חזקת נקודה ביחס למעגל

מיתרים נחתכים, שני חותכים, חותך ומשיק — שלושה משפטים שהם בעצם נוסחה אחת: $d^2 - R^2$

כיתה י' | 5 יח"ל | גאומטריה | חזקת נקודה: להעמקה | 3 הוכחות | כ־20 דקות קריאה

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: מלבנים שהשטח שלהם לא משתנה.
- המשפט: שלושה משפטים מוכרים — ונוסחה אחת שמאחדת אותם.
- הוכחה 1: משולשים דומים (הדרך הקלאסית).
- הוכחה 2: משפט פיתגורס, בחישוב אחד.
- הוכחה 3 (להעמקה): מערכת צירים ונוסחאות ויאטה.
- שימושים: מערכת צירים, תרגיל בסגנון בגרות, האופק והציר הרדיקלי.

מה כדאי לדעת קודם

- דמיון משולשים (ז.ז).
- זווית היקפית, וזווית בין משיק למיתר ("זווית היקפית וזווית מרכזית").
- משיק ניצב לרדיוס ("המשיק למעגל").
- משפט פיתגורס.
- להוכחה 3: נוסחאות ויאטה.

1 האינטואיציה: מלבנים שהשטח שלהם קבוע

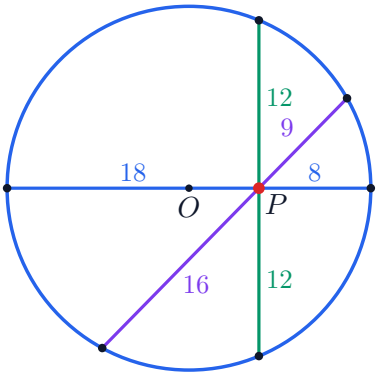
האינטואיציה

סמנו נקודה P ליד מעגל, והעבירו דרכה ישר שחותך את המעגל בשתי נקודות, A ו־B. מדדו את המרחקים PA ו־PB, וכפלו אותם. עכשיו סובבו את הישר סביב P ומדדו שוב: המרחקים השתנו, אבל המכפלה יצאה **בדיוק אותו מספר**. כך קורה בכל ישר שעובר דרך P, בין ש־P מחוץ למעגל ובין שהיא בתוכו (סרטוט 1).

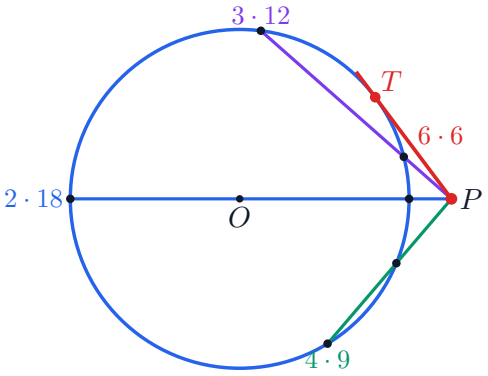
אפשר לחשוב על המכפלה $PA \cdot PB$ כעל השטח של מלבן שצלעותיו PA ו־PB. כשהישר מסתובב, המלבן משנה צורה: פעם הוא ארוך וצר (2 על 18), ופעם רחב יותר (4 על 9) — אבל השטח שלו נשאר 36. וכשהישר נעשה **משיק**, שתי הנקודות A ו־B מתלכדות לנקודת ההשקה T. אז שתי הצלעות של המלבן שוות, והוא הופך לריבוע: $PT^2 = 36$.

כשהמעגל קבוע, המכפלה תלויה רק במרחק של P מהמרכז. בסרטוט 1 מימין הרדיוס 13 והמרחק 5, ואכן $13^2 - 5^2 = 144$. משמאל הרדיוס 8 והמרחק 10, ואכן $10^2 - 8^2 = 36$.

© אור בן שטרית · אינסוף



$8 \cdot 18 = 9 \cdot 16 = 12 \cdot 12 = 144$



בכל ישר דרך P המכפלה היא 36

סרטוט 1: מימין: P בתוך מעגל שרדיוסו 13. משמאל: P מחוץ למעגל שרדיוסו 8, וליד כל ישר רשומה המכפלה $PA \cdot PB$.

2 המשפט

נסמן את מרכז המעגל ב־O, את הרדיוס ב־R, ואת המרחק של הנקודה P מהמרכז ב־$d = OP$. ישר שחותך את המעגל בשתי נקודות נקרא **חותך**. כש־P מחוץ למעגל, נסמן ב־A את נקודת החיתוך הקרובה ל־P וב־B את הרחוקה: הקטע PA הוא **החלק החיצוני** של החותך, ו־PB הוא **החותך כולו**. ישר שיש לו עם המעגל נקודה משותפת אחת בדיוק, T, הוא **משיק**, ו־PT הוא **קטע המשיק**.

⬟ משפט חזקת הנקודה

לכל ישר שעובר דרך P וחותך את המעגל בנקודות A ו־B:

$$\boxed{PA \cdot PB = \left|d^2 - R^2\right|}$$

ואם P מחוץ למעגל, והישר PT משיק למעגל בנקודה T, אז

$$PT^2 = d^2 - R^2.$$

במילים: המכפלה של שני המרחקים מ־P אל נקודות החיתוך אינה תלויה בישר שבחרנו: היא נקבעת רק לפי המרחק של P ממרכז המעגל ולפי הרדיוס.

המספר $d^2 - R^2$ נקרא **החזקה של הנקודה** P ביחס למעגל, ונסמנו ב־$p(P)$. הסימן שלו מגלה איפה נמצאת P:

$p(P) < 0$	$p(P) = 0$	$p(P) > 0$
P בתוך המעגל	P על המעגל	P מחוץ למעגל
$PA \cdot PB = R^2 - d^2$	אחת הנקודות היא P עצמה	$PA \cdot PB = PT^2 = d^2 - R^2$

שלושה משפטים מוכרים – מקרים פרטיים של המשפט

אם המכפלה זהה בכל הישרים שעוברים דרך P, היא זהה בפרט בשני ישרים. כך מקבלים שלושה משפטים מוכרים בגאומטריה של המעגל:

- **מיתרים נחתכים.** אם במעגל שני מיתרים, AB ו־CD, נחתכים בנקודה P, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.
- **שני חותכים.** אם מנקודה P שמחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, PAB ו־PCD, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.
- **חותך ומשיק.** אם מנקודה P שמחוץ למעגל יוצאים חותך PAB ומשיק PT, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק: $PT^2 = PA \cdot PB$.

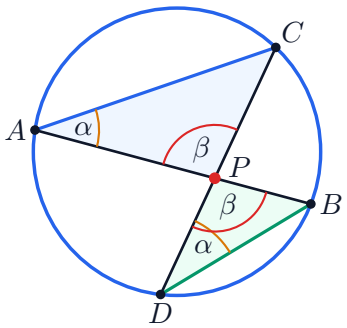
שלושת המשפטים האלה נלמדים ב־5 יח״ל בכיתה י׳ במסגרת התרגול, ולכן כדאי לדעת להוכיח אותם. הניסוח המאוחד, עם $d^2 - R^2$, הוא להעמקה.

3 הוכחה 1: משולשים דומים

הרעיון בכל אחד משלושת המקרים נמצא זוג משולשים דומים, והשוויון בין המכפלות ייצא מיחס הצלעות. כך נדע שהמכפלה $PA \cdot PB$ זהה בכל הישרים דרך P. את הערך שלה נחשב בסוף, בעזרת ישר אחד שנוח לנו במיוחד: הישר שעובר דרך המרכז.

מקרה א׳: מיתרים נחתכים

המיתרים AB ו־CD נחתכים בנקודה P. נעביר את המיתרים AC ו־DB, ונקבל שני משולשים: $\triangle PAC$ (בכחול) ו־$\triangle PDB$ (בירוק).
הזווית $\angle PAC$ היא הזווית $\angle CAB$, כי P על המיתר AB. באותו אופן, $\angle PDB$ היא $\angle CDB$. שתיהן זוויות היקפיות שנשענות על אותה קשת, $\overset{\frown}{CB}$, ולכן הן שוות (ראו את המסמך ״זווית היקפית וזווית מרכזית״ בסדרה). בסרטוט הן מסומנות ב־α, והזוויות הקודקודיות שב־P מסומנות ב־β.



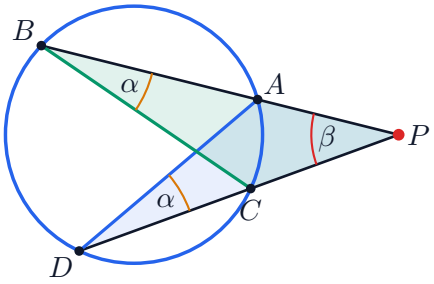
סרטוט 2: $\triangle PAC \sim \triangle PDB$.

	טענה	נימוק
1	$\angle PAC = \angle PDB$	זוויות היקפיות שנשענות על הקשת $\overset{\frown}{CB}$
2	$\triangle PAC \sim \triangle PDB$	ז.ז: גם $\angle APC = \angle DPB$ (זוויות קודקודיות)
3	$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$, ולכן $PA \cdot PB = PC \cdot PD$	יחס הצלעות המתאימות, וכפל בהצלבה

מש״ל ■

מקרה ב׳: שני חותכים

מהנקודה P יוצאים שני חותכים, PAB ו־PCD. נקודות החיתוך הקרובות ל־P הן A ו־C, והרחוקות הן B ו־D. נעביר את המיתרים AD ו־CB (הם נחתכים בתוך המעגל), ונתבונן ב־$\triangle PAD$ (הצלע AD בכחול) וב־$\triangle PCB$ (הצלע CB בירוק).
הזווית β שבקודקוד P משותפת לשני המשולשים. הזוויות שבקודקודים D ו־B הן זוויות היקפיות שנשענות על הקשת $\overset{\frown}{AC}$, הקרובה ל־P.



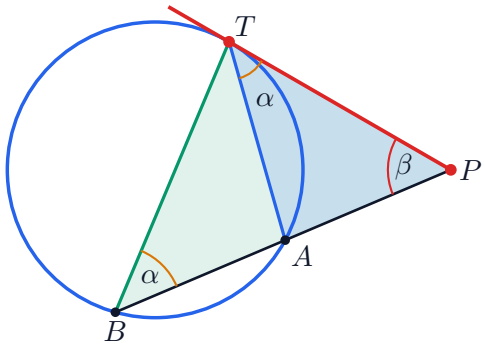
סרטוט 3: $\triangle PAD \sim \triangle PCB$.

	טענה	נימוק
1	$\angle PDA = \angle PBC$	אלה $\angle CDA$ ו־$\angle ABC$: זוויות היקפיות שנשענות על הקשת $\overset{\frown}{AC}$
2	$\triangle PAD \sim \triangle PCB$	ז.ז: גם הזווית P משותפת
3	$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$, ולכן $PA \cdot PB = PC \cdot PD$	יחס הצלעות המתאימות, וכפל בהצלבה

מש״ל ■

מקרה ג׳: חותך ומשיק

מהנקודה P יוצאים משיק PT וחותך PAB. נעביר את המיתרים TA ו־TB, ונתבונן ב־$\triangle PTA$ (בכחול) וב־$\triangle PBT$ (הגדול, שכולל אותו).
הזווית $\angle PTA$ היא זווית **בין משיק למיתר**. לכן היא שווה לזווית ההיקפית שנשענת על המיתר TA מצידו השני, כלומר ל־$\angle TBA$ (גם המשפט הזה מוכח במסמך ״זווית היקפית וזווית מרכזית״). כמו קודם, הזווית β שבקודקוד P משותפת.



סרטוט 4: $\triangle PTA \sim \triangle PBT$.

	טענה	נימוק
1	$\angle PTA = \angle PBT$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית שנשענת על המיתר מצידו השני
2	$\triangle PTA \sim \triangle PBT$	ז.ז: גם הזווית P משותפת
3	$\frac{PT}{PB} = \frac{PA}{PT}$, ולכן $PT^2 = PA \cdot PB$	יחס הצלעות המתאימות, וכפל בהצלבה

מש״ל ■

עצרו ובדקו

סובבו בדמיון את החותך PAB סביב P, כך שהוא מתקרב עוד ועוד למשיק PT. מה קורה לנקודות A ו־B?
הסבירו איך מקרה ג׳ ״יוצא״ ממקרה ב׳. (התשובה בסוף המסמך.)

ומה הערך של המכפלה?

הוכחנו שבשלושת המקרים המכפלה $PA\cdot PB$ זהה בכל הישרים דרך P (וכשיש משיק, היא שווה גם ל־PT^2). לכן מספיק לחשב אותה בישר אחד: הישר OP, שעובר דרך המרכז וחותך את המעגל בשני קצות הקוטר, E ו־F.

- אם P בתוך המעגל, אז $PE=R-d$ ו־$PF=R+d$, ולכן $PA\cdot PB=(R-d)(R+d)=R^2-d^2$.
- אם P מחוץ למעגל, אז $PE=d-R$ ו־$PF=d+R$, ולכן $PA\cdot PB=(d-R)(d+R)=d^2-R^2$.

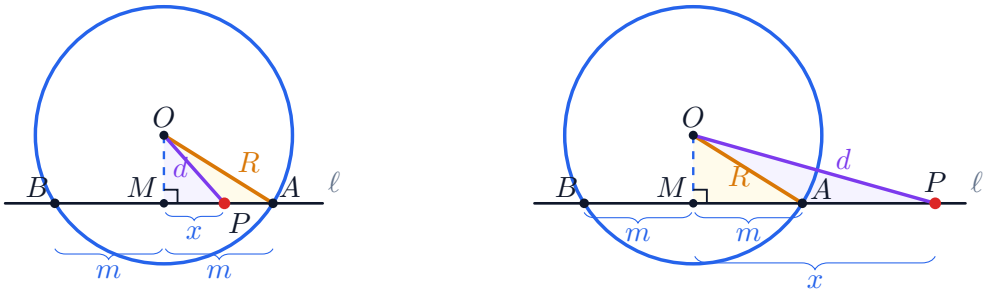
בסרטוט 1 אלה הקטרים האופקיים: מימין $13-5=8$ ו־$13+5=18$, ומשמאל $10-8=2$ ו־$10+8=18$. בשני המקרים $PA\cdot PB=|d^2-R^2|$, כפי שטען המשפט. (ואם $P=O$, כל מיתר דרך P הוא קוטר, והמכפלה היא $R\cdot R=R^2$.)

מש״ל ■

4 הוכחה 2: משפט פיתגורס – חישוב אחד לכל המקרים

הרעיון נוריד אנך מהמרכז אל הישר. האנך חוצה את המיתר, ושני שימושים במשפט פיתגורס נותנים ישירות את הערך של $PA\cdot PB$ — בלי זוויות היקפיות ובלי דמיון.

יהי ℓ ישר שעובר דרך P וחותך את המעגל בנקודות A ו־B. נוריד מ־O אנך ל־ℓ, ונסמן את עקב האנך ב־M. המשולש OAB שווה־שוקיים ($OA=OB=R$), ולכן הגובה OM הוא גם תיכון: M היא אמצע המיתר. נסמן $m=MA=MB$ ו־$x=PM$.



P בתוך המעגל — P מחוץ למעגל

סרטוט 5: M היא אמצע המיתר AB. המשולשים OMP ו־OMA ישרי־זווית ב־M.

שלב 1: המכפלה כהפרש של ריבועים. כש־P מחוץ למעגל (סרטוט 5, מימין), $PA=x-m$ ו־$PB=x+m$. כש־P בתוך המעגל (משמאל), $PA=m-x$ ו־$PB=m+x$. לפי נוסחת הכפל המקוצר, בשני המקרים

$$PA\cdot PB=\left|x^2-m^2\right|=\left|PM^2-MA^2\right|.$$

שלב 2: משפט פיתגורס, פעמיים.

	טענה	נימוק
(1)	$PM^2 = d^2 - OM^2$	משפט פיתגורס ב־$\triangle OMP$ (הזווית M ישרה)
(2)	$MA^2 = R^2 - OM^2$	משפט פיתגורס ב־$\triangle OMA$
(3)	$PM^2 - MA^2 = d^2 - R^2$	חיסור: OM^2 מתבטל
(4)	$PA \cdot PB = \lvert d^2 - R^2 \rvert$	הצבה בשלב 1

והמשיק? אם ℓ משיק למעגל בנקודה T, הוא ניצב לרדיוס OT (ראו "המשיק למעגל"). לכן עקב האנך הוא נקודת ההשקה T עצמה: $M = T$ ו־$OM = R$, וצעד 1 נותן מייד $PT^2 = d^2 - R^2$. **ומקרי קצה?** אם ℓ עובר דרך המרכז, אז $M = O$; אם ℓ ניצב ל־OP, אז $M = P$. במקרים האלה אחד המשולשים "מתנוון" לקטע, אבל צעדים 1 ו־2 נשארים נכונים, עם $OM = 0$ או עם $PM = 0$.

מש"ל ■

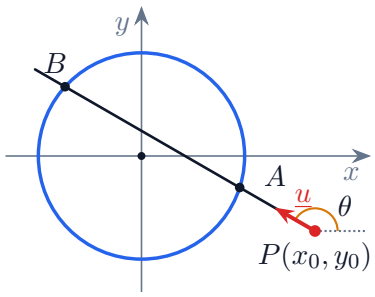
5 הוכחה 3 (להעמקה): מערכת צירים ונוסחאות ויאטה

הרעיון בהוכחה 2 נזקקנו לערך מוחלט, כי הסימן של $x^2 - m^2$ תלוי במקום של P. הפעם נמדוד מרחקים **עם סימן**: נציב את הישר דרך P, בהצגה פרמטרית, במשוואת המעגל. הפתרונות של המשוואה הריבועית שנקבל הם המרחקים עם סימן מ־P אל A ואל B, ואת המכפלה שלהם ייתנו נוסחאות ויאטה.

נשים את מרכז המעגל בראשית הצירים. המעגל הוא $x^2 + y^2 = R^2$, והנקודה היא $P(x_0, y_0)$, כך ש־$d^2 = x_0^2 + y_0^2$. ישר דרך P, שזווית הכיוון שלו היא θ, נכתוב כך:

$$(x, y) = (x_0 + t\cos\theta,\ y_0 + t\sin\theta).$$

הווקטור $\underline{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ הוא וקטור יחידה, ולכן הנקודה עם הפרמטר t נמצאת במרחק $\lvert t \rvert$ מ־P: בכיוון של $\underline{u}$ כש־$t > 0$, ובכיוון ההפוך כש־$t < 0$.



סרטוט 6: A ו־B הן הנקודות של הישר עם הפרמטרים t_1 ו־t_2.

	טענה	נימוק
(1)	$(x_0 + t\cos\theta)^2 + (y_0 + t\sin\theta)^2 = R^2$	הנקודה של הישר נמצאת על המעגל
(2)	$t^2 + 2(x_0\cos\theta + y_0\sin\theta)\,t + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0$	פתיחת סוגריים והעברת אגפים. המקדם של t^2 הוא $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
(3)	$t_1 t_2 = x_0^2 + y_0^2 - R^2 = d^2 - R^2$	נוסחאות ויאטה: מכפלת השורשים היא $\frac{c}{a}$, וכאן $a = 1$
(4)	$PA \cdot PB = \lvert t_1 \rvert \cdot \lvert t_2 \rvert = \lvert d^2 - R^2 \rvert$	המרחקים מ־P הם $\lvert t_1 \rvert$ ו־$\lvert t_2 \rvert$

מש"ל ■

מה מספר לנו הסימן?

- P **בתוך המעגל.** $t_1t_2<0$, כלומר לשורשים יש סימנים מנוגדים: A ו־B נמצאות משני צדיה של P. מסקנה: כשהאיבר החופשי שלילי, הדיסקרימיננטה חיובית, ולכן **כל** ישר שעובר דרך נקודה פנימית חותך את המעגל בשתי נקודות.
- P **על המעגל.** $t_1t_2=0$, ולכן אחד השורשים הוא $t=0$ — הנקודה P עצמה.
- P **מחוץ למעגל.** $t_1t_2>0$, ולכן A ו־B נמצאות באותו צד של P. הישר משיק בדיוק כשיש שורש כפול, ואז $PT^2=t_1^2=d^2-R^2$.

לכן נוח להגדיר את החזקה **עם סימן**, $p(P)=d^2-R^2$. בשפת הווקטורים: $\underline{PA}=t_1\underline{u}$ ו־$\underline{PB}=t_2\underline{u}$, ולכן $\underline{PA}\cdot\underline{PB}=t_1t_2=d^2-R^2$ לכל ישר דרך P, בלי ערך מוחלט (ראו "המכפלה הסקלרית").

6 שלוש הדרכים זו מול זו

	הוכחה 1: משולשים דומים	הוכחה 2: משפט פיתגורס	הוכחה 3: נוסחאות ויאטה
הרעיון	בכל מקרה — זוג משולשים דומים	האנך מהמרכז חוצה את המיתר	המרחקים הם שורשים של משוואה ריבועית
הכלים	זוויות היקפיות, זווית בין משיק למיתר, ז.ז	משפט פיתגורס ונוסחת הכפל המקוצר	הצגה פרמטרית של ישר ונוסחאות ויאטה
מקרים	שלושה מקרים נפרדים, והערך מחושב בסוף בעזרת הקוטר	חישוב אחד, והמשיק הוא המקרה $MA=0$	חישוב אחד, והסימן מגלה איפה P
היתרון	הדרך המוכרת מהכיתה. נותנת גם יחסים בין צלעות	מגיעה ישר אל d^2-R^2	מסבירה למה כדאי להגדיר חזקה **עם סימן**

7 מה עושים עם המשפט?

שימוש 1: החזקה במערכת צירים – בלי למצוא את המרכז

אם המעגל נתון בצורה המפותחת $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, החזקה של נקודה $P(x_0,y_0)$ היא פשוט מה שמתקבל כשמציבים את P באגף שמאל:

$$\boxed{p(P)=x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F}$$

למה? השלמה לריבוע נותנת $\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2}{4}-F$ (ראו "משוואת המעגל"). לכן המרכז הוא $O\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$, ו־$R^2=\frac{D^2+E^2}{4}-F$. נחשב:

$$\begin{aligned}d^2-R^2&=\left(x_0+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y_0+\frac{E}{2}\right)^2-\frac{D^2+E^2}{4}+F\\&=x_0^2+Dx_0+\frac{D^2}{4}+y_0^2+Ey_0+\frac{E^2}{4}-\frac{D^2+E^2}{4}+F=x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F.\end{aligned}$$

כשהחזקה חיובית, אורך המשיק מ־P הוא $\sqrt{p(P)}$, ואין צורך למצוא את המרכז ואת הרדיוס. (במסמך "המשיק למעגל" חישבנו את אותו אורך אחרת: מצאנו את d בנוסחת המרחק, והפעלנו את משפט פיתגורס.)

דוגמה מספרית

נתון המעגל $x^2+y^2-4x+6y-12=0$. (א) האם הנקודה $P(6,2)$ נמצאת מחוץ למעגל? אם כן, מה אורך המשיק ממנה? (ב) הראו שהנקודה $Q(1,-1)$ נמצאת בתוך המעגל. מיתר שעובר דרך Q מתחלק על ידה לשני קטעים, ואורך אחד מהם 4. מה אורך הקטע השני?

(א) $p(P)=36+4-24+12-12=16>0$, ולכן P מחוץ למעגל, ואורך המשיק הוא $\sqrt{16}=4$. בדיקה: המרכז הוא $(2,-3)$ והרדיוס 5, ואכן $d^2-R^2=(4^2+5^2)-25=16$.

(ב) $p(Q)=1+1-4-6-12=-20<0$, ולכן Q בתוך המעגל, ומכפלת שני הקטעים בכל מיתר שעובר דרכה היא 20. הקטע השני הוא $20\div 4=5$.

שימוש 2: תרגיל בסגנון בגרות

דוגמה מספרית

מהנקודה P שמחוץ למעגל יוצאים משיק PT וחותך PAB, כמו בסרטוט 4.

(א) הוכיחו ש־$\triangle PTA\sim\triangle PBT$.

(ב) נתון $PT=6$ ו־$AB=5$. מצאו את PA.

(ג) מצאו את היחס $TA:TB$, ואת היחס בין השטחים של שני המשולשים.

(א) כמו במקרה ג׳ של הוכחה 1: הזווית P משותפת, ו־$\angle PTA=\angle PBT$ (זווית בין משיק למיתר).

(ב) נסמן $PA=x$. אז $PB=x+5$, ומהדמיון שבסעיף (א) $\frac{PT}{PB}=\frac{PA}{PT}$, כלומר $PT^2=PA\cdot PB$:

$$x(x+5)=36 \quad\Longrightarrow\quad x^2+5x-36=0 \quad\Longrightarrow\quad (x+9)(x-4)=0.$$

אורך של קטע הוא חיובי, ולכן $PA=4$ (ו־$PB=9$).

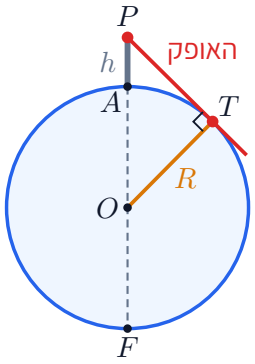
(ג) מהדמיון, $\frac{TA}{BT}=\frac{PT}{PB}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$, כלומר $TA:TB=2:3$. יחס השטחים הוא ריבוע יחס הדמיון: $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$. בדיקה בדרך אחרת: לשני המשולשים יש אותו גובה מ־T לישר PB, ולכן יחס השטחים הוא $\frac{PA}{PB}=\frac{4}{9}$.

שימוש 3: כמה רחוק האופק?

אתם עומדים על חוף הים, והעיניים שלכם בגובה h מעל פני המים. קו הראייה אל האופק **משיק** לכדור הארץ בנקודה T. נסמן את מרכז כדור הארץ ב־O ואת הרדיוס שלו ב־R (בערך 6371 ק״מ). העין P נמצאת במרחק $d=R+h$ מהמרכז, ולכן

$$PT^2=d^2-R^2=(R+h)^2-R^2=2Rh+h^2.$$

אותה תוצאה נותן משפט החותך והמשיק, עם החותך שעובר דרך המרכז: $PT^2=PA\cdot PF=h\,(2R+h)$.



סרטוט 7: קו הראייה משיק לכדור הארץ (לא בקנה מידה).

שני מספרים

כשהגובה h קטן בהרבה מ־R, אפשר להזניח את h^2, ונקבל $PT \approx \sqrt{2Rh}$.

- עיניים בגובה 2 מטרים, כלומר $h = 0.002$ ק״מ: $PT \approx \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0.002} = \sqrt{25.484}$, בערך 5 ק״מ. האופק קרוב יותר ממה שנדמה!
- מטוס בגובה 10 ק״מ: $PT = \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 10 + 10^2} = \sqrt{127{,}520}$, בערך 357 ק״מ.

כלל אצבע: $PT \approx 3.57\sqrt{h}$ ק״מ, כאשר h נמדד במטרים. מכאן גם נובע שכדי לראות פי 2 רחוק יותר, צריך לעלות לגובה גדול פי 4. בחישוב התעלמנו מהאוויר: הוא מכופף מעט את קרני האור, ולכן בפועל רואים קצת יותר רחוק.

שימוש 4 (להעמקה): הציר הרדיקלי

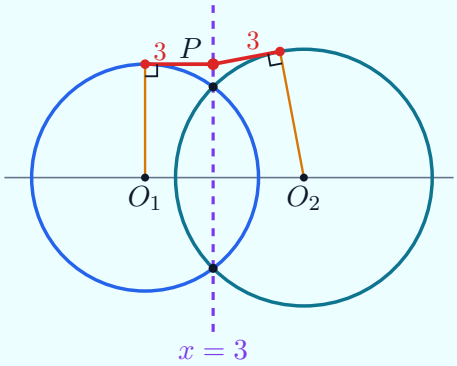
ניקח שני מעגלים בעלי מרכזים שונים, ונכתוב את המשוואות שלהם בצורה המפותחת, עם המקדמים D_1, E_1, F_1 ו־D_2, E_2, F_2. לפי שימוש 1, לנקודה (x, y) יש אותה חזקה ביחס לשני המעגלים בדיוק כאשר

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 &= x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 \\ \iff \quad (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) &= 0. \end{aligned}$$

זו משוואה של **ישר**, כי המקדמים של x ושל y אינם שניהם אפס (המרכזים שונים). הישר הזה נקרא **הציר הרדיקלי** של שני המעגלים, והוא ניצב לישר המרכזים: השיפועים שלהם הם $-\frac{D_1-D_2}{E_1-E_2}$ ו־$\frac{E_1-E_2}{D_1-D_2}$, ומכפלתם -1. (אם אחד ההפרשים מתאפס, אחד הישרים אופקי והשני אנכי.) ואם המעגלים נחתכים, לשתי נקודות החיתוך יש חזקה 0 ביחס לשניהם, ולכן הציר הרדיקלי הוא הישר של **המיתר המשותף**. בבחינת הבגרות ב־5 יח״ל בקיץ 2024 הופיעה שאלה על המקום הגאומטרי של הנקודות שמהן יוצאים לשני מעגלים קטעי משיקים שווים. הנקודות האלה נמצאות על הציר הרדיקלי, כי ריבוע קטע המשיק הוא החזקה.

דוגמה מספרית

ניקח את המעגלים $x^2 + y^2 = 25$ ו־$x^2 + y^2 - 14x + 17 = 0$. החיסור נותן $14x - 42 = 0$, ולכן הציר הרדיקלי הוא הישר $x = 3$. הוא ניצב לישר המרכזים (ציר ה־x), ועובר דרך נקודות החיתוך $(3, \pm 4)$. נבחר על הציר את הנקודה $P(3, 5)$. החזקה שלה ביחס למעגל הראשון היא $9 + 25 - 25 = 9$, וביחס לשני $9 + 25 - 42 + 17 = 9$. לכן קטעי המשיקים מ־P לשני המעגלים שווים, ואורך כל אחד מהם $\sqrt{9} = 3$. גם הישר $x = 3$ עצמו מראה את זה: הוא חותך את שני המעגלים באותן שתי נקודות, $(3, 4)$ ו־$(3, -4)$. המרחקים שלהן מ־P הם 1 ו־9, ומכפלתם שווה שוב לחזקה של P.



סרטוט 8: הציר הרדיקלי $x = 3$.

⚠ טעות נפוצה

- **"החלק החיצוני כפול המיתר".** בחותך PAB כופלים את PA ב־PB, כלומר במרחק מ־P עד הנקודה **הרחוקה** — ולא ב־AB. אם $PA=4$ ו־$AB=5$, אז $PA\cdot PB=4\cdot 9=36$, ולא $4\cdot 5=20$. שני הגורמים נמדדים מ־P.
- **קטעים של אותו מיתר.** במשפט המיתרים הנחתכים כל אגף הוא מכפלה של שני הקטעים של **אותו** מיתר: $PA\cdot PB=PC\cdot PD$. השוויון "$PA\cdot PC=PB\cdot PD$" שגוי.
- **המשיק בריבוע.** $PT^2=PA\cdot PB$, ולא $PT=PA\cdot PB$. אם $PA\cdot PB=36$, אז $PT=6$.
- **פתרון שלילי.** למשוואה $x(x+5)=36$ יש גם הפתרון $x=-9$, אבל אורך של קטע הוא מספר חיובי.

🕒 הידעתם?

שניים מהמשפטים מופיעים כבר ב"יסודות" של אוקלידס (בערך 300 לפני הספירה), בספר השלישי: טענה 35 היא משפט המיתרים הנחתכים, וטענה 36 היא משפט החותך והמשיק. משפט שני החותכים נובע מייד מטענה 36, כי שתי המכפלות שוות לריבוע של אותו קטע משיק. אוקלידס ניסח אותם בשפה של שטחים: המלבן שצלעותיו הן שני הקטעים של מיתר אחד שווה בשטחו למלבן שצלעותיו הן שני הקטעים של המיתר השני — בדיוק המלבנים מהאינטואיציה. ומעניין לדעת שהוא לא הוכיח אותם בעזרת משולשים דומים (על דמיון הוא כותב רק בספר השישי), אלא בעזרת אנך מהמרכז ומשפט פיתגורס — כמו בהוכחה 2.

את המונח "החזקה של נקודה" (בגרמנית Potenz) הכניס המתמטיקאי השווייצרי יעקב שטיינר. ב־1826 הוא פרסם עבודה ארוכה בכרך הראשון של כתב עת מתמטי גרמני חדש, ובה התיאור השיטתי הראשון של המושג. שטיינר למד לקרוא ולכתוב רק בגיל 14.

המתמטיקאי הצרפתי מישל שאל (Chasles) כינה במאה ה־19 את הישר משימוש 4 בשם axe radical — "ציר רדיקלי".

8 בדקו את עצמכם

✓ שש שאלות קצרות

1. שני מיתרים, AB ו־CD, נחתכים בנקודה P. אורכי הקטעים הם $PA=3$ ו־$PB=8$, ואורך הקטע PC הוא 4. מצאו את PD.
2. מהנקודה P יוצאים שני חותכים, PAB ו־PCD. נתון ש־$PA=5$ ו־$AB=7$, ושאורך הקטע PC הוא 6. מצאו את CD.
3. מהנקודה P יוצאים משיק PT, שאורכו 10, וחותך PAB, שבו $AB=21$. מצאו את PA.
4. הרדיוס של מעגל הוא 5, והנקודה P נמצאת במרחק 3 מהמרכז. מה אורך המיתר **הקצר ביותר** שעובר דרך P? (רמז: הסימונים של הוכחה 2.)
5. מצאו את אורך המשיק מהנקודה $(8,4)$ אל המעגל $x^2+y^2-6x+2y-15=0$.
6. השאלה מתיבת "עצרו ובדקו": מה קורה לנקודות A ו־B כשהחותך מתקרב למשיק, ואיך מקרה ג׳ "יוצא" ממקרה ב׳?

תשובות

1. לפי משפט המיתרים הנחתכים $3 \cdot 8 = 4 \cdot PD$, ולכן $PD = 6$.
2. $PA \cdot PB = 5 \cdot 12 = 60$, ולכן $PD = 60 \div 6 = 10$, ו־$CD = PD - PC = 4$.
3. נסמן $PA = x$. אז $x(x+21) = 100$, כלומר $x^2 + 21x - 100 = 0$, או $(x+25)(x-4) = 0$. לכן $PA = 4$.
4. בסימונים של הוכחה 2, אורך המיתר הוא $2m = 2\sqrt{R^2 - OM^2}$, והוא קצר ביותר כש־OM גדול ביותר. במשולש ישר־הזווית OMP הניצב OM אינו ארוך מהיתר $OP = 3$, ושווה לו רק כש־$M = P$. לכן המיתר הקצר ביותר ניצב ל־OP בנקודה P, ואורכו $2\sqrt{25 - 9} = 8$. בדיקה: P היא אמצע המיתר, ו־$4 \cdot 4 = 16 = 5^2 - 3^2$.
5. $p = 64 + 16 - 48 + 8 - 15 = 25$, ולכן אורך המשיק הוא $\sqrt{25} = 5$. בדיקה: המרכז הוא $(3, -1)$ והרדיוס 5, ו־$d^2 = 5^2 + 5^2 = 50$.
6. הנקודות A ו־B מתקרבות זו לזו, ושתיהן מתקרבות לנקודת ההשקה T. לאורך כל הסיבוב המכפלה $PA \cdot PB$ נשארת אותו מספר (מקרה ב׳), וכשהחותך "נעשה" משיק היא הופכת ל־$PT \cdot PT = PT^2$. זה טיעון של מעבר לגבול ולא הוכחה מלאה — את ההוכחה המלאה נותן מקרה ג׳.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את המסמך בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנו קטעים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.

אינסוף
מתמטיקה