# משפטי פרמה, רול ולגרנז׳

## למה בנקודת קיצון הנגזרת מתאפסת, למה נגזרת חיובית פירושה פונקציה עולה — ולמה הכיוון ההפוך לא תמיד נכון

כ־20 דקות קריאה | 5 הוכחות | משפטי רול ולגרנז׳: להעמקה | חשבון דיפרנציאלי | 4–5 יח״ל

### מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: כדור שעוצר לרגע בשיא, ומד מהירות שמראה בדיוק את המהירות הממוצעת.
- משפט פרמה: בנקודת קיצון פנימית $f'=0$ (הוכחה אחת, בשני ניסוחים).
- משפט רול ומשפט לגרנז׳ (משפט הערך הממוצע), עם הוכחות מלאות.
- המסקנות: $f'>0$ פירושו פונקציה עולה (בשתי הוכחות), ו־$f'=0$ פירושו פונקציה קבועה.
- אי־שוויונות, דוגמאות, טעויות נפוצות ושאלות לבדיקה עצמית.

### מה כדאי לדעת קודם

- הגדרת הנגזרת כגבול של מנת ההפרשים (ראו את המסמך ״הנגזרת וכללי הגזירה״).
- שיפוע של ישר ומשוואת ישר.
- רציפות, ברמה אינטואיטיבית: גרף שאין בו ״קפיצות״.
- לסעיף האי־שוויונות: הנגזרות של $\sin x$ ושל $e^x$.

## 1 האינטואיציה: כדור, מכונית ושתי מצלמות

**האינטואיציה**

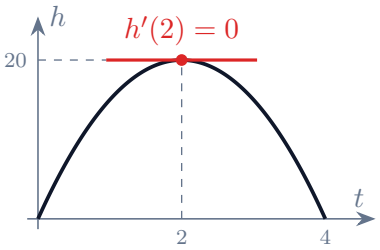
זרקו כדור ישר למעלה. בדרך למעלה הוא מאט, בדרך למטה הוא מאיץ — ובנקודה הגבוהה ביותר הוא **עומד במקום** לרגע אחד. המהירות היא הנגזרת של הגובה לפי הזמן, ולכן בשיא הנגזרת מתאפסת, והמשיק לגרף **אופקי**. זה משפט פרמה.

מכונית נסעה 90 ק״מ במשך שעה אחת בדיוק, כלומר במהירות ממוצעת של 90 קמ״ש. מד המהירות הראה בדרך מספרים שונים: 0 ברמזור, 110 בכביש מהיר. האם היה רגע שבו הוא הראה **בדיוק** 90? כן. אילו היה מראה כל הזמן פחות מ־90, המכונית הייתה עוברת פחות מ־90 ק״מ. אילו היה מראה כל הזמן יותר מ־90, היא הייתה עוברת יותר. לכן היו רגעים שבהם הוא הראה לפחות 90, והיו רגעים שבהם הראה לכל היותר 90. המחוג לא קופץ ממספר למספר, ולכן ברגע כלשהו הוא הצביע בדיוק על 90. זה משפט לגרנז׳: יש רגע שבו המהירות **הרגעית** שווה למהירות **הממוצעת**.

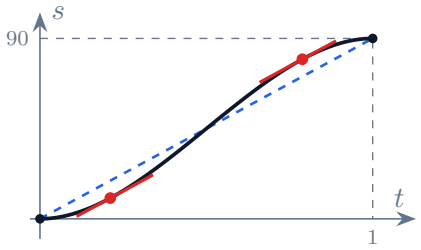
בגרף של הדרך כתלות בזמן, המהירות הממוצעת היא השיפוע של המיתר בין נקודת ההתחלה לנקודת הסיום, והמהירות הרגעית היא השיפוע של המשיק. לכן בשפת הגרפים משפט לגרנז׳ אומר: יש נקודה שבה המשיק **מקביל** למיתר. (ההוכחה בסעיף 5 לא תצטרך אפילו את ההנחה שהמחוג אינו קופץ.)

בחקירת פונקציות ב־4 וב־5 יח״ל משתמשים כל הזמן בתוצאות של המשפטים האלה: בנקודת קיצון $f'=0$, והסימן של $f'$ קובע איפה הפונקציה עולה ואיפה היא יורדת. המשפטים עצמם, בשמם, אינם חלק מתוכנית הלימודים, ולכן הם מסומנים כאן ״להעמקה״.

© אור בן שטרית · אינסוף




הכדור: בשיא הגובה המהירות היא 0




המכונית: בשני רגעים המהירות בדיוק 90

סרטוט 1: מימין: הגובה $h$ של הכדור (במטרים) אחרי $t$ שניות; בשיא המשיק אופקי. משמאל: הדרך $s$ שעברה המכונית (בק״מ) אחרי $t$ שעות; שני המשיקים (באדום) מקבילים למיתר (בכחול).

### למה אכיפה של מהירות ממוצעת הוגנת?

בכבישים מסוימים מצלמים כל מכונית בשתי נקודות שהמרחק ביניהן ידוע, למשל 12 ק״מ. מכונית שעברה את הקטע ב־6 דקות (עשירית שעה) נסעה במהירות ממוצעת של $12 \cdot 10 = 120$ קמ״ש. אף מצלמה לא צילמה אותה נוסעת 120, אבל לפי משפט לגרנז׳ היה רגע שבו מד המהירות הראה בדיוק 120. לכן אם המהירות המותרת היא 110 קמ״ש, הנהג עבר אותה בוודאות — אף שאיש לא ראה את הרגע הזה.

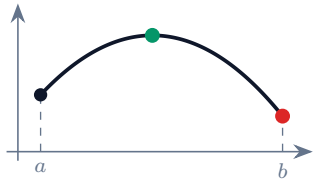
## 2 נקודת המוצא: מקסימום ומינימום בקטע סגור

ל־$f$ יש **מקסימום מקומי** בנקודה $c$ אם $f(x) \le f(c)$ לכל $x$ קרוב מספיק ל־$c$, כלומר בקטע קטן כלשהו סביב $c$. **מינימום מקומי** — אותו דבר, עם $f(x) \ge f(c)$. נקודה כזאת נקראת **נקודת קיצון**. **קטע סגור** $a \le x \le b$ כולל את קצותיו, ו**קטע פתוח** $a < x < b$ אינו כולל אותם. נקודה של קטע שאינה אחד מקצותיו היא **נקודה פנימית**.

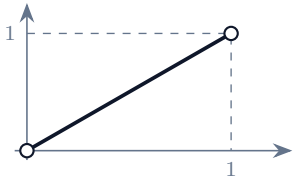
### עובדה שנקבל בלי הוכחה

פונקציה $f$ שרציפה בקטע **סגור** $a \le x \le b$ מקבלת בו ערך גדול ביותר (מקסימום) וערך קטן ביותר (מינימום). כלומר, יש בקטע נקודה $p$ שבה $f(p) \ge f(x)$ לכל $x$ בקטע, ויש בו נקודה $q$ שבה $f(q) \le f(x)$ לכל $x$ בקטע.

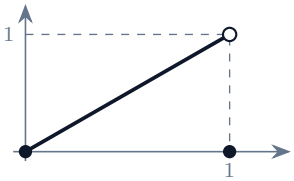
העובדה הזאת נראית מובנת מאליה, אבל ההוכחה שלה נשענת על תכונה עמוקה של המספרים הממשיים (בציר המספרים אין ״חורים״), והיא נלמדת באוניברסיטה. שימו לב: המקסימום או המינימום יכולים להתקבל גם בקצה הקטע (בסרטוט 2 מימין, המינימום בקצה $b$). ושני התנאים — קטע סגור ורציפות — הכרחיים. באמצע הסרטוט: ל־$f(x) = x$ בקטע הפתוח $0 < x < 1$ אין ערך גדול ביותר, כי הערכים מתקרבים ל־1 אבל אף פעם אינם מגיעים אליו. משמאל: אותו קו בקטע הסגור $0 \le x \le 1$, אבל עם **קפיצה** בקצה, $f(1) = 0$ — ושוב אין ערך גדול ביותר.




רציפה בקטע סגור




קטע פתוח: אין מקסימום




קפיצה: אין מקסימום

סרטוט 2: מימין: מקסימום (בירוק) ומינימום (באדום) בקטע סגור. באמצע ומשמאל: בלי קטע סגור או בלי רציפות — אין מקסימום.

# 3 משפט פרמה: בנקודת קיצון פנימית המשיק אופקי

## משפט פרמה

אם ל־$f$ יש קיצון (מקסימום או מינימום מקומי) בנקודה **פנימית** $c$ — נקודה שסביבה $f$ מוגדרת משני הצדדים — ו־$f$ **גזירה** ב־$c$, אז

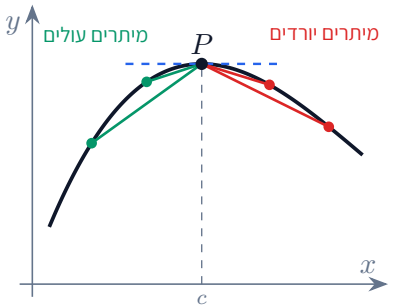
$$\boxed{f'(c)=0}$$

**במילים:** בנקודת קיצון פנימית שיש בה משיק, המשיק אופקי.

נוכיח את המשפט למקסימום (במינימום כל אי־השוויונות מתהפכים). נציג את ההוכחה בשני ניסוחים, ובשניהם נשתמש במנת ההפרשים $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$, כאשר $h\neq 0$. זה השיפוע של המיתר מהנקודה $P\big(c,f(c)\big)$ אל נקודה אחרת על הגרף. לפי ההגדרה, $f'(c)$ הוא הגבול של המנה הזאת כש־$h\to 0$, **מימין ומשמאל**.

## ניסוח 1: המיתרים משני הצדדים

**הרעיון** הנקודה $P$ היא נקודת השיא. לכן מיתר מ־$P$ לנקודה שמימינה **יורד** (או אופקי), ומיתר מנקודה שמשמאל ל־$P$ **עולה** אל $P$ (או אופקי). המשיק הוא הגבול של שני סוגי המיתרים, ולכן השיפוע שלו אינו יכול להיות חיובי, וגם אינו יכול להיות שלילי.




סרטוט 3: מיתרים מנקודת המקסימום $P$.

| | טענה | נימוק |
|---|---|---|
| 1 | $f(c+h)-f(c)\le 0$ | $f(c)$ הוא מקסימום מקומי, ו־$h$ קטן (חיובי או שלילי) |
| 2 | $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\le 0$ כאשר $h>0$ | מונה שאינו חיובי, מכנה חיובי |
| 3 | $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\ge 0$ כאשר $h<0$ | מונה שאינו חיובי, מכנה שלילי |
| 4 | $f'(c)\le 0$ וגם $f'(c)\ge 0$ | הגבול מימין של המנות מצעד 2, והגבול משמאל של המנות מצעד 3 |
| 5 | $f'(c)=0$ | מספר שאינו חיובי ואינו שלילי |

**מש״ל**

**למה מצעד 2 נובע ש־$f'(c)\le 0$?** אילו הגבול היה מספר חיובי, המנות היו מתקרבות אליו, ולכן כש־$h$ קטן מספיק הן היו חיוביות בעצמן — בסתירה לצעד 2. (זה הרעיון של ניסוח 2.) והעובדה ש־$f$ גזירה ב־$c$ מבטיחה שהגבול מימין והגבול משמאל קיימים, ושניהם שווים לאותו מספר — $f'(c)$.

## ניסוח 2: בדרך השלילה

**הרעיון** נניח בשלילה שהמשיק ב־$P$ אינו אופקי, למשל עולה: $f'(c) > 0$. נראה שאז ממש מימין ל־$c$ הגרף נמצא מעל $f(c)$, ולכן $f(c)$ אינו מקסימום.

| | טענה | נימוק |
|---|---|---|
| 1 | $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} > 0$ לכל $h \neq 0$ קטן מספיק | המנות שואפות ל־$f'(c) > 0$, ולכן כשהן קרובות אליו הן חיוביות בעצמן |
| 2 | $f(c+h) > f(c)$ לכל $h > 0$ קטן מספיק — סתירה | כפל של צעד 1 ב־$h > 0$: ממש מימין ל־$c$ יש ערכים גדולים מ־$f(c)$ |
| 3 | אם $f'(c) < 0$, אז $f(c+h) > f(c)$ לכל $h < 0$ קטן מספיק — שוב סתירה | עכשיו המנות שליליות, וכופלים אותן ב־$h < 0$ |
| 4 | $f'(c) = 0$ | גם $f'(c) > 0$ וגם $f'(c) < 0$ הובילו לסתירה |

מש״ל ■

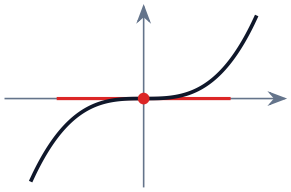
### שני הניסוחים, ומה הרווחנו מהשני

הנימוק של צעד 4 בניסוח 1 הוא בדיוק הרעיון של ניסוח 2, וההבדל הוא רק בכיוון. ניסוח 1 עובר מהסימן של המנות אל הסימן של הנגזרת, ומראה ש־$f'(c)$ אינו חיובי ואינו שלילי. ניסוח 2 עובר מהסימן של הנגזרת אל הסימן של המנות, ומשם אל הערכים של $f$ עצמה. לכן הוא נותן יותר: אם $f'(c) > 0$, אז ממש מימין ל־$c$ כל הערכים של $f$ גדולים מ־$f(c)$, וממש משמאל ל־$c$ כולם קטנים ממנו (כופלים את המנות החיוביות ב־$h < 0$). אם $f'(c) < 0$ — להפך. נשתמש בזה בסעיף 6. (זה עדיין לא אומר ש־$f$ **עולה** ליד $c$.)

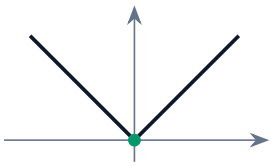
### עצרו ובדקו

באיזה מקום בכל אחד מהניסוחים השתמשנו בכך ש־$c$ היא נקודה **פנימית**? בדקו את תשובתכם על $f(x) = x$ בקטע $0 \le x \le 1$: היא מקבלת מקסימום ב־$x = 1$, אבל השיפוע שלה שם הוא 1.

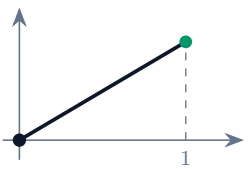
## שלוש אזהרות



$y = x^3$: משיק אופקי בלי קיצון



$y = |x|$: קיצון בלי משיק




$y = x$: מקסימום בקצה

סרטוט 4: שלוש פונקציות שמראות מה המשפט **אינו** אומר.

**ההפך אינו נכון:** לגרף של $x^3$ יש משיק אופקי ב־0, אבל אין שם קיצון (מימין ל־0 הערכים חיוביים, ומשמאל שליליים). נקודה שבה $f' = 0$ היא רק **מועמדת** לקיצון. **קיצון בלי נגזרת:** הפונקציה $|x|$ מקבלת מינימום ב־0, ואין לה שם

נגזרת. **קיצון בקצה:** הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $0\le x\le 1$ מקבלת מקסימום בקצה $x=1$, והשיפוע שם הוא 1. לכן את הערך הגדול ביותר או הקטן ביותר של פונקציה בקטע מחפשים בשלושה סוגים של נקודות: נקודות פנימיות שבהן $f'=0$, נקודות פנימיות שבהן $f'$ לא קיימת, וקצות הקטע.

## 4 משפט רול: יוצאים וחוזרים לאותו גובה

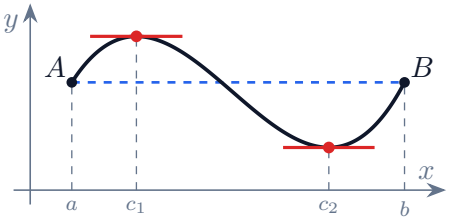
### משפט רול

תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $a\le x\le b$ וגזירה בקטע הפתוח $a<x<b$. אם $f(a)=f(b)$, אז יש לפחות נקודה אחת $c$ בין $a$ ל־$b$ (כלומר $a<c<b$) שבה

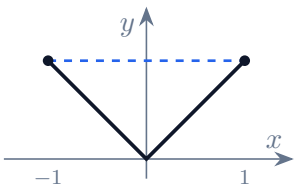
$$\boxed{f'(c)=0}$$

**במילים:** גרף חלק שמתחיל ומסתיים באותו גובה ״מתיישר״ לפחות פעם אחת בדרך — יש בו משיק אופקי.

**הרעיון** גרף שחוזר לגובה שבו התחיל חייב להגיע איפשהו בדרך לשיא או לשפל. אם זה קורה בתוך הקטע, משפט פרמה אומר שהמשיק שם אופקי.




$f(a)=f(b)$: שני משיקים אופקיים




$y=|x|$: אין משיק אופקי

סרטוט 5: מימין: הקו המקווקו מחבר שתי נקודות באותו גובה, ויש שתי נקודות עם משיק אופקי. משמאל: ב־$|x|$ תנאי הגזירות אינו מתקיים.

| טענה | נימוק |
|---|---|
| (1) ל־$f$ יש בקטע ערך גדול ביותר $M$ וערך קטן ביותר $m$ | $f$ רציפה בקטע סגור (סעיף 2) |
| (2) אם $M=m$, אז $f$ קבועה, ו־$f'(x)=0$ לכל $a<x<b$ | כל נקודה $c$ מתאימה |
| (3) אם $M>m$, אז לפחות אחד מהם שונה מ־$f(a)$ | שניהם לא יכולים להיות שווים ל־$f(a)$ |
| (4) הערך הזה מתקבל בנקודה $c$ שבה $a<c<b$ | בקצוות הערך הוא $f(a)=f(b)$ |
| (5) $f'(c)=0$ | משפט פרמה: ב־$c$ יש קיצון, $c$ פנימית ו־$f$ גזירה בה |

**מש״ל**

**למה צריך את כל התנאים?** הפונקציה $|x|$ בקטע $-1\le x\le 1$ רציפה ושווה ל־1 בשני הקצוות, אבל השיפוע שלה הוא $-1$ או $1$, ואף פעם לא 0: ב־$x=0$ היא אינה גזירה. גם לפונקציה ה״קופצת״ מסרטוט 2 יש אותו ערך בשני

הקצוות, והיא גזירה בקטע הפתוח, אבל השיפוע שלה הוא תמיד 1: היא אינה רציפה ב־$x = 1$. ועוד דבר: הנקודה $c$ לא חייבת להיות יחידה. בסרטוט 5 מימין יש שתי נקודות כאלה, $c_1$ ו־$c_2$.

## 5 משפט לגרנז׳: המשיק שמקביל למיתר

### ⬟ משפט לגרנז׳ (משפט הערך הממוצע)

תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $a \le x \le b$ וגזירה בקטע הפתוח $a < x < b$. אז יש לפחות נקודה אחת $c$ בין $a$ ל־$b$ שבה

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

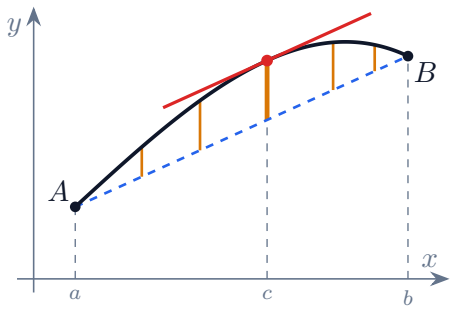
ובצורה שנוחה לשימוש: $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

**במילים:** יש נקודה שבה המשיק **מקביל** למיתר שמחבר את $A\big(a, f(a)\big)$ ל־$B\big(b, f(b)\big)$. ובשפת התנועה: יש רגע שבו המהירות הרגעית שווה למהירות הממוצעת.

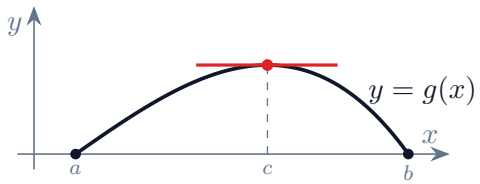
**הרעיון** משפט רול הוא המקרה הפרטי $f(a) = f(b)$, שבו המיתר אופקי. לכן ״ניישר״ את המיתר: נחסיר מ־$f$ את הישר של המיתר. מה שנשאר הוא הפער האנכי בין הגרף למיתר — פונקציה שמתאפסת בשני הקצוות, ועליה נפעיל את משפט רול.

נסמן ב־$m$ את השיפוע של המיתר, וב־$\ell$ את הישר $AB$ (הישר שעובר דרך $A$ בשיפוע $m$). פונקציית העזר $g$ היא הפער בין הגרף לישר:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad \ell(x) = f(a) + m\,(x - a), \qquad g(x) = f(x) - \ell(x).$$




הגרף, המיתר והמשיק




הפער $g$: מתאפס בקצוות

סרטוט 6: מימין: הקטעים הכתומים הם הפער $g(x)$ בין הגרף למיתר. הפער הגדול ביותר הוא ב־$c$, ושם המשיק (באדום) מקביל למיתר. משמאל: הגרף של $g$ עצמה.

| | טענה | נימוק |
|---|---|---|
| 1 | $g(a)=0$ וגם $g(b)=f(b)-f(a)-m\,(b-a)=0$ | הצבה, והגדרת השיפוע $m$ |
| 2 | $g$ רציפה בקטע הסגור וגזירה בקטע הפתוח | $f$ כזאת, ו־$\ell$ היא ישר |
| 3 | יש $c$ שבה $a<c<b$ ו־$g'(c)=0$ | משפט רול על $g$ |
| 4 | $g'(x)=f'(x)-m$ | הנגזרת של הישר $\ell$ היא השיפוע שלו |
| 5 | $f'(c)=m=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ | מצעדים 3 ו־4 נובע ש־$f'(c)-m=0$ |

מש״ל ■

### אותה הוכחה בתמונה: מזיזים את המיתר

דמיינו שמזיזים את המיתר $AB$ במקביל לעצמו (בסרטוט 6 — כלפי מעלה), עד הרגע האחרון שבו הוא עוד נוגע בגרף. נקודת המגע האחרונה היא הנקודה של הגרף **הרחוקה ביותר** מהמיתר, ושם הישר המוזז משיק לגרף — והוא מקביל למיתר. כדאי לומר ביושר: זאת אותה הוכחה, ולא הוכחה חדשה. לפי נוסחת המרחק של נקודה מישר, המרחק של הנקודה $\big(x,f(x)\big)$ מהמיתר הוא $|g(x)|$ חלקי המספר הקבוע $\sqrt{1+m^2}$. לכן הנקודה הרחוקה ביותר היא נקודת קיצון של $g$ — בדיוק הנקודה שההוכחה של משפט רול מחפשת.

## 6 המסקנות: מה הנגזרת מספרת על הפונקציה

עד עכשיו עברנו מהפונקציה אל הנגזרת. בחקירת פונקציות צריך את הכיוון ההפוך: מה אומר הסימן של $f'$ על $f$? משפט לגרנז׳ הוא הגשר: את השינוי בערך הפונקציה בין שתי נקודות קובעת הנגזרת בנקודה אחת שביניהן.

### ⬟ נגזרת, עלייה וירידה

תהי $f$ רציפה בקטע כלשהו (סגור, פתוח, חצי סגור, קרן או כל הישר), וגזירה בכל נקודה פנימית שלו.

- אם $f'(x)=0$ בכל נקודה פנימית, אז $f$ **קבועה** בקטע.
- אם $f'(x)>0$ בכל נקודה פנימית, אז $f$ **עולה** בקטע: לכל $x_1<x_2$ בקטע מתקיים $f(x_1)<f(x_2)$.
- באותו אופן: אם $f'(x)<0$, אז $f$ **יורדת**; ואם $f'(x)\le 0$, אז $f$ **לא יורדת**, כלומר $f(x_1)\le f(x_2)$ לכל $x_1<x_2$.

### הוכחה 1: בעזרת משפט לגרנז׳

ניקח שתי נקודות $x_1<x_2$ בקטע. הפונקציה רציפה בקטע הסגור שביניהן וגזירה בתוכו, ולכן לפי משפט לגרנז׳ יש נקודה $c$ בין $x_1$ ל־$x_2$ שבה $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)$. הנקודה $c$ היא נקודה פנימית של הקטע המקורי,

והגורם $x_2 - x_1$ חיובי. לכן הסימן של $f(x_2) - f(x_1)$ הוא הסימן של $f'(c)$: אפס אם $f' = 0$, חיובי אם $f' > 0$, שלילי אם $f' < 0$, ואי־שלילי אם $f' \geq 0$.

מש״ל ■

> **מסקנה: שתי פונקציות קדומות נבדלות בקבוע**
>
> אם לשתי פונקציות $F$ ו־$G$ יש אותה נגזרת בכל נקודה של קטע, אז $(F-G)' = 0$ בקטע, ולכן ההפרש $F - G$ קבוע, כלומר $F(x) = G(x) + C$. זו הסיבה לקבוע $C$ שמופיעים לפונקציה קדומה. במסמך ״האינטגרל המסוים״ בסדרה, בהוכחה של המשפט היסודי, קיבלנו בלי הוכחה שפונקציה שהנגזרת שלה אפס בקטע היא קבועה — עכשיו זה מוכח. משתמשים בעובדה הזאת גם במסמך ״המספר $e$ והלוגריתם הטבעי״.

**למה ״בקטע״?** הפונקציה $f(x) = \frac{|x|}{x}$ מוגדרת לכל $x \neq 0$, והנגזרת שלה היא 0 בכל נקודה שבה היא מוגדרת. ובכל זאת היא אינה קבועה: היא שווה ל־1 כש־$x > 0$, ול־$(-1)$ כש־$x < 0$. תחום ההגדרה שלה אינו קטע — יש בו ״חור״ ב־0 — ואי אפשר להפעיל את משפט לגרנז׳ על שתי נקודות משני צדי החור.

## הוכחה 2: פונקציה עולה – בלי משפט לגרנז׳

**הרעיון** נניח ש־$f$ ״לא עלתה״ בין שתי נקודות, ונחפש את המקסימום שלה ביניהן. נראה שאין לו איפה להיות.

תהי $f$ גזירה בקטע פתוח, ו־$f' > 0$ בכל נקודה שלו. נניח בשלילה שיש בקטע שתי נקודות $x_1 < x_2$ שבהן $f(x_1) \geq f(x_2)$. פונקציה גזירה היא רציפה (ראו את המסמך ״הנגזרת וכללי הגזירה״), ולכן לפי סעיף 2 יש ל־$f$ מקסימום בקטע הסגור $x_1 \leq x \leq x_2$, בנקודה $p$ כלשהי. אבל:

- $p$ אינה בין $x_1$ ל־$x_2$: אחרת, לפי משפט פרמה, $f'(p) = 0$.
- $p$ אינה $x_1$ ואינה $x_2$: כיוון ש־$f'(x_1) > 0$, ממש מימין ל־$x_1$ יש ערכים גדולים מ־$f(x_1)$ (לפי ניסוח 2 בהוכחה של משפט פרמה), ולכן גדולים גם מ־$f(x_2)$.

למקסימום אין איפה להיות — סתירה. לכן $f(x_1) < f(x_2)$. ההוכחה הזאת משתמשת באותם כלים כמו משפט רול, אבל אינה זקוקה לפונקציית העזר ולמשפט לגרנז׳.

מש״ל ■

**ההפך אינו נכון.** לפונקציה עולה יכולה להיות נגזרת 0 בנקודה: הפונקציה $f(x) = x^3$ עולה בכל הישר, אבל $f'(0) = 0$. היא עולה כי $f'(x) = 3x^2 > 0$ בנקודות הפנימיות של הקרן $x \leq 0$ ושל הקרן $x \geq 0$, ולכן לפי המשפט היא עולה בכל אחת מהקרניים — וגם בשתיהן יחד, כי $f(x_1) < f(0) < f(x_2)$ כש־$x_1 < 0 < x_2$. מה שכן נכון: אם $f$ עולה וגזירה, אז $f' \geq 0$, כי כל מנות ההפרשים חיוביות, והגבול שלהן אינו יכול להיות שלילי.

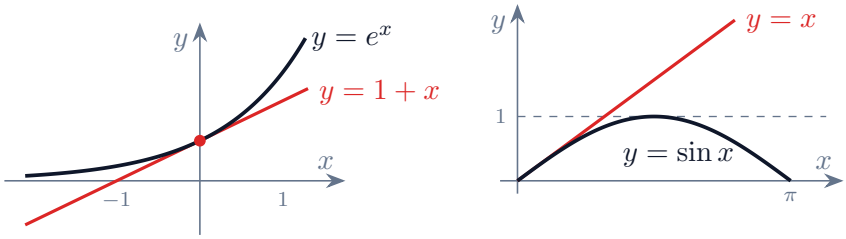
## מבחן הסימנים לנקודות קיצון

בחקירת פונקציה בודקים את הסימן של $f'$ משני הצדדים של נקודה $c$ שחשודה כנקודת קיצון. נניח ש־$f$ רציפה ב־$c$, ש־$f' > 0$ בקטע קטן משמאל ל־$c$, וש־$f' < 0$ בקטע קטן מימין לה. לפי המשפט, $f$ עולה בקטע השמאלי **כולל** $c$, ויורדת בקטע הימני כולל $c$. לכן $f(x) < f(c)$ לכל $x \neq c$ בשני הקטעים, כלומר ב־$c$ יש **מקסימום** מקומי. כשהסימנים הפוכים יש מינימום. כשהסימן לא מתחלף, $f$ עולה (או יורדת) ״דרך״ $c$, ואין שם קיצון. שימו לב שלא הנחנו ש־$f$ גזירה ב־$c$: המבחן עובד גם בנקודת חוד, כמו המינימום של $|x|$ ב־0.

### אי־שוויונות

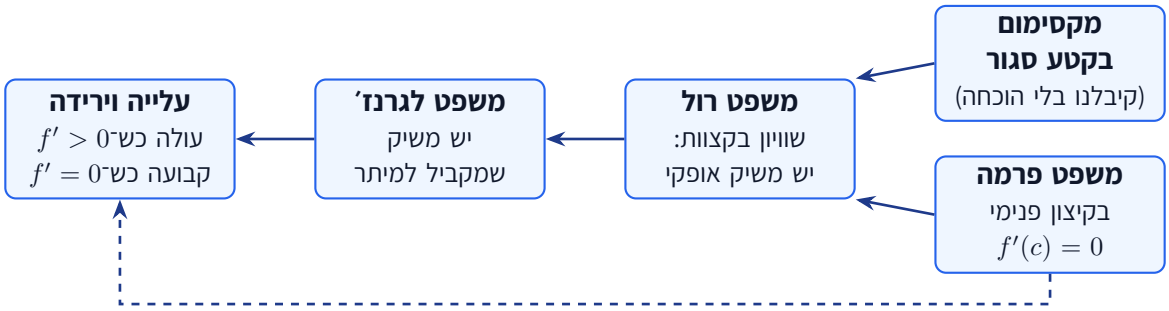
**א.** $\sin x < x$ **לכל** $x > 0$. כאן $x$ נמדד ברדיאנים, והנגזרת של $\sin x$ היא $\cos x$ (ראו את המסמך "הנגזרות של סינוס וקוסינוס"). נניח קודם ש־$0 < x \le 1$. לפי משפט לגרנז׳ על $\sin$ בקטע שבין 0 ל־$x$, יש נקודה $c$ ביניהם שבה $\sin x - \sin 0 = \cos c \cdot (x - 0)$, כלומר $\sin x = x \cdot \cos c$. כיוון ש־$0 < c < 1 < \frac{\pi}{2}$, מתקיים $0 < \cos c < 1$, ולכן $\sin x < x$. וכש־$x > 1$, אין צורך בלגרנז׳: $\sin x \le 1 < x$.

**ב.** $e^x > 1 + x$ **לכל** $x \neq 0$ (וב־$x = 0$ יש שוויון). כאן $(e^x)' = e^x$ (ראו את המסמך "המספר $e$ והלוגריתם הטבעי"). לפי משפט לגרנז׳ בקטע שבין 0 ל־$x$ יש נקודה $c$ ביניהם שבה $e^x - e^0 = e^c \cdot (x - 0)$. נחסיר $x$ משני האגפים, ונקבל $e^x - 1 - x = x\,(e^c - 1)$. אם $x > 0$, אז $c > 0$, ולכן $e^c > 1$ ושני הגורמים חיוביים. אם $x < 0$, אז $c < 0$, ולכן $e^c < 1$ ושני הגורמים שליליים. בשני המקרים המכפלה חיובית, כלומר $e^x > 1 + x$.




סרטוט 7: הישרים $y = x$ ו־$y = 1 + x$ הם המשיקים לגרפים ב־$x = 0$. הגרף של $\sin x$ מתחת למשיק שלו (כש־$x > 0$), והגרף של $e^x$ מעל המשיק שלו.

## 7 השרשרת במבט אחד




הוכחה 2: מקסימום בקטע סגור ומשפט פרמה

סרטוט 8: מי נשען על מי. בבסיס השרשרת עומדת עובדה אחת שקיבלנו בלי הוכחה.

## 8 מה עושים עם זה?

#### דוגמה 1: מוצאים את $c$ של משפט לגרנז׳

**א.** $f(x) = x^2$ בקטע $1 \le x \le 3$. שיפוע המיתר הוא $\frac{3^2 - 1^2}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$. נפתור $f'(c) = 2c = 4$, ונקבל $c = 2$ — אמצע הקטע. זה לא מקרי: בכל פרבולה $y = Ax^2 + Bx + C$ שיפוע המיתר הוא $A(a+b) + B$, והמשוואה $2Ac + B = A(a+b) + B$ נותנת תמיד $c = \frac{a+b}{2}$.

**ב.** $f(x) = x^3$ בקטע $0 \le x \le 3$. שיפוע המיתר הוא $\frac{27 - 0}{3 - 0} = 9$. נפתור $3c^2 = 9$, כלומר $c^2 = 3$, ונקבל $c = \sqrt{3}$ או $c = -\sqrt{3}$. רק הנקודה $c = \sqrt{3} \approx 1.73$ נמצאת בין 0 ל־3.

### דוגמה 2: פתרון אחד בדיוק

הוכיחו שלמשוואה $x^3 + x - 1 = 0$ יש פתרון ממשי אחד בדיוק.

נסמן $f(x) = x^3 + x - 1$. צריך להוכיח שני דברים.

**יש פתרון.** מתקיים $f(0) = -1 < 0$ ו־$f(1) = 1 > 0$. פולינום הוא פונקציה רציפה, ולפי **משפט ערך הביניים** — עוד עובדה על פונקציות רציפות שנקבל בלי הוכחה — גרף רציף שמתחיל מתחת לציר ה־$x$ ומסתיים מעליו חוצה אותו בדרך. לכן יש פתרון בין 0 ל־1.

**אין שני פתרונות.** נניח שיש שני פתרונות שונים, $r_1 < r_2$. אז $f(r_1) = f(r_2) = 0$, ולפי משפט רול יש $c$ ביניהם שבה $f'(c) = 0$. אבל $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1$ לכל $x$ — סתירה. (אפשר גם כך: $f' > 0$, ולכן $f$ עולה, ופונקציה עולה מקבלת כל ערך לכל היותר פעם אחת.) הפתרון היחיד הוא $x \approx 0.68$.

### טעות נפוצה

- **״$f'(c) = 0$, ולכן ב־$c$ יש קיצון״.** לא נכון: עבור $x^3$ מתקיים $f'(0) = 0$, ואין קיצון. צריך לבדוק שהסימן של $f'$ מתחלף.
- **הפעלת משפט רול בלי לבדוק את התנאים.** הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2}$ בקטע $-1 \leq x \leq 1$ מקיימת $f(-1) = f(1) = 1$, אבל $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ אף פעם אינה מתאפסת. המשפט לא ״נכשל״ — הוא פשוט לא חל: $f$ אינה מוגדרת ב־0, ולכן אינה רציפה בקטע.
- **$c$ מחוץ לקטע.** הנקודה $c$ חייבת להיות **בין** $a$ ל־$b$ (בדוגמה 1ב נפסל $c = -\sqrt{3}$), והיא לא חייבת להיות יחידה.
- **״$f' > 0$ בכל התחום, ולכן $f$ עולה בכל התחום״.** עבור $f(x) = -\frac{1}{x}$ מתקיים $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ לכל $x \neq 0$, אבל $f(-1) = 1$ גדול מ־$f(1) = -1$. התחום אינו קטע. הניסוח הנכון: $f$ עולה בתחום $x < 0$, ועולה בתחום $x > 0$ — אבל לא ״בכל התחום״.

### הידעתם?

בסביבות 1636 הופץ בצרפת, בכתב יד, חיבור קצר בלטינית של פייר דה פרמה על שיטה למציאת מקסימום ומינימום. הרעיון שלו: להשוות את ערך הביטוי ב־$x$ לערכו בנקודה קרובה מאוד, $x + E$ (פרמה עצמו כתב $A + E$), ולהתייחס לשני הערכים כאילו הם ״כמעט שווים״. אחר כך הוא חילק ב־$E$ והשמיט את האיברים שעוד נשארה בהם האות $E$. זה כמעט בדיוק החישוב של $f'(x) = 0$ — עשרות שנים לפני שניוטון ולייבניץ פיתחו את החשבון הדיפרנציאלי.

מישל רול הוכיח ב־1691 את המשפט שנקרא היום על שמו, אבל רק לפולינומים, ובלי שיטות של חשבון דיפרנציאלי. באותן שנים הוא היה מהמבקרים החריפים של החשבון החדש (מאוחר יותר שינה את דעתו). השם ״משפט רול״ ניתן למשפט רק במאה ה־19, יותר מ־140 שנה אחרי ההוכחה שלו.

משפט הערך הממוצע נקרא על שמו של ז׳וזף־לואי לגרנז׳. בספרו ״תורת הפונקציות האנליטיות״ (1797) הציג לגרנז׳ נוסחה כללית יותר — ״השארית של לגרנז׳״ בטור טיילור — ומשפט הערך הממוצע הוא המקרה הפשוט ביותר שלה. באותו ספר השתמש לגרנז׳ גם במונח ״פונקציה נגזרת״ ובסימון של הנגזרת בתג, $f'$, שנקרא היום על שמו. את המשפט בצורתו המודרנית ניסח והוכיח אוגוסטן־לואי קושי ב־1823, בספר שבו סיכם את ההרצאות שנתן לסטודנטים בבית הספר הפוליטכני בפריז.

# 9 בדקו את עצמכם

**חמש שאלות**

1. מצאו את כל הנקודות $c$ שמתאימות למשפט לגרנז׳ עבור $f(x)=\sqrt{x}$ בקטע $1\le x\le 4$.
2. ידוע ש־$f'(x)=2x$ לכל $x$, וש־$f(0)=3$. הוכיחו ש־$f(x)=x^2+3$ לכל $x$.
3. הוכיחו שלכל שני מספרים $a$ ו־$b$ מתקיים $|\sin a-\sin b|\le |a-b|$.
4. הוכיחו שלמשוואה $x^4+4x-1=0$ יש בדיוק שני פתרונות ממשיים. **רמז:** בדקו כמה פעמים מתאפסת הנגזרת.
5. השאלה מתיבת ״עצרו ובדקו״: איפה בהוכחה של משפט פרמה, בכל אחד משני הניסוחים, השתמשנו בכך ש־$c$ פנימית?

## תשובות

1. שיפוע המיתר: $\frac{\sqrt{4}-\sqrt{1}}{4-1}=\frac{1}{3}$. נפתור $f'(c)=\frac{1}{2\sqrt{c}}=\frac{1}{3}$, ונקבל $\sqrt{c}=\frac{3}{2}$, כלומר $c=\frac{9}{4}$. הנקודה $\frac{9}{4}$ נמצאת בין 1 ל־4, והיא היחידה.
2. נסמן $g(x)=f(x)-x^2-3$. אז $g'(x)=2x-2x=0$ לכל $x$, ולכן $g$ קבועה בכל הישר (שהוא קטע). כיוון ש־$g(0)=f(0)-3=0$, מתקיים $g(x)=0$ לכל $x$, כלומר $f(x)=x^2+3$.
3. אם $a=b$, אין מה להוכיח. אחרת, לפי משפט לגרנז׳ על $\sin$ בקטע שבין $a$ ל־$b$, יש $c$ ביניהם שבה $\sin a-\sin b=\cos c\cdot(a-b)$. כיוון ש־$|\cos c|\le 1$, מתקבל $|\sin a-\sin b|=|\cos c|\cdot|a-b|\le |a-b|$.
4. נסמן $f(x)=x^4+4x-1$. אז $f'(x)=4x^3+4=4(x^3+1)$, והיא מתאפסת רק ב־$x=-1$. **לכל היותר שניים:** אילו היו שלושה פתרונות $r_1<r_2<r_3$, משפט רול בקטעים $r_1\le x\le r_2$ ו־$r_2\le x\le r_3$ היה נותן שתי נקודות שונות שבהן $f'=0$ — סתירה. **לפחות שניים:** $f(-2)=7>0$ ו־$f(-1)=-4<0$, וגם $f(0)=-1<0$ ו־$f(1)=4>0$. לפי משפט ערך הביניים יש פתרון בין $-2$ ל־$-1$, ופתרון נוסף בין 0 ל־1.
5. בניסוח 1 השתמשנו גם ב־$h>0$ וגם ב־$h<0$ (צעדים 2 ו־3), כלומר בנקודות משני הצדדים של $c$. בניסוח 2 השתמשנו בנקודות שמימין ל־$c$ כדי לשלול $f'(c)>0$ (צעד 2), ובנקודות שמשמאל לה כדי לשלול $f'(c)<0$ (צעד 3). ב־$x=1$, בקצה הקטע $0\le x\le 1$, אין נקודות מימין: מותר רק $h<0$, והמנה שם היא $\frac{(1+h)-1}{h}=1>0$, בלי סתירה. לכן השיפוע בקצה יכול להיות 1 ולא 0.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את המסמך בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנו קטעים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.