, ומתקבל אותו שיפוע. (בגזירה סתומה של משוואת האליופסה, כש- y תלוי ב- x , מקבלים מייד $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y \cdot y'}{b^2} = 0$, כלומר $y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$.)

הקודקודים $(\pm a, 0)$. שם אין שיפוע: ליד הקודקוד $|f'(x)|$ גדל בלי גבול, והמשיק **אנכי**. האליופסה כולה ברצועה $-a \leq x \leq a$, ולכן הישר $x = a$ נוגע בה רק ב- $(a, 0)$: זה המשיק (הגדרה 2). והנוסחה נותנת אותו: $\frac{x \cdot a}{a^2} + \frac{y \cdot 0}{b^2} = 1$. כלומר $x = a$ וכך גם ב- $(-a, 0)$.

4 הוכחה 2: הישר נשאר מחוץ לאליפסה

הרעיון בלי נגזרות, לפי הגדרה 2. נוכיח שכל נקודה של הישר $\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1$ (נסמן אותו ב- ℓ), פרט ל- P , נמצאת מחוץ לאליפסה, ושכל ישר אחר דרך P חותך אותה פעם נוספת. הכלי: זהות אלגברית אחת, שמכלילה את משפט פיתגורס.



סרטוט 3: על ℓ (באדום) $Q > 0$ בכל נקודה פרט ל- P . ישר אחר דרך P , כמו m (בירוק), חותך את האליפסה גם ב- P' .

לכל נקודה $X(x, y)$ במישור נסמן

$$Q(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

הנקודה X נמצאת על האליפסה כש- $Q = 0$, בתוכה כש- $Q < 0$, ומחוצה לה כש- $Q > 0$ (כמו במעגל, שבו $Q(0, 0) = -1$, למשל, במרכז $x^2 + y^2 < R^2$ ובמוקדים $Q(\pm c, 0) = \frac{c^2}{a^2} - 1 < 0$).

זהות המפתח. לכל x ו- y , ולכל x_1 ו- y_1 מתקיים (פתחו סוגריים ובדקו!)

$$Q(x, y) = \frac{(x - x_1)^2}{a^2} + \frac{(y - y_1)^2}{b^2} + 2 \left(\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} - 1 \right) - Q(x_1, y_1).$$

עכשיו תהי $X(x, y)$ נקודה על הישר ℓ :

נימוק	טענה
בזהות המפתח $Q(x_1, y_1) = 0$ כי P על האליפסה, והסוגריים מתאפסים, כי X על ℓ	① $Q(x, y) = \frac{(x - x_1)^2}{a^2} + \frac{(y - y_1)^2}{b^2}$
שני השברים אינם שליליים, ולפחות אחד מהם חיובי	② $Q(x, y) > 0$ כש- $X \neq P$
כל שאר הנקודות של ℓ נמצאות מחוץ לאליפסה	③ ℓ נוגע באליפסה רק ב- P

ולמה אין ישר אחר כזה? נכתוב ישר אחר דרך P בהצגה פרמטרית: $X_t = (x_1 + tu, y_1 + tv)$, כאשר (u, v) הוא וקטור כיוון שלו. בזהות המפתח מתקיים $x - x_1 = tu$ ו- $y - y_1 = tv$, והביטוי שבסוגריים שווה ל- $t \cdot k$, כאשר $k = \frac{x_1 u}{a^2} + \frac{y_1 v}{b^2}$. לכן

$$Q(X_t) = t^2 \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right) + 2tk = t(A + 2k), \quad A = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} > 0.$$

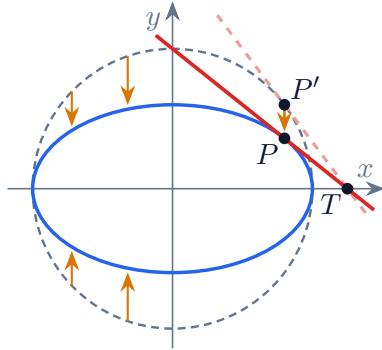
אם $k \neq 0$, אז $t = -\frac{2k}{A} \neq 0$ מתקבל $Q = 0$: לישר יש עם האליפסה נקודה משותפת **שנייה**, כמו P' בסרטוט 3. ואם $k = 0$, הנקודה $(x_1 + u, y_1 + v)$ מקיימת את משוואת ℓ , ולכן הישר הוא ℓ עצמו. מכאן ש- ℓ הוא הישר **היחיד** דרך P שאין לו עם האליפסה נקודה משותפת נוספת.

מש"ל

והקשר למעגל. כש- $a = b = R$, צעד 1 אומר שלכל נקודה X על המשיק מתקיים $-x^2 + y^2 = R^2 + PX^2$. משפט פיתגורס במשולש OPX , כמו במסמך "המשיק למעגל".

5 הוכחה 3: מעגל "מעוך"

הרעיון במסמך "משוואת האליפסה" ראינו שאליפסה היא מעגל "מעוך": כשמכפילים את שיעור ה־ y של כל נקודה במעגל $x^2 + y^2 = a^2$ ב־ $\frac{b}{a}$, מקבלים בדיוק את האליפסה. (זאת גם אחת משתי ההגדרות של האליפסה בתוכנית של 5 יח"ל). הכיוון הופך ישרים לישרים, ולכן הוא הופך את המשיק למעגל, שכבר מכירים, למשיק לאליפסה.



סרטוט 4: מקווקו: המעגל והמשיק שלו
ב־ $P'(4, 3)$. אחרי הכיוון: האליפסה
והמשיק שלה ב־ $P(4, \frac{9}{5})$.

- הכיוון מעביר כל נקודה (X, Y) אל $(X, \frac{b}{a}Y)$. שלוש עובדות עליו:
 - הוא מעביר את המעגל $X^2 + Y^2 = a^2$ אל האליפסה.
 - כל נקודה (x, y) מתקבלת מנקודה אחת בדיוק: מ־ $(x, \frac{a}{b}y)$.
 - הוא מעביר ישר ל־ $X = k$ עובר ל־ $x = k$, ו־ $Y = mX + n$ עובר ל־ $y = \frac{b}{a}(mx + n)$.
- לכן המשיק למעגל בנקודה P' , שפוגש את המעגל רק ב־ P' , עובר לישר דרך P שפוגש את האליפסה רק ב־ P : המשיק לאליפסה ב־ P . ואין ישר אחר כזה: המתוחה ההפוכה הייתה מעבירה אותו לישר נוסף דרך P' שפוגש את המעגל רק ב־ P' .

נימוק	טענה
מעביר את P' אל P $x_1^2 + \frac{a^2}{b^2}y_1^2 = a^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right) = a^2$ הכיוון	① $X^2 + Y^2 = a^2$ על המעגל $P'(x_1, \frac{a}{b}y_1)$
המשיק למעגל ב־ P' (ראו את המסמך "המשיק למעגל")	② $X \cdot x_1 + Y \cdot \frac{a}{b}y_1 = a^2$
על התמונה של המשיק בדיוק (x, y) כש־ $(x, \frac{a}{b}y)$ על המשיק: מציבים $X = x$ ו־ $Y = \frac{a}{b}y$ בצעד 2	③ $x \cdot x_1 + \frac{a}{b}y \cdot \frac{a}{b}y_1 = a^2$
מחלקים ב־ a^2	④ $\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1$

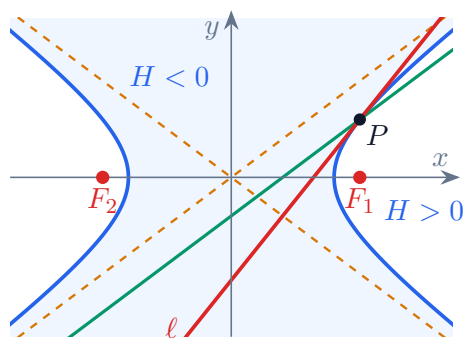
מש"ל

אין כאן מקרים מיוחדים, גם לא בקודקודים. ויש בונוס: הכיוון לא מזיז את הנקודות של ציר ה־ x , ולכן שני המשיקים חותכים אותו באותה נקודה, $T(\frac{a^2}{x_1}, 0)$ (בסרטוט 4: $T(\frac{25}{4}, 0)$). אבל הכיוון לא שומר על זוויות: במעגל המשיק ניצב לרדיוס, ובאליפסה המשיק בדרך כלל אינו ניצב ל־ OP (ראו "טעות נפוצה" בסעיף 8).

6 ההיפרבולה: הוכחות 4 ו־5

את הוכחות 1 ו־2 אפשר להעביר להיפרבולה כמעט מילה במילה: מחליפים את $+\frac{y^2}{b^2}$ ב־ $-\frac{y^2}{b^2}$. הוכחה 3 לא עוברת, כי אין "מעגל מוכן" שממנו מקבלים היפרבולה. ובהגדרה 2 מחכה לנו הפתעה.

זהירות: "נקודה משותפת אחת" לא מספיקה



סרטוט 5: המשיק ℓ ב- P (באדום) וישר שמקביל לאסימפטוטה (בירוק). התחום שבין הענפים צבוע.

ניקח את ההיפרבולה $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ (כאן $a = 4$ ו- $b = 3$), ולכן $c = 5$ ואת הנקודה $P(5, \frac{9}{4})$ שעליה הישר הירוק $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$ עובר דרך P ומקביל לאסימפטוטה $y = \frac{3}{4}x$. נציב אותו במשוואה:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1 \implies \frac{4x-4}{16} = 1 \implies x = 5.$$

האיבר x^2 התבטל, ונשאר פתרון אחד: לישר ולהיפרבולה יש נקודה משותפת אחת בלבד. ובכל זאת הישר **חוצה** את ההיפרבולה: משמאל ל- P הוא בין הענפים, ומימין ל- P – בתוך הענף.

נסמן $H(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$. על ההיפרבולה $H = 0$, בתוך הענפים $H > 0$ (למשל במוקדים, כי $\frac{c^2}{a^2} > 1$), ובין הענפים $H < 0$ (למשל במרכז, שבו $H = -1$). על הישר הירוק $H = \frac{x-5}{4}$: שלילי משמאל ל- P וחיובי מימין לו. כך מתנהג כל ישר שמקביל לאסימפטוטה (נוכח זאת בסוף הוכחה 5), כמו ישר שמקביל לציר של פרבולה (ראו את המסמך "המשיק לפרבולה"). לכן בהיפרבולה **משיק** ב- P הוא ישר שעובר דרך P , שאין לו עם ההיפרבולה נקודה משותפת נוספת, **ושאינו מקביל לאף אחת מהאסימפטוטות**.

הוכחה 4: נגזרת

בחצי העליון ההיפרבולה היא הגרף של $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (בתחום $|x| \geq a$). בנקודה $P(x_1, y_1)$ עם $y_1 > 0$ מתקיים $\sqrt{x_1^2 - a^2} = \frac{a}{b}y_1$. בדיוק כמו בהוכחה 1 (נגזרת, משוואת ישר, כפל ב- $\frac{y_1}{b^2}$ והעברת אגפים) מקבלים

$$m = \frac{b}{a} \cdot \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}, \quad \frac{x \cdot x_1}{a^2} - \frac{y \cdot y_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

כי P על ההיפרבולה. בחצי התחתון שני סימני מינוס מתבטלים, ובקודקודים המשיק $x = \pm a$ אנכי, כמו שהנוסחה נותנת. (בגזירה סתומה: $y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}$.)

מש"ל ■

הוכחה 5: הישר נשאר בין הענפים

הרעיון כמו בהוכחה 2, נבדוק את הסימן של H לאורך הישר ℓ שמשוואתו $\frac{x \cdot x_1}{a^2} - \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1$. הפעם נכתוב את נקודות הישר במפורש:

$$X_t = \left(x_1 + t \cdot \frac{y_1}{b^2}, y_1 + t \cdot \frac{x_1}{a^2} \right).$$

נימוק	טענה
מציבים במשוואת ℓ : האיברים עם t מתבטלים, ונשאר $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$	① X_t על ℓ , וכל נקודה של ℓ היא X_t עבור t כלשהו
פותחים סוגריים. האיברים עם t בחזקה ראשונה מתבטלים	② $H(X_t) = H(x_1, y_1) + \frac{t^2}{a^2 b^2} \left(\frac{y_1^2}{b^2} - \frac{x_1^2}{a^2} \right)$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, H(x_1, y_1) = 0$$

$$H(X_t) = -\frac{t^2}{a^2 b^2} < 0 \text{ כש-} t \neq 0 \quad (3)$$

אילו היה מקביל ל- $bx \mp ay = 0$ היה מתקיים $\frac{x_1}{a} = \pm \frac{y_1}{b}$ ואז $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 0 \neq 1$

4) ℓ אינו מקביל לאסימפטוטה

לפי צעד 3, כל נקודה של ℓ פרט ל- P נמצאת **בין הענפים**: ℓ לא פוגש את ההיפרבולה פעם נוספת, וגם לא חוצה אותה. **ולמה אין ישר אחר כזה?** את הנקודות של ישר אחר דרך P נכתוב כ- $(x_1 + su, y_1 + sv)$, ונקבל כמו בהוכחה 2 ש- $H = s^2 \left(\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right) + 2sk$, כאשר $k = \frac{x_1 u}{a^2} - \frac{y_1 v}{b^2}$. אם הישר אינו מקביל לאסימפטוטה, הסוגריים אינם אפס, ויש פתרון שני $s \neq 0$, כלומר נקודה משותפת נוספת (אלא אם $k = 0$, ואז הישר הוא ℓ). ואם הוא מקביל לאסימפטוטה, נבחר $(u, v) = (a, \pm b)$: הסוגריים מתאפסים, ו- $H = 2sk$ עם $k = \frac{x_1}{a} \mp \frac{y_1}{b} \neq 0$ (מכפלת שני הערכים האפשריים של k היא $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$). לכן H מחליף סימן ב- P , והישר חוצה את ההיפרבולה, כמו הישר הירוק.

מש"ל ■

חמש ההוכחות זו מול זו

הוכחות 1 ו-4: נגזרת	הוכחות 2 ו-5: הישר לא נכנס	הוכחה 3: מעגל "מעוך"	
הגדרה 1: השיפוע הוא הנגזרת	הגדרה 2: אין נקודה משותפת נוספת	הגדרה 2, דרך המשיק למעגל	הגדרת המשיק
חצי עליון, חצי תחתון, קודקודים (משיק אנכי)	אין	אין	מקרים מיוחדים
עובדת, עם שינוי סימן	עובדת, אבל צריך גם "לא מקביל לאסימפטוטה"	לא עובדת ישירות	בהיפרבולה

7 להעמקה: תכונת ההחזרה

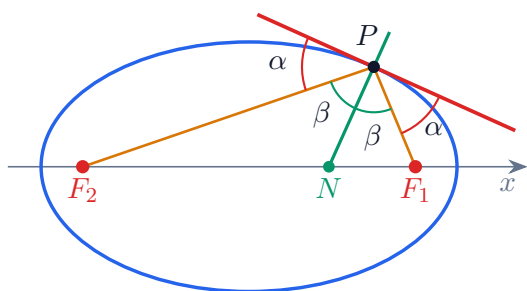
מראה מעוקלת מחזירה אור כמו מראה מישורית שמונחת לאורך המשיק בנקודת הפגיעה: הקרן הפוגעת והקרן המוחזרת יוצרות **זוויות שוות עם המשיק** (חוק ההחזרה). כך הראינו במסמך "משוואת הפרבולה והמשיק" שקרן שיוצאת ממוקד הפרבולה מוחזרת במקביל לציר. (תכונות ההחזרה של האליפסה ושל ההיפרבולה אינן בתוכנית הלימודים; גם התכונה של הפרבולה מופיעה בה רק כנושא העשרה).

תכונת ההחזרה

באליפסה: בכל נקודה P המשיק יוצר זוויות שוות עם הקטעים PF_1 ו- PF_2 . לכן קרן שיוצאת מהמוקד F_2 ופוגעת באליפסה מבפנים מוחזרת אל המוקד F_1 , וגם להפך.

בהיפרבולה: בכל נקודה P המשיק **חוצה** את הזווית $F_1 P F_2$. לכן קרן שנעה לעבר מוקד אחד ופוגעת מבחוץ בענף שסביבו מוחזרת לעבר המוקד השני.

הוכחה 6: הנורמל ומשפט חוצה הזווית



סרטוט 6: הנורמל PN (בירוק) חוצה את הזווית F_1PF_2 , ולכן המשיק יוצר זוויות שוות עם PF_1 ועם PF_2 .

הרעיון נראה שהאנך למשיק ב- P (הנורמל) מחלק את F_1PF_2 ביחס $PF_1 : PF_2$, ולכן חוצה את הזווית F_1PF_2 . כזכור מהמסמך "משוואת האליפסה", האקסצנטריות היא $e = \frac{c}{a}$, ומתקיים $0 < e < 1$. המרחקים של $P(x_1, y_1)$ מהמוקדים הם

$$PF_1 = a - ex_1, \quad PF_2 = a + ex_1.$$

תהי P נקודה שאינה על הצירים. שיפוע המשיק בה הוא $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ (הוכחה 1), ולכן שיפוע הנורמל הוא $\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$.

נימוק

טענה

במשוואת הנורמל $y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$ מציבים $y = 0$, ומקבלים $x = x_1 - \frac{b^2}{a^2}x_1 = \frac{c^2}{a^2}x_1$. בנוסף, $|e^2x_1| \leq e^2a = ec < c$ הנקודה N בין המוקדים

$$N(e^2x_1, 0), \quad -c < e^2x_1 < c \quad (1)$$

כופלים את המונה ואת המכנה ב- $\frac{a}{c}$ ואז $c \cdot \frac{a}{c} = a$ ו- $e^2x_1 \cdot \frac{a}{c} = ex_1$

$$\frac{NF_1}{NF_2} = \frac{c - e^2x_1}{c + e^2x_1} = \frac{a - ex_1}{a + ex_1} \quad (2)$$

המרחקים מהמוקדים, והמשפט ההפוך למשפט חוצה הזווית במשולש F_1PF_2 (ראו את המסמך "משפט חוצה הזווית")

$$\frac{NF_1}{NF_2} = \frac{PF_1}{PF_2} \quad (3)$$

ולכן PN חוצה את $\angle F_1PF_2$

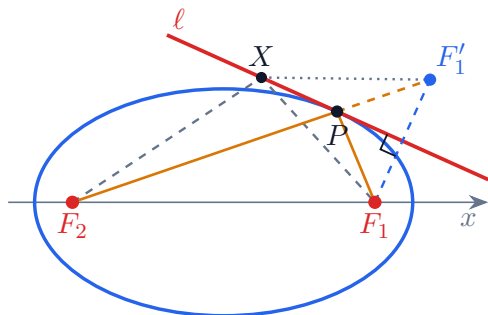
המשיק ניצב ל- PN , ולכן כל אחת משתי הזוויות היא 90° פחות $\angle F_1PF_2$ חצי

$$PF_2 \text{ ועם } PF_1 \quad (4)$$

מש"ל

ונקודות על הצירים? בקודקודים $(\pm a, 0)$ המשיק $x = \pm a$ ניצב לציר: קרן שיוצאת ממוקד לאורך הציר פוגעת בקודקוד בניצב, חוזרת לאורך הציר ועוברת דרך המוקד השני. בנקודות $(0, \pm b)$ הנורמל הוא ציר ה- y (ו- $N = O$), בהתאם לנוסחה), והתכונה נובעת מהסימטריה.

הוכחה 7: הדרך הקצרה ביותר



סרטוט 7: השיקוף של F_1 במשיק ℓ הוא F'_1 . הדרך $X \rightarrow F_2 \rightarrow P \rightarrow F'_1$ ישרה, ולכן קצרה מהדרך $X \rightarrow F_2 \rightarrow P \rightarrow F_1$ (באפור).

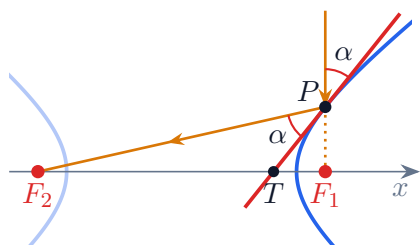
הרעיון הרון מאלכסנדריה (כנראה במאה הראשונה או השנייה לספירה) הראה בספר שלו על מראות שקרן אור שמוחזרת ממראה הולכת בדרך הקצרה ביותר. נראה שמבין כל הנקודות של המשיק ℓ , דווקא ב- P הדרך "מ- F_2 אל ℓ ומשם אל F_1 " היא הקצרה ביותר – ושבנקודה כזאת הזוויות שוות.

טענה	נימוק
① $XF_1 + XF_2 > 2a = PF_1 + PF_2$ לכל נקודה $X \neq P$ של ℓ	לפי הוכחה 2, X מחוץ לאלפסה, ונקודה שבחוץ "צריכה חבל ארוך יותר". ו- P על האליפסה
② F_1 ו- F_2 באותו צד של ℓ	הקטע F_1F_2 כולו בתוך האליפסה, ו- ℓ לא נכנס לתוכה
③ $XF_1 + XF_2 = XF'_1 + XF_2 \geq F'_1F_2$	F'_1 הוא השיקוף של F_1 ב- ℓ , ולכן $XF_1 = XF'_1$. ואי-שוויון המשולש
④ P נמצאת על הקטע F'_1F_2	שוויון בצעד 3 מתקבל רק בנקודה שבה הקטע F'_1F_2 חותך את ℓ (F'_1 ו- F_2 משני צדי ℓ). לפי צעד 1, זו הנקודה P
⑤ המשיק יוצר זוויות שוות עם PF_1 ועם PF_2	זוויות קודקדיות: הזווית בין PF_2 ל- ℓ שווה לזו שבין PF'_1 ל- ℓ , ובשיקוף היא שווה לזו שבין PF_1 ל- ℓ

מש"ל

נקודה שבחוץ "צריכה חבל ארוך יותר". תהי $X(x, y)$ נקודה מחוץ לאלפסה, ו- $s = XF_1 + XF_2$. אילו היה $s \leq 2a$, הייתה X על האליפסה שמוקדיה F_1 ו- F_2 ושסכום המרחקים בה הוא s , כלומר על $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, שבה $A = \frac{s}{2} \leq a$ ו- $B^2 = A^2 - c^2 \leq b^2$ (ראו את המסמך "משוואת האליפסה"). אבל אז $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$, בסתירה לכך ש- X בחוץ. לכן $s > 2a$. (ו- $s = 2c$ אינו אפשרי: אז X על הקטע F_1F_2 , שבתוך האליפסה).

הוכחה 8: ההיפרבולה – המשיק חוצה את הזווית



סרטוט 8: קרן שנעה לעבר F_1 מוחזרת לעבר F_2 .

נניח ש- $P(x_1, y_1)$ על הענף הימני ואינה הקודקוד, כלומר $x_1 > a$. שם $PF_2 = ex_1 + a$ ו- $PF_1 = ex_1 - a$, כאשר $e = \frac{c}{a} > 1$ (ראו את המסמך "משוואת ההיפרבולה"). נסמן ב- T את הנקודה שבה המשיק חותך את ציר ה- x .

טענה	נימוק
① $0 < \frac{a^2}{x_1} < a < c$, $T\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$	מציבים $y = 0$ במשוואת המשיק. כיוון ש- $x_1 > a$, הנקודה T בין המוקדים
② $\frac{TF_1}{TF_2} = \frac{c - \frac{a^2}{x_1}}{c + \frac{a^2}{x_1}} = \frac{ex_1 - a}{ex_1 + a} = \frac{PF_1}{PF_2}$	כופלים את המונה ואת המכנה ב- $\frac{x_1}{a}$, והמרחקים מהמוקדים
③ PT , כלומר המשיק, חוצה את $\angle F_1PF_2$	המשפט ההפוך למשפט חוצה הזווית, במשולש PF_1PF_2

מש"ל

במספרים (הסרטוט): בהיפרבולה $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, המשיק בנקודה $P(5, \frac{9}{4})$ הוא $5x - 4y = 16$. הוא חותך את ציר ה- x ב- $T(\frac{16}{5}, 0)$, ולכן $TF_1 = \frac{9}{5}$ ו- $TF_2 = \frac{41}{5}$. ומצד שני $PF_1 = \frac{9}{4}$ ו- $PF_2 = \sqrt{10^2 + (\frac{9}{4})^2} = \frac{41}{4}$. שוב היחס $\frac{9}{41}$.

בנקודה $(a, 0)$ הזווית F_1PF_2 היא זווית שטוחה, והמשיק $x = a$ ניצב לציר, כלומר חוצה גם אותה. הענף השמאלי סימטרי לימני.

ומה זה אומר על האור? השיקוף במשיק מעביר את הקרן PF_1 אל הקרן PF_2 . לכן קרן אור שנעה לעבר F_1 ופוגעת ב- P מבחוץ ממשיכה אחרי ההחזרה לעבר F_2 . על זה בנוי **טלסקופ קסגון**: המראה הגדולה (פרבולית) מרכזת את אור הכוכב לעבר המוקד שלה, ובדרך הוא פוגע במראה קטנה וקמורה בצורת היפרבולה, שאחד ממוקדיה הוא אותו מוקד. היא מחזירה את האור אל המוקד השני שלה, מאחורי חור במרכז המראה הגדולה, ושם המצלמה. בטלסקופ החלל האבל, שבנוי לפי גרסה של התכנון הזה, שתי המראות היפרבוליות.

הידעתם?

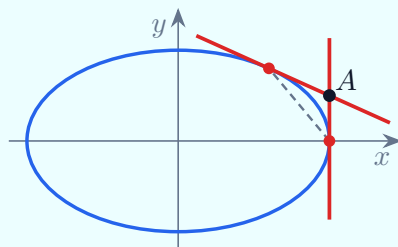
אפולוניוס מפרגה (בסביבות 200 לפני הספירה) הקדיש לנקודות שאנחנו קוראים להן "מוקדים" את טענות 45–52 בספר השלישי של "חתי חרוט". לא היה לו שם בשבילן, והוא הגיע אליהן בבנייה גאומטרית של מלבנים על הצייר. בטענה 48 הוא מוכיח שהקווים מנקודת ההשקה אל שתי הנקודות יוצרים זוויות שוות עם המשיק – תכונת ההחזרה. רק אחר כך, בטענות שאחריה, הוא מוכיח שבהיפרבולה ההפרש בין שני הקווים, ובאליפסה הסכום שלהם, שווה ל- $2a$. אצל אפולוניוס הסדר הפוך מהסדר שלנו: קודם המשיק, ורק אחריו "החבל של הגנן".

את השם focus (בלטינית "אֶחָ", המקום שבו בוערת האש) נתן לנקודות האלה **יוהנס קפלר**, בספר על אופטיקה שפרסם ב-1604. השם קשור כנראה למראות שריפה, שמרכזות את קרני השמש בנקודה אחת ומחממות אותה מאוד.

8 מה עושים עם המשפטים?

משיקים מנקודה שמחוץ לאליפסה

מצאו את המשיקים לאליפסה $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ שעוברים דרך הנקודה $A(5, \frac{3}{2})$.



סרטוט 9: שני המשיקים מ- A .

A אינה על האליפסה ($1 + \frac{1}{4} > 1$), ולכן אי אפשר להציב אותה בנוסחה. נסמן את נקודת ההשקה ב- (x_1, y_1) . המשיק בה עובר דרך A אם $\frac{5x_1}{25} + \frac{3}{2} \cdot \frac{y_1}{9} = 1$, כלומר $\frac{x_1}{5} + \frac{y_1}{6} = 1$. מכאן $y_1 = 6 - \frac{6}{5}x_1$, ונציב במשוואת האליפסה:

$$\frac{x_1^2}{25} + 4\left(1 - \frac{x_1}{5}\right)^2 = 1 \implies x_1^2 - 8x_1 + 15 = 0.$$

לכן $x_1 = 3$ או $x_1 = 5$, ונקודות ההשקה הן $(3, \frac{12}{5})$ ו- $(5, 0)$. המשיקים: $9x + 20y = 75$, והישר $x = 5$.

שימו לב: אחד המשיקים אנכי! מי שמחפש משיק בצורה $y = mx + n$ ומאפס את הדיסקרימיננטה ימצא רק את הראשון; נוסחת המשיק מוצאת את שניהם.

⚠ טעות נפוצה

- **נקודה שאינה על העקומה.** הנוסחה נכונה רק כש- (x_1, y_1) על העקומה. הצבה של A מהדוגמה נותנת $\frac{x}{5} + \frac{y}{6} = 1$: הישר דרך שתי נקודות ההשקה (המקווקו בסרטוט 9), ולא משיק.
- **הסימן בהיפרבולה.** המשיק ל- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ הוא $\frac{x \cdot x_1}{a^2} - \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1$ עם **מינוס**, ובאגף ימין 1, לא 0.
- **שוכחים משיקים אנכיים.** בקודקודים $(\pm a, 0)$ המשיק הוא $x = \pm a$, ולישר כזה אין שיפוע. חיפוש בצורה $y = mx + n$ מפספס אותו (סרטוט 9).
- **"המשיק ניצב ל- OP ".** נכון במעגל, אבל באליוספה רק בארבעת הקודקודים. ב- $P(4, \frac{9}{5})$, למשל, מכפלת השיפועים של OP ושל המשיק היא $-\frac{9}{25} \neq -1$.

9 בדקו את עצמכם

✓ ארבע שאלות קצרות

1. מצאו את המשיק להיפרבולה $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ בנקודה $P(4, 6)$, ובדקו כמו בהוכחה 8 שהוא חוצה את הזווית F_1PF_2 (המוקדים הם $(\pm 4, 0)$).
2. קרן יוצאת מהמוקד $F_2(-4, 0)$ של האליפסה $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ופוגעת בה בנקודה $(0, 3)$. מצאו את המשיק שם ואת משוואת הקרן המוחזרת, ובדקו שהיא עוברת דרך F_1 .
3. הוכיחו: ישר שמקביל לאסימפטוטה $y = \frac{b}{a}x$ ועובר דרך נקודה P של ההיפרבולה פוגש אותה רק ב- P . (רמז: הציבו $y = \frac{b}{a}x + n$, ובדקו מה קורה לאיבר x^2).
4. באיזו נקודה N הנורמל לאליוספה $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ בנקודה $P(4, \frac{9}{5})$ חותך את ציר ה- x ? בדקו ש- $\frac{NF_1}{NF_2} = \frac{PF_1}{PF_2}$.

תשובות

1. הנקודה על ההיפרבולה, כי $\frac{16}{4} - \frac{36}{12} = 1$. המשיק: $\frac{4x}{4} - \frac{6y}{12} = 1$, כלומר $y = 2x - 2$, והוא חותך את ציר ה- x ב- $T(1, 0)$. לכן $\frac{TF_1}{TF_2} = \frac{3}{5}$, וגם $\frac{PF_1}{PF_2} = \frac{6}{\sqrt{8^2+6^2}} = \frac{6}{10}$.
2. המשיק ב- $(0, 3)$ הוא $\frac{y \cdot 3}{9} = 1$, כלומר הישר האופקי $y = 3$. הקרן הפוגעת עולה בשיפוע $\frac{3-0}{0-(-4)} = \frac{3}{4}$, ואחרי החזרה מקיר אופקי השיפוע מחליף סימן: הקרן המוחזרת היא $y = 3 - \frac{3}{4}x$, והיא חותכת את ציר ה- x ב- $F_1(4, 0)$.
3. נציב $y = \frac{b}{a}x + n$ במשוואת ההיפרבולה. האיבר x^2 מתבטל, ונשאר $-\frac{2n}{ab}x = 1 + \frac{n^2}{b^2}$. כש- $n = 0$ (האסימפטוטה עצמה) אין פתרון, ואחרת יש פתרון יחיד. הישר עובר דרך P , ולכן $n \neq 0$, והוא הנקודה המשותפת היחידה.
4. שיפוע הנורמל הוא $\frac{a^2y_1}{b^2x_1} = \frac{5}{4}$, והנורמל $y - \frac{9}{5} = \frac{5}{4}(x - 4)$. חותך את ציר ה- x ב- $N(\frac{64}{25}, 0)$. לכן $NF_1 = \frac{36}{25}$ ו- $NF_2 = \frac{164}{25}$, והיחס $\frac{9}{41}$ שווה ליחס $\frac{PF_1}{PF_2} = \frac{9/5}{41/5}$.