מעגל אפולוניוס

הנקודות שהמרחק שלהן מנקודה אחת גדול פי 2 מהמרחק שלהן מנקודה אחרת יוצרות מעגל – שלוש הוכחות: אלגברית, גאומטרית ובמספרים מרוכבים

כיתה י״ב | 5 יח״ל | מקומות גאומטריים | 3 הוכחות ובונוס | כ־20 דקות קריאה

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: מרוץ בין שתי סירות, ולמה ״קו התיקו״ הוא מעגל.
- הוכחה 1: נוסחת המרחק והשלמה לריבוע, בשני הכיוונים.
- הוכחה 2: חוצי זווית וזווית ישרה — בלי מערכת צירים.
- הוכחה 3: מספרים מרוכבים. ובונוס: הוכחה וקטורית קצרה.
- המרוץ, שאלה בסגנון בגרות, טעויות נפוצות ושאלות לבדיקה עצמית.

מה כדאי לדעת קודם

- נוסחת המרחק בין שתי נקודות.
- משוואת המעגל והשלמה לריבוע.
- להוכחה 2: משפט חוצה הזווית וההפוך לו, גם לזווית החיצונית (להעמקה); דמיון משולשים; זווית היקפית שנשענת על קוטר; התיכון ליתר.
- להוכחה 3: צמוד וערך מוחלט של מספר מרוכב.

1 האינטואיציה: מרוץ בין שתי סירות

האינטואיציה

שתי סירות יוצאות באותו רגע, כל אחת מהמקום שלה, ושטות בקו ישר אל אותו אי. הסירה A מהירה פי 2 מהסירה B. לאילו איים תגיע B ראשונה? בכל פרק זמן A עוברת מרחק כפול מזה ש־B עוברת, ולכן אם נסמן את האי ב־P, הסירה B מנצחת בדיוק כאשר $PA > 2 \cdot PB$. אם $PA = 2 \cdot PB$, יש תיקו. איך נראה ״קו התיקו״?

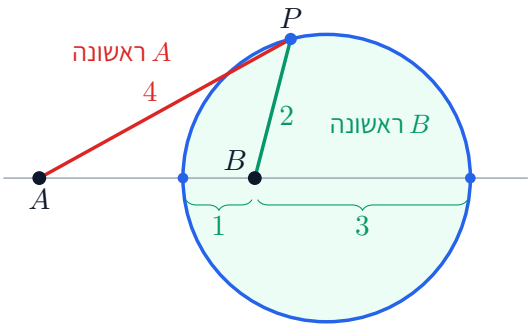
נניח שהמרחק בין הסירות הוא 3 ק״מ. אי שנמצא בין הסירות, 1 ק״מ מ־B, נמצא 2 ק״מ מ־A — תיקו. אי שנמצא מאחורי B, 3 ק״מ ממנה, נמצא $3 + 3 = 6$ ק״מ מ־A — שוב תיקו. כלומר לכיוון A ״הטווח״ של B הוא רק 1 ק״מ, ובכיוון ההפוך הוא 3 ק״מ. מתברר ש״קו התיקו״ הוא **מעגל** שמקיף את B, אבל המרכז שלו אינו B: המעגל ״מוזז״ הרחק מ־A.

דוגמה מספרית קטנה

נשים את A בראשית הצירים ואת B בנקודה $(3,0)$ (היחידות בק״מ), ונבדוק כמה איים:

האי	PB	$2\cdot PB$	PA	ראשונה
$(5,0)$	2	4	5	B
$(6,0)$	3	6	6	תיקו
$(7,0)$	4	8	7	A
$(3,4)$	4	8	5	A

ובנקודה P שבסרטוט: $PB=2$ ו־$PA=4$ — תיקו.



סרטוט 1: על המעגל $PA=2\cdot PB$. בתוך המעגל B מגיעה ראשונה, ומחוצה לו — A.

2 המשפט

מקום גאומטרי הוא אוסף כל הנקודות שמקיימות תנאי מסוים. למשל, האנך האמצעי לקטע AB הוא המקום הגאומטרי של הנקודות שהמרחק שלהן מ־A שווה למרחק שלהן מ־B. כאן נחפש את המקום הגאומטרי של הנקודות שהמרחק שלהן מ־A גדול פי k מהמרחק שלהן מ־B.

נתונות שתי נקודות שונות A ו־B, ונסמן $d=AB$. נמקם את מערכת הצירים כך ש־A תהיה בראשית ו־B על החלק החיובי של ציר ה־x, כלומר $A(0,0)$ ו־$B(d,0)$. יהי k מספר חיובי.

מעגל אפולוניוס

המקום הגאומטרי של כל הנקודות P שמקיימות $PA=k\cdot PB$ הוא:

- כאשר $k=1$: האנך האמצעי לקטע AB, כלומר הישר $x=\frac{d}{2}$.
- כאשר $k\neq 1$: המעגל

$$\boxed{\left(x-\frac{k^2d}{k^2-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{kd}{k^2-1}\right)^2}$$

שמרכזו $M\left(\frac{k^2d}{k^2-1},\,0\right)$ ורדיוסו $R=\frac{kd}{|k^2-1|}$.

במילים: כש־$k\neq 1$, הנקודות שהמרחק שלהן מ־A גדול פי k מהמרחק שלהן מ־B יוצרות מעגל. מרכז המעגל נמצא על הישר AB, מחוץ לקטע AB. המעגל מקיף את הנקודה שאליה הן קרובות יותר: את B כש־$k>1$, ואת A כש־$k<1$.

מעגל כזה נקרא **מעגל אפולוניוס** של הנקודות A ו־B, ביחס k. במרוץ הסירות $d=3$ ו־$k=2$, ולכן המרכז הוא $\left(\frac{4\cdot 3}{3},0\right)=(4,0)$, הרדיוס הוא $\frac{2\cdot 3}{3}=2$, והמעגל הוא $(x-4)^2+y^2=4$. נחזור לדוגמה הזאת לאורך כל המסמך. שימו לב שהמרכז, $(4,0)$, אינו $B(3,0)$, וגם אינו אמצע הקטע AB, שהוא $(1.5,\,0)$.

כמו בכל מקום גאומטרי, במשפט יש שתי טענות: (1) כל נקודה שמקיימת $PA=k\cdot PB$ נמצאת על המעגל; (2) כל נקודה שעל המעגל מקיימת $PA=k\cdot PB$. רק שתיהן יחד אומרות שהמקום הגאומטרי הוא המעגל — לא פחות ולא יותר. בכל הוכחה נוכיח את שתיהן.

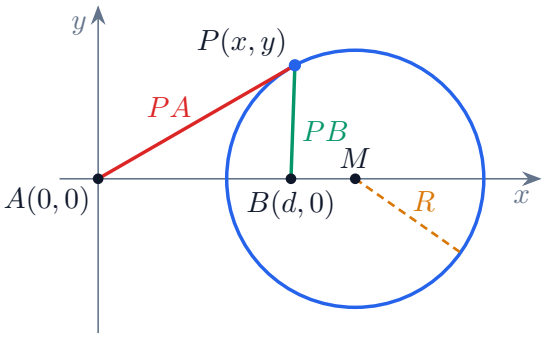
3 הוכחה 1: נוסחת המרחק והשלמה לריבוע

הרעיון נכתוב את התנאי $PA = k \cdot PB$ בעזרת נוסחת המרחק, ניפטר מהשורשים בהעלאה בריבוע, ובעזרת השלמה לריבוע נגיע למשוואה של מעגל — כמו בתרגיל "מצאו את המרכז ואת הרדיוס" (ראו את המסמכים "נוסחת המרחק בין שתי נקודות" ו"משוואת המעגל" בסדרה).

תהי $P(x,y)$ נקודה כלשהי במישור. לפי נוסחת המרחק:

$$PA = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$PB = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}$$

נניח ש־$k \neq 1$ (במקרה $k = 1$ נטפל בהמשך), ונכתוב את התנאי $PA = k \cdot PB$ בעזרת השיעורים x ו־y.



סרטוט 2: במקום הגאומטרי בדיוק כאשר $PA = k \cdot PB$. כאן $d = 3$ ו־$k = 2$.

	טענה	נימוק
1	$PA^2 = k^2 \cdot PB^2$	העלאה בריבוע: שני האגפים אינם שליליים
2	$x^2 + y^2 = k^2\left[(x-d)^2 + y^2\right]$	נוסחת המרחק
3	$(k^2-1)x^2 - 2k^2dx + (k^2-1)y^2 + k^2d^2 = 0$	פותחים סוגריים, מעבירים את כל האיברים לאגף אחד ומסדרים
4	$x^2 - 2mx + y^2 + \dfrac{k^2d^2}{k^2-1} = 0$	מחלקים ב־k^2-1, שאינו אפס כי $k \neq 1$, ומסמנים $m = \frac{k^2 d}{k^2-1}$
5	$(x-m)^2 + y^2 = m^2 - \dfrac{k^2d^2}{k^2-1}$	השלמה לריבוע: $x^2 - 2mx = (x-m)^2 - m^2$
6	$(x-m)^2 + y^2 = \left(\dfrac{kd}{k^2-1}\right)^2$	מכנה משותף $(k^2-1)^2$. במונה: $k^4d^2 - k^2d^2(k^2-1) = k^2d^2$

מש"ל ■

ולמה זה מוכיח את שני הכיוונים? כל צעד שקול לצעד שלפניו. בצעד 1 שני האגפים אינם שליליים, ולכן ההעלאה בריבוע לא מוסיפה פתרונות "זרים": לשני מספרים אי־שליליים u ו־v מתקיים $u = v$ אם ורק אם $u^2 = v^2$. בצעד 4 חילקנו במספר שאינו אפס, ואפשר לחזור אחורה ולכפול בו. שאר הצעדים — פתיחת סוגריים, העברת אגפים והשלמה לריבוע — אינם משנים את קבוצת הפתרונות. לכן P מקיימת $PA = k \cdot PB$ **אם ורק אם** היא מקיימת את המשוואה שבצעד 6. אגף ימין של המשוואה חיובי, ולכן היא מתארת מעגל של ממש, שמרכזו $M(m,0)$ ורדיוסו $R = \frac{kd}{|k^2-1|}$. הערך המוחלט דרוש כי כש־$k < 1$ המכנה k^2-1 שלילי.

אותו חישוב במרוץ הסירות

כאן $A(0,0)$, $B(3,0)$ ו־$k=2$:

$$x^2+y^2=4\big[(x-3)^2+y^2\big] \iff x^2-8x+y^2+12=0 \iff (x-4)^2+y^2=4$$

במעבר הראשון פתחנו סוגריים, העברנו אגפים וחילקנו ב־3. במעבר השני השלמנו לריבוע. התקבל מעגל שמרכזו $(4,0)$ ורדיוסו 2, כמו בנוסחה. בדיקה בנקודה $(4,2)$ שעל המעגל: $PA=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$ ו־$PB=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$.

ומה קורה כש־$k=1$? בצעד 3 המקדמים של x^2 ושל y^2 הם $k^2-1=0$, והמשוואה מתקצרת ל־$-2dx+d^2=0$, כלומר $x=\frac{d}{2}$. זה ישר אנכי שעובר דרך אמצע הקטע AB — האנך האמצעי. כאן גם רואים למה אסור לחלק ב־k^2-1 בלי לבדוק: כש־$k=1$ אין ריבועים במשוואה, ולכן גם אין מעגל.

עצרו ובדקו

נשאיר את $A(0,0)$ ואת $B(3,0)$, אבל ניקח $k=\frac{1}{2}$ במקום $k=2$. מה המרכז ומה הרדיוס? איזו משתי הנקודות המעגל מקיף עכשיו, ולמה זה הגיוני?

4 הוכחה 2: חוצי זווית וזווית ישרה

הרעיון נמצא על הישר AB שתי נקודות של המקום הגאומטרי, D ו־E. אחר כך נראה שמכל נקודה אחרת של המקום הגאומטרי "רואים" את הקטע DE בזווית ישרה, ולכן היא על המעגל שקוטרו DE. ההוכחה הזאת נשענת על משפטים מהגאומטריה של המשולש, בלי מערכת צירים.

הנקודות D ו־E

נניח ש־$k\neq 1$. על הישר AB יש בדיוק שתי נקודות שמקיימות $PA=k\cdot PB$:

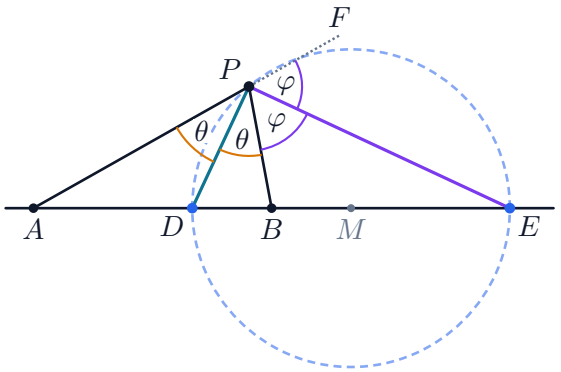
- הנקודה D, שנמצאת על הקטע AB ומחלקת אותו **חלוקה פנימית** ביחס k, כלומר $\frac{DA}{DB}=k$.
- הנקודה E, שנמצאת מחוץ לקטע ומחלקת אותו **חלוקה חיצונית** ביחס k, כלומר $\frac{EA}{EB}=k$. כש־$k>1$ היא נמצאת מעבר ל־B, וכש־$k<1$ — מעבר ל־A.

למה בדיוק שתיים? נתאר את הישר AB כציר מספרים שבו A היא הנקודה 0 ו־B היא הנקודה d. התנאי על נקודה t של הישר הוא $|t|=k\cdot|t-d|$, כלומר $t=k(t-d)$ או $t=-k(t-d)$, ולכל אחת מהמשוואות האלה יש פתרון אחד: $t=\frac{kd}{k-1}$ (זו E) ו־$t=\frac{kd}{k+1}$ (זו D). במרוץ הסירות אלה $D(2,0)$ ו־$E(6,0)$ — שתי הנקודות שמצאנו באינטואיציה. בכיוון הראשון נניח ש־$k>1$: אם $k<1$, נחליף בין השמות A ו־B, והתנאי יהפוך ל־$PA=\frac{1}{k}\cdot PB$ עם $\frac{1}{k}>1$, בלי לשנות את D, את E ואת המעגל שקוטרו DE.

כיוון ראשון: כל נקודה של המקום הגאומטרי נמצאת על המעגל

תהי P נקודה שמקיימת $PA = k \cdot PB$ ואינה על הישר AB. נמשיך את הצלע AP של המשולש APB מעבר ל־P עד נקודה F. הזווית BPF היא **הזווית החיצונית** של המשולש בקודקוד P.
נשתמש במשפט ההפוך למשפט חוצה הזווית, בשתי הגרסאות שלו (ראו את המסמך "משפט חוצה הזווית" בסדרה):

- אם נקודה על הצלע AB מחלקת אותה ביחס $\frac{PA}{PB}$, הישר מ־P אליה חוצה את הזווית APB.
- אם נקודה על ההמשך של הצלע AB מחלקת אותה חלוקה חיצונית ביחס $\frac{PA}{PB}$, הישר מ־P אליה חוצה את הזווית החיצונית. (חוצה הזווית החיצונית פוגש את הישר AB בנקודה כזאת, ולמעלה ראינו שיש רק נקודה אחת כזאת.)



סרטוט 3: PD חוצה את הזווית APB, ו־PE חוצה את הזווית החיצונית BPF.

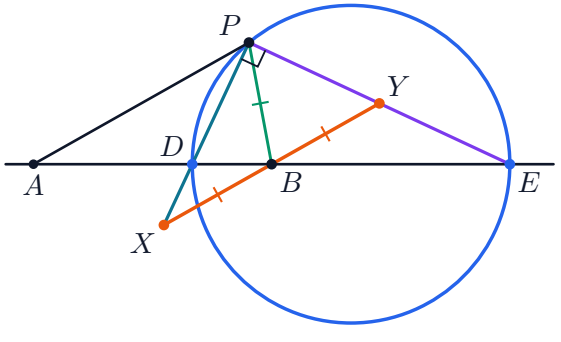
	טענה	נימוק
1	PD חוצה את $\angle APB$	$\frac{DA}{DB} = k = \frac{PA}{PB}$, והמשפט ההפוך למשפט חוצה הזווית
2	PE חוצה את הזווית החיצונית $\angle BPF$	$\frac{EA}{EB} = k = \frac{PA}{PB}$, והמשפט ההפוך למשפט חוצה הזווית החיצונית
3	$\angle DPE = \theta + \varphi = 90°$	$2\theta + 2\varphi = 180°$, כי $\angle APB$ ו־$\angle BPF$ צמודות
4	P על המעגל שקוטרו DE	במשולש ישר־הזווית DPE התיכון ליתר שווה למחצית היתר: $MP = MD = ME$

מש"ל ■

כל נקודה של המקום הגאומטרי שאינה על הישר AB נמצאת אפוא על המעגל שקוטרו DE. והנקודות של המקום הגאומטרי שעל הישר AB הן D ו־E עצמן — שני הקצוות של הקוטר. במרוץ הסירות $D(2,0)$ ו־$E(6,0)$, ולכן מרכז המעגל הוא $(4,0)$ והרדיוס 2: שוב $(x-4)^2 + y^2 = 4$.

כיוון שני: כל נקודה של המעגל נמצאת במקום הגאומטרי

תהי P נקודה על המעגל שקוטרו DE, שונה מ־D ומ־E. הפעם לא נוכל להשתמש בחוצי הזוויות, כי עוד לא ידוע לנו ש־PD ו־PE חוצים זוויות. נשתמש בבנייה אחרת: דרך B נעביר ישר שמקביל ל־AP. הוא חותך את הישר PD בנקודה X ואת הישר PE בנקודה Y.
נוכיח ש־B היא אמצע היתר XY במשולש ישר־הזווית XPY, ומזה נסיק כמה שווה PB. בסרטוט $k = 2$, אבל אותם נימוקים תקפים לכל $k \neq 1$.



סרטוט 4: $XY \parallel AP$. שלושת הקטעים המסומנים שווים: $BX = BY = BP$.

	טענה	נימוק
1	$\angle DPE = 90^\circ$	זווית היקפית שנשענת על קוטר
2	$BX = \frac{DB}{DA} \cdot AP = \frac{AP}{k}$	$\triangle DBX \sim \triangle DAP$ (ז.ז): $BX \parallel AP$ נותן זוויות מתחלפות, וב־D יש זוויות קודקודיות
3	$BY = \frac{EB}{EA} \cdot AP = \frac{AP}{k}$	$\triangle EBY \sim \triangle EAP$ (ז.ז): $BY \parallel AP$ נותן זוויות מתאימות, וזווית E משותפת
4	B היא אמצע הקטע XY	$BX = BY$, ו־X ו־Y נמצאות משני צדי הישר AB
5	$PB = BX = \frac{AP}{k}$	במשולש ישר־הזווית XPY (צעד 1) התיכון ליתר שווה למחצית היתר
6	$PA = k \cdot PB$	כפל ב־k

מש"ל ■

הוכחנו את שני הכיוונים בלי מערכת צירים: המקום הגאומטרי הוא בדיוק המעגל שקוטרו DE. ההוכחה גם מסבירה **למה** מתקבל מעגל: מכל נקודה שלו רואים את הקטע DE בזווית ישרה (ראו גם את המסמך "זווית היקפית וזווית מרכזית" בסדרה).

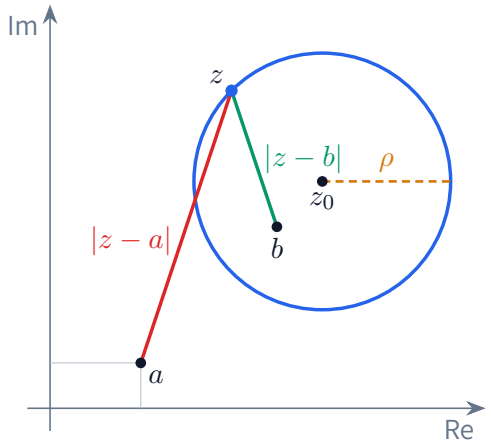
5 הוכחה 3: מספרים מרוכבים

הרעיון נתאים לכל נקודה במישור מספר מרוכב. המרחק בין שתי נקודות הוא הערך המוחלט של ההפרש ביניהן, ואת הריבוע של ערך מוחלט אפשר לכתוב בלי שורש: $|w|^2 = w \cdot \bar{w}$. כך נעבוד עם z ועם $\bar{z}$ במקום עם x ועם y, ולא נצטרך למקם את A ואת B במקום מיוחד.

נתאים לנקודות A, B ו־P את המספרים המרוכבים a, b ו־z. אז $PA = |z-a|$ ו־$PB = |z-b|$, והתנאי הוא

$$|z-a| = k \cdot |z-b|.$$

נשתמש בעובדות הבסיסיות על הצמוד, שנלמדות עם המספרים המרוכבים: הצמוד של סכום, של הפרש ושל מכפלה הוא הסכום, ההפרש והמכפלה של הצמודים; הצמוד של מספר ממשי הוא המספר עצמו; ולכל מספר מרוכב w מתקיים $w \cdot \bar{w} = |w|^2$.



סרטוט 5: כאן $a = 2 + i$, $b = 5 + 4i$ **ו־**$k = 2$, **והמרכז הוא** $z_0 = 6 + 5i$.

	טענה	נימוק
1	$(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = k^2(z-b)(\bar{z}-\bar{b})$	העלאה בריבוע (שני האגפים אינם שליליים), ו־$\lvert w\rvert^2 = w\bar{w}$
2	$(1-k^2)z\bar{z} - (\bar{a}-k^2\bar{b})z - (a-k^2b)\bar{z} + \lvert a\rvert^2 - k^2\lvert b\rvert^2 = 0$	פתיחת סוגריים, העברת אגפים וסידור
3	$z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0\bar{z} + \dfrac{\lvert a\rvert^2 - k^2\lvert b\rvert^2}{1-k^2} = 0$	מחלקים ב־$1-k^2 \neq 0$ ומסמנים $z_0 = \frac{a-k^2b}{1-k^2}$
4	$(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0) = z_0\bar{z}_0 - \dfrac{\lvert a\rvert^2 - k^2\lvert b\rvert^2}{1-k^2}$	מוסיפים $z_0\bar{z}_0$ לשני האגפים
5	$\lvert z-z_0\rvert^2 = \dfrac{k^2\lvert a-b\rvert^2}{(1-k^2)^2}$	החישוב של אגף ימין — מתחת לטבלה

מש"ל ■

כלומר $\rho = \lvert z - z_0\rvert$, כאשר $\rho = \frac{k\,\lvert a-b\rvert}{\lvert 1-k^2\rvert}$. בצעד 3 השתמשנו בכך ש־$k$ ממשי: הצמוד של $\frac{a-k^2b}{1-k^2}$ הוא $\frac{\bar{a}-k^2\bar{b}}{1-k^2}$, כלומר $\bar{z}_0$. **החישוב של צעד 5:** נכתוב את אגף ימין במכנה המשותף $(1-k^2)^2$. המונה הוא

$$\begin{aligned}
&\lvert a-k^2b\rvert^2 - (1-k^2)\left(\lvert a\rvert^2 - k^2\lvert b\rvert^2\right)\\
&\quad= \lvert a\rvert^2 - k^2\left(a\bar{b}+\bar{a}b\right) + k^4\lvert b\rvert^2 - \lvert a\rvert^2 + k^2\lvert b\rvert^2 + k^2\lvert a\rvert^2 - k^4\lvert b\rvert^2\\
&\quad= k^2\left(\lvert a\rvert^2 - a\bar{b} - \bar{a}b + \lvert b\rvert^2\right) = k^2\,(a-b)(\bar{a}-\bar{b}) = k^2\lvert a-b\rvert^2.
\end{aligned}$$

כל הצעדים הפיכים, כמו בהוכחה 1. לכן $\lvert z-a\rvert = k\cdot\lvert z-b\rvert$ **אם ורק אם** הוא נמצא על המעגל שמרכזו z_0 ורדיוסו ρ. ואיפה נמצא המרכז? אפשר לכתוב $z_0 = b + \frac{b-a}{k^2-1}$: יוצאים מ־$b$ וממשיכים בכיוון שמ־a אל b, ולכן המרכז על הישר AB, מעבר ל־B (כש־$k>1$). במרוץ הסירות $a=0$ ו־$b=3$, ומקבלים $z_0 = \frac{0-4\cdot 3}{1-4} = 4$ ו־$\rho = \frac{2\cdot 3}{3} = 2$ — שוב אותו מעגל.

6 שלוש הדרכים זו מול זו

	הוכחה 1: נוסחת המרחק	הוכחה 2: חוצי זווית	הוכחה 3: מספרים מרוכבים
הרעיון	לכתוב את התנאי בשיעורים ולהשלים לריבוע	למצוא את D ואת E ולהראות ש־$\angle DPE$ ישרה	לכתוב $\lvert w\rvert^2 = w\bar{w}$ ולהשלים "ריבוע מרוכב"
הכלים	נוסחת המרחק, השלמה לריבוע	משפט חוצה הזווית, דמיון, התיכון ליתר	צמוד וערך מוחלט
היתרון	זו השיטה שבה פותרים שאלות בגרות	מסבירה למה מתקבל דווקא מעגל, ומראה את הקוטר DE	לא צריך מערכת צירים מיוחדת, והמרכז מתקבל ישירות מ־a ומ־b

הוכחות 1 ו־3 נשענות על אותו רעיון — העלאה בריבוע והשלמה לריבוע — בשתי "שפות" שונות. הוכחה 2 שונה באמת: היא גאומטרית, בלי מערכת צירים ובלי השלמה לריבוע. ויש עוד דרך, קצרה במיוחד, שמחברת בין הגישות:

בונוס להעמקה: הוכחה רביעית, בעזרת וקטורים

לווקטורים, כמו למספרים, מתקיים $\underline{u}\cdot\underline{u}-\underline{v}\cdot\underline{v}=(\underline{u}-\underline{v})\cdot(\underline{u}+\underline{v})$. ניקח $\underline{u}=\underline{PA}$ ו־$\underline{v}=k\,\underline{PB}$. הנקודה E מחלקת את AB חלוקה חיצונית ביחס k, ולכן $\underline{EA}=k\,\underline{EB}$ (שני הווקטורים באותו כיוון). מכאן

$$\underline{PA}-k\,\underline{PB}=\big(\underline{PE}+\underline{EA}\big)-k\big(\underline{PE}+\underline{EB}\big)=(1-k)\,\underline{PE}.$$

באותו אופן, $\underline{DA}=-k\,\underline{DB}$ נותן $\underline{PA}+k\,\underline{PB}=(1+k)\,\underline{PD}$. נכפול את שני השוויונות כפל סקלרי ונקבל

$$PA^2-k^2\cdot PB^2=(1-k^2)\,\underline{PD}\cdot\underline{PE}.$$

לכן, כש־$k\neq 1$, השוויון $PA=k\cdot PB$ מתקיים אם ורק אם $\underline{PD}\cdot\underline{PE}=0$, כלומר אם ורק אם $P=D$, או $P=E$, או $\angle DPE=90^\circ$ — ואלה בדיוק הנקודות של המעגל שקוטרו DE, כמו בהוכחה 2.

7 מה עושים עם המשפט?

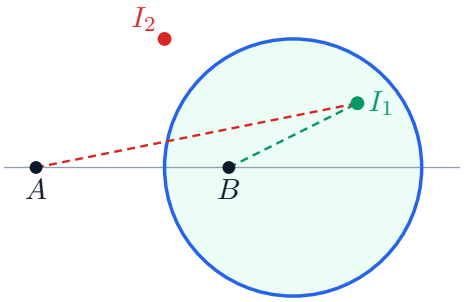
שימוש 1: המרוץ – מי מגיעה ראשונה?

נחזור לסירות: A בראשית, B בנקודה $(3,0)$, ו־A מהירה פי 2. הסירה B מגיעה ראשונה לאי $P(x,y)$ בדיוק כאשר $PA>2\cdot PB$, כלומר כאשר $PA^2-4\cdot PB^2>0$. החישוב של הוכחה 1 נותן את הזהות

$$PA^2-4\cdot PB^2=-3\big[(x-4)^2+y^2-4\big].$$

לכן $PA>2\cdot PB$ בדיוק כאשר $(x-4)^2+y^2<4$, כלומר **בתוך** המעגל. כך אפשר לענות בלי לחשב אף שורש:

- באי $I_1(5,1)$ מקבלים $(5-4)^2+1^2=2<4$ — הוא בתוך המעגל, ו־B מנצחת. אכן, $PA=\sqrt{26}\approx 5.10$ גדול מ־$2\cdot PB=2\sqrt{5}\approx 4.47$.
- באי $I_2(2,2)$ מקבלים $(2-4)^2+2^2=8>4$ — הוא מחוץ למעגל, ו־A מנצחת. אכן, $PA=\sqrt{8}\approx 2.83$ קטן מ־$2\cdot PB=2\sqrt{5}$.



סרטוט 6: I_1 בתוך המעגל (B ראשונה), I_2 מחוצה לו (A ראשונה).

באופן כללי, כש־$k>1$, בתוך מעגל אפולוניוס היחס $\frac{PA}{PB}$ גדול מ־k, ומחוץ לו הוא קטן מ־k. כדי לבדוק נקודה, מציבים את שיעוריה באגף שמאל של משוואת המעגל ומשווים את התוצאה לריבוע הרדיוס.

שימוש 2: שאלה בסגנון בגרות

מעגל אפולוניוס מופיע בשמו בתוכנית הלימודים של 5 יח"ל לכיתה י"ב, בפרק המספרים המרוכבים: זה המקום הגאומטרי $|z-a|=k\cdot|z-b|$ מהוכחה 3. גם בגאומטריה האנליטית של 5 יח"ל יש שאלות של מקום גאומטרי שמתקבל בהן מעגל, ופותרים אותן בדיוק בשיטה של הוכחה 1.

דוגמה: כש־A ו־B אינן על ציר

נתונות הנקודות $A(2,1)$ ו־$B(5,4)$. (א) מצאו את המקום הגאומטרי של כל הנקודות P שהמרחק שלהן מ־A גדול פי 2 מהמרחק שלהן מ־B. (ב) מצאו את הנקודות של המקום הגאומטרי שעל הישר AB.

(א) נעלה בריבוע, $PA^2 = 4\cdot PB^2$, ונציב את נוסחת המרחק. (בשורה הרביעית חילקנו ב־3.)

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(y-1)^2 &= 4\left[(x-5)^2+(y-4)^2\right]\\ x^2-4x+5+y^2-2y &= 4x^2-40x+164+4y^2-32y\\ 0 &= 3x^2-36x+3y^2-30y+159\\ 0 &= x^2-12x+y^2-10y+53\\ (x-6)^2+(y-5)^2 &= 36+25-53=8\end{aligned}$$

המקום הגאומטרי הוא מעגל שמרכזו $(6,5)$ ורדיוסו $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ (זה המעגל של סרטוט 5). בדיקה: בנקודה $(8,3)$ מתקיים $PA^2=36+4=40$ ו־$PB^2=9+1=10$, ואכן $40=4\cdot 10$.

(ב) שיפוע הישר AB הוא $\frac{4-1}{5-2}=1$, ולכן משוואתו $y=x-1$. נציב במשוואת המעגל ונקבל $2(x-6)^2=8$, כלומר $x=4$ או $x=8$. הנקודות הן $D(4,3)$ ו־$E(8,7)$, כמו בהוכחה 2: D מחלקת את AB חלוקה פנימית ביחס 2, E מחלקת אותו חלוקה חיצונית ביחס 2, והאמצע של DE הוא המרכז $(6,5)$.

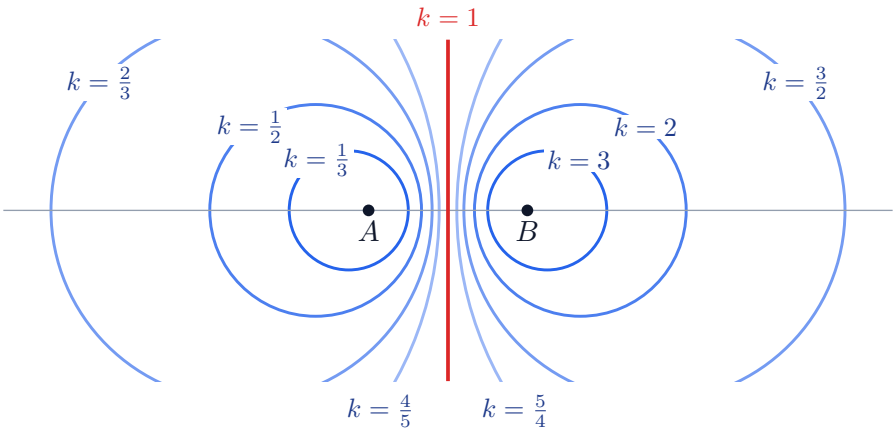
אפשר לבדוק את התשובה גם בנוסחאות של הוכחה 3, עם $a=2+i$ ו־$b=5+4i$:

$$z_0=\frac{(2+i)-4(5+4i)}{1-4}=\frac{-18-15i}{-3}=6+5i,\qquad \rho=\frac{2\,|-3-3i|}{|1-4|}=\frac{2\cdot 3\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}.$$

שימוש 3: מה קורה כש־k מתקרב ל־1?

נקבע את A ואת B ונשנה את k. לכל $k>1$ מתקבל מעגל שמקיף את B, ולכל $k<1$ — מעגל שמקיף את A. המעגל של $\frac{1}{k}$ הוא השיקוף של המעגל של k באנך האמצעי, כי $PA=\frac{1}{k}\cdot PB$ פירושו $PB=k\cdot PA$: אותו תנאי, כש־A ו־B מחליפות תפקידים. המעגלים לא נחתכים זה עם זה, כי אף נקודה לא יכולה לקיים שני יחסים שונים בבת אחת.

ככל ש־k קרוב יותר ל־1, המעגל גדול יותר. במערכת הצירים של המשפט, הקצה הקרוב שלו, $D\left(\frac{kd}{k+1},0\right)$, מתקרב לאמצע הקטע, $\left(\frac{d}{2},0\right)$, והקצה הרחוק, $E\left(\frac{kd}{k-1},0\right)$, מתרחק בלי גבול. ב־$k=1$ המעגל "נפתח" והופך לישר — האנך האמצעי. לכן אפשר לחשוב על האנך האמצעי כעל "מעגל אפולוניוס עם רדיוס אינסופי".



סרטוט 7: מעגלי אפולוניוס של A ו־B לכמה ערכים של k. ככל ש־k קרוב יותר ל־1, המעגל גדול יותר.

⚠ טעות נפוצה

- **שוכחים את המקרה $k=1$.** כש־$PA=PB$ אין מעגל, אלא ישר: האנך האמצעי לקטע AB. לכן אסור לחלק ב־k^2-1 בלי לבדוק ש־$k\neq 1$.
- **שוכחים להעלות את k בריבוע.** מ־$PA=2\cdot PB$ מקבלים $PA^2=4\cdot PB^2$. מי שכותב $PA^2=2\cdot PB^2$ מקבל במרוץ הסירות את $(x-6)^2+y^2=18$ — מעגל אפולוניוס של היחס $\sqrt{2}$.
- **מרכז במקום הלא נכון.** המרכז אינו באמצע AB ואינו ב־B: במרוץ הסירות האמצע הוא $(1.5,\ 0)$ ו־B היא $(3,0)$, אבל המרכז הוא $(4,0)$. והמעגל מקיף את הנקודה שאליה P **קרובה** יותר — כאן B.

🕒 הידעתם?

המעגל נקרא על שם אפולוניוס מפרגה (בסביבות 200 לפני הספירה), מחבר הספר "חתכי חרוט". הוא כתב גם חיבור בשם "מקומות מישוריים", על מקומות גאומטריים שהם ישרים או מעגלים. החיבור אבד, ואנחנו יודעים מה היה בו בעיקר מהספר השביעי של "האוסף" של פפוס מאלכסנדריה (המאה ה־4 לספירה). את המשפט שלנו ציטט מתוכו המפרש אוטוקיוס מאשקלון (המאה ה־6 לספירה). אבל המשפט עתיק עוד יותר: הוא מופיע כבר אצל אריסטו (המאה ה־4 לפני הספירה), בערך 150 שנה לפני אפולוניוס, בספרו "מטאורולוגיקה", בפרק על הקשת בענן. במאה ה־17 ניסה פייר דה פרמה לשחזר את החיבור האבוד, ומהעבודה הזאת צמח חיבור שלו שתיאר ישרים ועקומות במשוואות — מצעדי הראשית של הגאומטריה האנליטית.

🕒 הידעתם? מעגל אפולוניוס בפיזיקה

נשים מטען חשמלי q בנקודה $B(3,0,0)$ ומטען $-2q$ בנקודה $A(0,0,0)$. הפוטנציאל החשמלי של מטען נקודתי פרופורציוני למטען חלקי המרחק ממנו, ולכן הפוטנציאל הכולל מתאפס בדיוק כאשר $\frac{q}{PB}=\frac{2q}{PA}$, כלומר כאשר $PA=2\cdot PB$: על **הכדור** שמרכזו $(4,0,0)$ ורדיוסו 2 — מרוץ הסירות בתלת־ממד. על העובדה הזאת נשענת **שיטת מטעני דמות** (method of images), שפיתח באמצע המאה ה־19 ויליאם תומסון (לורד קלווין): כשכדור מתכת מוארק נמצא ליד מטען, את השדה שמחוץ לכדור מחשבים כאילו במקום הכדור יש בתוכו מטען "דמות" אחד.

8 בדקו את עצמכם

✓ חמש שאלות קצרות

1. מצאו את המקום הגאומטרי של הנקודות שמרחקן מ־$A(0,0)$ גדול פי 3 ממרחקן מ־$B(8,0)$.
2. תארו את המקום הגאומטרי של כל המספרים המרוכבים z שמקיימים $|z-2i|=2\,|z+i|$.
3. המעגל $(x-5)^2+y^2=9$ הוא מעגל אפולוניוס של $A(0,0)$ ושל נקודה B על ציר ה־x החיובי. מצאו את B ואת k. **רמז:** איפה המעגל חותך את ציר ה־x?
4. במרוץ הסירות, B שטה בקו ישר אל אי Q שבתוך המעגל. האם A יכולה "ליירט" אותה בדרך?
5. ענו על השאלה מתיבת "עצרו ובדקו" ($k=\frac{1}{2}$).

תשובות

1. $d=8$ ו־$k=3$: המרכז $\frac{9\cdot 8}{8}=9$ והרדיוס $\frac{3\cdot 8}{8}=3$, כלומר $(x-9)^2+y^2=9$. ובחישוב ישיר: $x^2+y^2=9\left[(x-8)^2+y^2\right]$, ומכאן $x^2-18x+y^2+72=0$, וזה אותו מעגל. הוא חותך את ציר ה־x ב־$D(6,0)$, שבה $6=3\cdot 2$, וב־$E(12,0)$, שבה $12=3\cdot 4$.
2. כאן $a=2i$, $b=-i$ ו־$k=2$, ולכן $z_0=\frac{2i-4(-i)}{1-4}=-2i$ ו־$\rho=\frac{2\,|2i+i|}{3}=2$. המקום הגאומטרי הוא המעגל $|z+2i|=2$: מרכזו $(0,-2)$ ורדיוסו 2. בדיקה: ב־$z=0$ מתקיים $|0-2i|=2$ ו־$|0+i|=1$.
3. המעגל חותך את ציר ה־x בנקודות $D(2,0)$ ו־$E(8,0)$ — זה הקוטר DE מהוכחה 2. נסמן $B(b,0)$. מ־$\frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EB}$ נקבל $\frac{2}{b-2}=\frac{8}{8-b}$, כלומר $2(8-b)=8(b-2)$, ומכאן $b=3.2$. לכן $B(3.2,\,0)$ ו־$k=\frac{2}{1.2}=\frac{5}{3}$. בדיקה בנוסחאות של המשפט, עם $d=3.2$, נותנת $m=\frac{\frac{25}{9}\cdot 3.2}{\frac{16}{9}}=5$ ו־$R=\frac{\frac{5}{3}\cdot 3.2}{\frac{16}{9}}=3$, כמו במעגל הנתון.
4. לא. "ליירט" פירושו להגיע לנקודה של הדרך BQ לפני B (או יחד איתה). אבל העיגול קמור: הקטע בין שתי נקודות שבתוכו נמצא כולו בתוכו. B ו־Q בתוך המעגל, ולכן כל נקודה T של הדרך BQ בתוך המעגל, ושם $TA>2\cdot TB$. כלומר B מגיעה לכל נקודה של הדרך לפני ש־A יכולה להגיע אליה.
5. $m=\frac{\frac{1}{4}\cdot 3}{\frac{1}{4}-1}=-1$ ו־$R=\frac{\frac{1}{2}\cdot 3}{\left|\frac{1}{4}-1\right|}=2$, כלומר $(x+1)^2+y^2=4$. המעגל מקיף עכשיו את A. זה הגיוני: $PA=\frac{1}{2}\cdot PB$ פירושו $PB=2\cdot PA$ — אותו מרוץ, כש־A ו־B מחליפות תפקידים. לכן זה השיקוף של המעגל $(x-4)^2+y^2=4$ באנך האמצעי $x=1.5$.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את המסמך בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנו קטעים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.