

זוויות במרחב

מאיפה מגיע ה- $\sin$ בנוסחת הזווית בין ישר למישור, למה בין שני מישורים מופיע $\cos$ – ומה המרחק בין שני מישורים מקבילים

כ-25 דקות קריאה

6 הוכחות

וקטורים במרחב

5 יח"ל

כיתה י"ב

מה כדאי לדעת קודם

- מכפלה סקלרית וזווית בין וקטורים.
- משוואת מישור והנורמל שלו.
- הצגה פרמטרית של ישר.
- מרחק של נקודה ממישור.
- $\cos^{-1} \sin$ במשולש ישר-זווית.

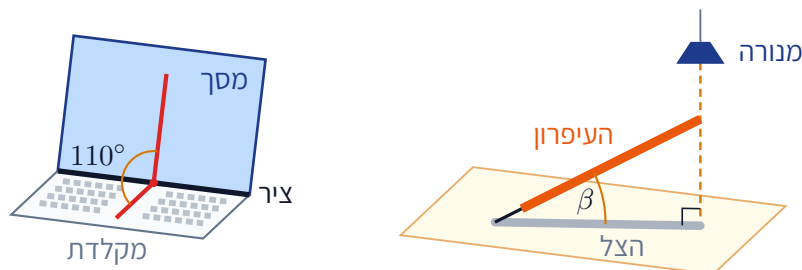
מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: עיפרון, צל ומחשב נייד.
- הגדרות מדויקות לשתי הזוויות.
- למה בין ישר למישור יש $\sin$: שתי הוכחות.
- למה בין שני מישורים יש $\cos$: שתי הוכחות.
- המרחק בין מישורים מקבילים: שתי הוכחות.
- קובייה, פירמידה, טעויות נפוצות ושאלות.

1 האינטואיציה: עיפרון, צל ומחשב נייד

האינטואיציה

הניחו עיפרון כך שהחוד שלו נוגע בשולחן והוא נשען באלכסון, ודמיינו מנורה שתלויה בדיוק מעל הקצה העליון שלו. העיפרון מטיל על השולחן צל: קטע שמתחיל בחוד ונגמר בדיוק מתחת לקצה העליון. **הזווית בין העיפרון לשולחן** היא הזווית בין העיפרון לצל שלו. עיפרון שכמעט שוכב יוצר זווית קטנה וצל ארוך; עיפרון זקוף יוצר זווית ישרה, והצל שלו מתכווץ לנקודה. עכשיו פתחו מחשב נייד והסתכלו עליו מהצד, כך שקו הראייה מקביל לציר שסביבו המסך מסתובב. המסך והמקלדת נראים כשני קטעים, ורואים את הזווית שביניהם. כך מודדים **זווית בין שני מישורים**: בחתך שניצב לישר שבו הם נפגשים. בשני המקרים זווית "במרחב" הופכת לזווית רגילה בין שני ישרים. ואת החישוב, כפי שנראה, עושה בשבילנו וקטור אחד: הנורמל.



סרטוט 1: מימין: העיפרון, הצל שלו והזווית β . משמאל: את הפתיחה מודדים בין שני קטעים שניצבים לציר.

דוגמה מספרית קטנה

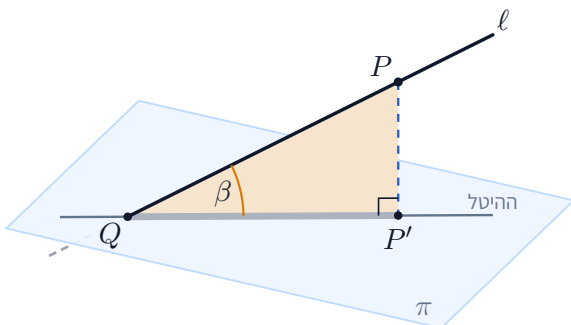
עיפרון שאורכו 13 ס"מ נשען על השולחן, והקצה העליון שלו בגובה 5 ס"מ. העיפרון, הצל והקו האנכי מהקצה אל השולחן יוצרים משולש ישר-זווית, ולכן אורך הצל הוא $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ ס"מ, ו- $\sin \beta = \frac{5}{13}$ (הגובה חלקי אורך העיפרון), כלומר $\beta \approx 22.6^\circ$. שימו לב: את $\sin \beta$ קובע ה**גובה** של הקצה – המרחק שלו מהמישור. זה הרמז הראשון לכך שבנוסחה של ישר ומישור יופיע דווקא $\sin$.

2 ההגדרות

תזכורת: הזווית בין שני ישרים

שני ישרים נחתכים יוצרים ארבע זוויות: שתיים בגודל θ ושתיים בגודל $180^\circ - \theta$. **הזווית בין הישרים** היא הזווית שאינה קהה, כלומר $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ (ולישרים מקבילים $\theta = 0^\circ$). אם $\underline{e}_1$ ו- $\underline{e}_2$ הם וקטורי כיוון של הישרים, הזווית γ בין הווקטורים היא θ או $180^\circ - \theta$, בהתאם לכיוונים שלהם. בשני המקרים $|\cos \gamma| = \cos \theta$, ולכן לפי המכפלה הסקלרית (ראו את המסמך "המכפלה הסקלרית" בסדרה) $\cos \theta = \frac{|\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2|}{|\underline{e}_1| \cdot |\underline{e}_2|}$. את הערך המוחלט הזה נפגוש בכל הנוסחאות: הוא "מתקן" את הזווית בין הווקטורים לזווית בין הישרים.

הזווית בין ישר למישור



סרטוט 2: ההיטל QP' של הישר ℓ על המישור π , והזווית β ביניהם.

ישר ℓ חותך מישור π בנקודה Q , ואינו ניצב לו. ניקח נקודה $P \neq Q$ על ℓ , נוריד ממנה אנך למישור, ונסמן את עקב האנך ב- P' . הישר QP' נקרא **ההיטל** של ℓ על π – "הצל" מהאינטואיציה.

נקודה אחרת על ℓ נותנת אותו היטל: כל האנכים מ- ℓ מקבילים, ולכן הם מונחים עם ℓ במישור אחד, והעקבים שלהם – על הישר שבו המישור הזה חותך את π .

הזווית בין ישר למישור היא הזווית β בין הישר לבין ההיטל שלו על המישור. לישר שניצב למישור (ההיטל שלו הוא נקודה) מגדירים $\beta = 90^\circ$, ולישר שמקביל למישור או מונח בו מגדירים $\beta = 0^\circ$. לכן תמיד $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$.

למה דווקא הצל? כי β היא **הקטנה ביותר** מבין הזוויות ש- ℓ יוצר עם ישרים במישור שעוברים דרך Q . יהי m ישר כזה, ו- F עקב האנך מ- P אל m . האנך PP' הוא הקטע הקצר ביותר מ- P אל המישור, ולכן $PF \geq PP'$. למשולשים ישרי-הזווית PFQ ו- $PP'Q$ יש אותו יתר, PQ , ולכן הסינוס של הזווית בין ℓ ל- m הוא $\frac{PF}{PQ} \geq \frac{PP'}{PQ} = \sin \beta$, כלומר הזווית הזאת אינה קטנה מ- β . העיפרון "קרוב" לצל שלו יותר מאשר לכל קו אחר על השולחן שעובר דרך החוד.

הזווית בין שני מישורים

שני מישורים שאינם מקבילים נחתכים בישר. נסמן אותו ב- L , ונבחר עליו נקודה O . בכל אחד מהמישורים נעביר דרך O ישר שניצב ל- L : הישר m_1 במישור π_1 , והישר m_2 במישור π_2 (ראו סרטוט 5). **הזווית בין המישורים** היא הזווית α בין הישרים m_1 ו- m_2 .

- לא משנה איזו נקודה O בוחרים: בנקודה אחרת על L מתקבלים ישרים שמקבילים ל- m_1 ול- m_2 , ולכן אותה זווית.
- כמו בין שני ישרים, לוקחים את הזווית שאינה קהה: $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$. המסך של המחשב הנייד בסרטוט 1 נפתח בזווית של 110° , אבל הזווית בין **המישורים** של המסך והמקלדת היא 70° .
- למישורים מקבילים מגדירים $\alpha = 0^\circ$. מישורים שהזווית ביניהם 90° נקראים **ניצבים** זה לזה.

3 שלוש הנוסחאות

בנוסחאות, $\underline{u}$ הוא וקטור כיוון של ישר, ו- $\underline{n}$ הוא **וקטור נורמל** של מישור: וקטור שונה מווקטור האפס שניצב למישור. למישור $ax + by + cz + d = 0$ הנורמל הוא $\underline{n} = (a, b, c)$ (ראו את המסמך "משוואת המישור במרחב"; כאן המקדמים באותיות קטנות, כמו בדף הנוסחאות).

שלוש הנוסחאות

- **ישר ומישור:** β היא הזווית בין ישר שווקטור הכיוון שלו $\underline{u}$ לבין מישור שהנורמל שלו $\underline{n}$.
- **שני מישורים:** α היא הזווית בין מישור שהנורמל שלו $\underline{n}_1$ לבין מישור שהנורמל שלו $\underline{n}_2$.
- **מישורים מקבילים:** h הוא המרחק בין המישורים $ax + by + cz + d_1 = 0$ ו- $ax + by + cz + d_2 = 0$, עם אותם מקדמים a, b, c .

$$h = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

מישורים מקבילים

$$\cos \alpha = \frac{|\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2|}{|\underline{n}_1| \cdot |\underline{n}_2|}$$

שני מישורים

$$\sin \beta = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{n}|}{|\underline{u}| \cdot |\underline{n}|}$$

ישר ומישור

במילים: הסינוס של הזווית בין ישר למישור שווה לערך המוחלט של הקוסינוס של הזווית בין $\underline{u}$ ל- $\underline{n}$. הזווית בין שני מישורים נקבעת לפי הזווית בין הנורמלים. והמרחק בין מישורים מקבילים הוא הערך המוחלט של ההפרש בין המספרים החופשיים, חלקי אורך הנורמל.

שלוש הנוסחאות מופיעות בדף הנוסחאות של 5 יח"ל, עם אותם סימנים: β לזווית בין ישר למישור, ו- α לזווית בין שני מישורים.

4 הזווית בין ישר למישור: למה $\sin$?

קודם כול: המקרים המיוחדים

ניקח ישר בהצגה פרמטרית, $\ell: \underline{x} = \underline{OA} + t \cdot \underline{u}$, שבו $A(x_A, y_A, z_A)$ ו- $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ (ראו את המסמך "משוואת הישר במרחב" בסדרה), ומישור $\pi: ax + by + cz + d = 0$. נציב במשוואת המישור נקודה כללית של הישר, $(x_A + tu_1, y_A + tu_2, z_A + tu_3)$, ונסדר. המקדם של t הוא $au_1 + bu_2 + cu_3 = \underline{u} \cdot \underline{n}$, ולכן מתקבלת המשוואה

$$(ax_A + by_A + cz_A + d) + t(\underline{u} \cdot \underline{n}) = 0$$

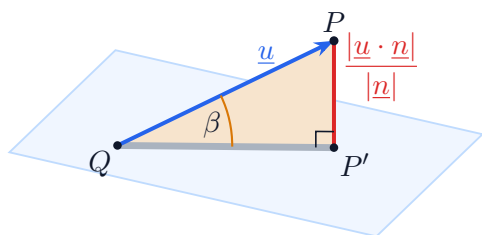
- אם $\underline{u} \cdot \underline{n} \neq 0$, יש לה פתרון אחד בדיוק: הישר חותך את המישור בנקודה אחת.

- מכאן והלאה נניח שהישר חותך את המישור בנקודה Q ואינו ניצב לו.

טענה

© אור בן שטרית · אינסוף

הוכחה 2: בעזרת המרחק מהמישור



$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

סרטוט 4: היתר הוא $|\underline{u}|$, והניצב PP' הוא המרחק של P מהמישור.

הרעיון באותו משולש, $\sin \beta = \frac{PP'}{PQ}$: הניצב שמול β חלקי היתר. את הניצב PP' , המרחק של P מהמישור, נחשב בנוסחה מהמסמך "מרחק נקודה ממישור". נבחר את P "צעד אחד" של $\underline{u}$ אחרי Q , כלומר $\underline{OP} = \underline{OQ} + \underline{u}$

$$P(x_Q + u_1, y_Q + u_2, z_Q + u_3)$$

$$\underline{QP} = \underline{u} \text{ והיתר הוא } |\underline{u}|. PQ =$$

נימוק	טענה
Q על המישור	$ax_Q + by_Q + cz_Q + d = 0$ ①
המרחק של P מהמישור	$PP' = \frac{ a(x_Q + u_1) + b(y_Q + u_2) + c(z_Q + u_3) + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ ②
פותרים סוגריים ומסדרים: סכום האיברים $ax_Q + by_Q + cz_Q + d$ הוא 0 (צעד 1)	$PP' = \frac{ 0 + (au_1 + bu_2 + cu_3) }{ n } = \frac{ \underline{u} \cdot \underline{n} }{ n }$ ③
ב- $\triangle PP'Q$: הניצב שמול β חלקי היתר $PQ = \underline{u} $	$\sin \beta = \frac{PP'}{PQ} = \frac{ \underline{u} \cdot \underline{n} }{ \underline{u} \cdot \underline{n} }$ ④

מש"ל

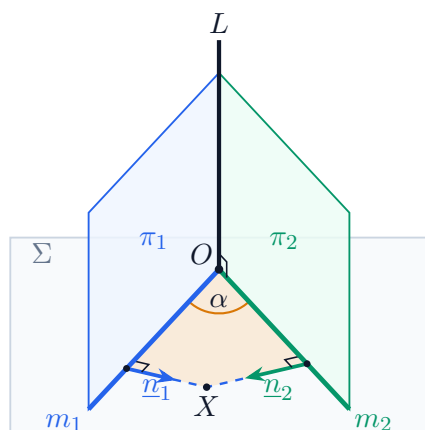
שתי הוכחות, משולש אחד. שתי ההוכחות משתמשות באותו משולש ישר-זווית, $PP'Q$, ונבדלות במה שהן לוקחות מהניצב PP' . הוכחה 1 משתמשת בכיוון שלו (כיוון הנורמל) ובזווית שבקודקוד P ; הוכחה 2 משתמשת באורך שלו, שמתקבל מנוסחת המרחק, בלי זווית בין וקטורים. הוכחה 2 גם מסבירה את הרמז מהאינטואיציה: $\sin \beta$ הוא הגובה של P מעל המישור, חלקי QP .

5 הזווית בין שני מישורים: למה $\cos$?

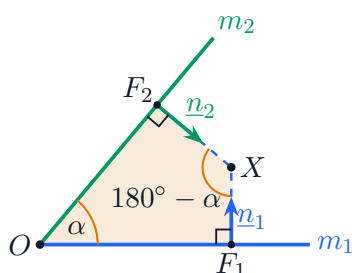
למישורים מקבילים יש נורמלים מקבילים, ואז $|\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2| = |\underline{n}_1| \cdot |\underline{n}_2|$ ונותרת $\cos \alpha = 1$, כלומר $\alpha = 0^\circ$. כמו בהגדרה. מכאן והלאה נניח שהמישורים נחתכים בישר L . בשתי ההוכחות נשתמש בעובדה **שני הנורמלים ניצבים ל- L** : נורמל ניצב לכל ישר שמונח במישור שלו, ו- L מונח בשני המישורים.

הוכחה 1: חתך שניצב לישר החיתוך

הרעיון נחתוך את שני המישורים במישור שלישי, Σ , שניצב ל- L . דמיינו ספר פתוח שעומד על שולחן: השדרה L ניצבת לשולחן Σ , והדפים פוגשים את השולחן בשני קווים. על השולחן נראה תמונה מישורית רגילה: שני ישרים, ושני נורמלים שניצבים להם.



סרטוט 5: ספר פתוח על שולחן: הדפים π_1 ו- π_2 , השדרה L , והשולחן Σ שניצב לה.



סרטוט 6: המישור Σ במבט מלמעלה: המרובע OF_1XF_2 .

נבחר נקודה O על L , ויהי Σ המישור שעובר דרך O וניצב ל- L .

- Σ חותך את π_1 ואת π_2 בישרים m_1 ו- m_2 , שעוברים דרך O וניצבים ל- L (כי הם ב- Σ): אלה הישרים מההגדרה, והזווית ביניהם היא α .
- הנורמל של Σ הוא וקטור הכיוון של L , ו- n_1 ניצב לו, ולכן n_1 מקביל ל- Σ . בנוסף $n_1 \perp m_1$, כי m_1 מונח ב- π_1 .
- באותו אופן, n_2 מקביל ל- Σ וניצב ל- m_2 .

נבחר ב- Σ נקודה X בתוך הזווית α , ונוריד ממנה אנכים: XF_1 אל m_1 ו- XF_2 אל m_2 . ב- Σ יש רק כיוון אחד שניצב ל- m_1 , ולכן XF_1 הוא בכיוון של n_1 . מאותה סיבה, XF_2 בכיוון של n_2 .

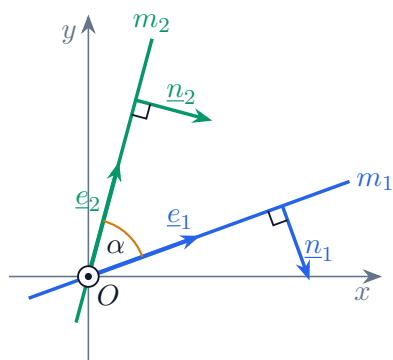
נשאר מרובע במישור, עם שתי זוויות ישרות. בסרטוט 6 רואים את Σ "מלמעלה", בלי עיוות של הזוויות.

נימוק	טענה
XF_1 ו- XF_2 הם אנכים	$\angle OF_1X = \angle OF_2X = 90^\circ$ (1)
סכום הזוויות במרובע OF_1XF_2	$\angle F_1XF_2 = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$ (2)
הזווית בין הישרים XF_1 ו- XF_2 היא α (הזווית שאינה קהה מבין α ו- 180°), ווקטורי הכיוון שלהם הם n_1 ו- n_2 (התזכורת בפרק 2)	$\cos \alpha = \frac{ n_1 \cdot n_2 }{ n_1 \cdot n_2 }$ (3)

■ מש"ל

הוכחה 2: ישר החיתוך הוא ציר ה- z

הרעיון נבחר את מערכת הצירים בחוכמה: ראשית הצירים O על L , וציר ה- z לאורך L . במערכת כזאת המשוואות של שני המישורים פשוטות מאוד, ואת m_1 ו- m_2 אפשר לכתוב במפורש. **מה מקבלים בלי הוכחה:** אפשר למקם מערכת צירים (ניצבים זה לזה, עם אותה יחידת אורך) בכל מקום ובכל כיוון, ואורכים וזוויות לא תלויים בבחירה הזאת. גם אגף ימין של הנוסחה אינו תלוי בבחירה: לפי התזכורת, הוא הקוסינוס של הזווית בין הישרים שבכיווני הנורמלים — גודל גאומטרי.



סרטוט 7: המישור Σ ($z = 0$) מלמעלה; ציר ה- z ניצב לדף ב- O . הנורמל $\underline{n}_1$ ניצב ל- m_1 , ו- $\underline{e}_1$ מונח עליו.

ציר ה- z מונח במישור π_1 , ולכן כל הנקודות $(0, 0, t)$ מקיימות את משוואתו: $c_1 t + d_1 = 0$ לכל t . עבור $t = 0$ מקבלים $d_1 = 0$, ועבור $t = 1$ מקבלים $c_1 = 0$. לכן

$$\pi_1 : a_1 x + b_1 y = 0 \quad \underline{n}_1 = (a_1, b_1, 0)$$

ובאותו אופן $\pi_2 : a_2 x + b_2 y = 0$ ו- $\underline{n}_2 = (a_2, b_2, 0)$. הנורמלים אינם וקטור האפס, ולכן $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$, וכך גם (a_2, b_2) . המישור Σ הוא $z = 0$.

טענה	נימוק
① $m_1 : \underline{x} = t \cdot \underline{e}_1, \quad \underline{e}_1 = (-b_1, a_1, 0)$	הרכיב השלישי הוא 0, ולכן הישר מונח ב- Σ . ו- $a_1(-tb_1) + b_1(ta_1) = 0$ ולכן הוא מונח גם ב- π_1
② $m_2 : \underline{x} = t \cdot \underline{e}_2, \quad \underline{e}_2 = (-b_2, a_2, 0)$	אותו נימוק
③ $\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = \underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2, \quad \underline{e}_1 = \underline{n}_1 , \quad \underline{e}_2 = \underline{n}_2 $	לפי רכיבים: $\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = b_1 b_2 + a_1 a_2$ ו- $ \underline{e}_1 = \sqrt{b_1^2 + a_1^2}$
④ $\cos \alpha = \frac{ \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 }{ \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 } = \frac{ \underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 }{ \underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 }$	α היא הזווית בין m_1 ל- m_2 (התזכורת), וצעד 3

מש"ל

מה קרה כאן? המעבר מ- (a, b) ל- $(-b, a)$ הוא סיבוב ב- 90° – כמו במסמך "תנאי הניצבות לשני ישרים", שבו $(1, m)$ הופך ל- $(-m, 1)$. הישרים m_1 ו- m_2 הם הנורמלים אחרי סיבוב, ולכן יוצרים אותה זווית: זה הרעיון של הוכחה 1, הפעם כחישוב.

6 המרחק בין שני מישורים מקבילים

למישורים מקבילים יש נורמלים מקבילים, ולכן תמיד אפשר לכתוב את שניהם עם **אותו** נורמל: כופלים את אחת המשוואות במספר המתאים (למשל, $4x - 2y + 4z + 12 = 0$ ו- $2x - y + 2z + 6 = 0$ הן משוואות של אותו מישור). נניח אפוא שהמישורים הם $\pi_1 : ax + by + cz + d_1 = 0$ ו- $\pi_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$. **המרחק בין המישורים** הוא המרחק של נקודה כלשהי של π_1 מ- π_2 . נוכיח שהוא באמת אינו תלוי בנקודה שבחרים.

הוכחה 1: נקודה אחת בנוסחת המרחק

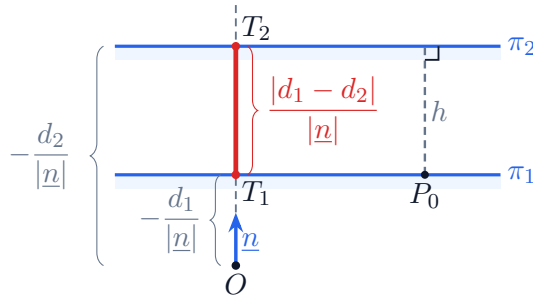
תהי $P_0(x_0, y_0, z_0)$ נקודה כלשהי של π_1 . היא מקיימת את משוואת π_1 , כלומר $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d_1$. נציב זאת בנוסחת המרחק h של P_0 מ- π_2 :

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-d_1 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

בתוצאה לא נשאר זכר ל- x_0 , ל- y_0 ול- z_0 : כל הנקודות של π_1 נמצאות באותו מרחק מ- π_2 . (כך חישבנו את המרחק גם במסמך "מרחק נקודה ממישור").

מש"ל

הוכחה 2: הולכים מהראשית לאורך הנורמל



סרטוט 8: מבט מהצד: הקטע T_1T_2 על הנורמל שעובר דרך O , והאנך מ- P_0 (הוכחה 1).

הרעיון נצא מראשית הצירים ונלך לאורך הישר שבכיוון $\underline{n}$. הישר הזה ניצב לשני המישורים, ולכן הקטע שלו שבין המישורים הוא בדיוק המרחק ביניהם. הישר הוא $\underline{x} = t \cdot \underline{n} = (ta, tb, tc)$. הוא פוגש את π_1 בנקודה T_1 (עבור $t = t_1$) ואת π_2 בנקודה T_2 (עבור $t = t_2$). הקטע T_1T_2 ניצב ל- π_2 , ולכן אורכו הוא המרחק של T_1 מ- π_2 .

טענה	נימוק
① $t_1 = -\frac{d_1}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad t_2 = -\frac{d_2}{a^2 + b^2 + c^2}$	הצבת (ta, tb, tc) ב- π_1 נותנת π_2 גם ב- $t(a^2 + b^2 + c^2) + d_1 = 0$
② $T_1T_2 = t_2 - t_1 \cdot \underline{n} $	$\underline{T_1T_2} = (t_2 - t_1) \cdot \underline{n}$
③ $T_1T_2 = \frac{ d_1 - d_2 }{ \underline{n} ^2} \cdot \underline{n} = \frac{ d_1 - d_2 }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$	הצבת צעד 1, ו- $ \underline{n} ^2 = a^2 + b^2 + c^2$

מש"ל

מה מסתתר בנוסחה

T_1 נמצאת במרחק $\frac{|d_1|}{|\underline{n}|} = |t_1| \cdot |\underline{n}|$ מהראשית, ולכן $-\frac{d_1}{|\underline{n}|}$ הוא "הגובה" של π_1 מעל הראשית לאורך $\underline{n}$ (שלילי אם מהראשית אל המישור הולכים נגד כיוון $\underline{n}$). המרחק בין מישורים מקבילים הוא **הפרש הגבהים** – ולכן צריך אותו נורמל: את שני הגבהים מודדים באותו "סרגל".

דוגמה. נמצא את המרחק בין המישורים $2x - y + 2z = 3$ ו- $2x - y + 2z = -6$. בצורה $\dots = 0$. "אלה המישורים $2x - y + 2z + 6 = 0$ ו- $2x - y + 2z - 3 = 0$, ולכן המרחק הוא $\frac{|-3-6|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{9}{3} = 3$. בדיקה: הנקודה $(0, -3, 0)$ על המישור הראשון, והמרחק שלה מהשני הוא $\frac{|0+3+0+6|}{3} = 3$.

7 שש ההוכחות במבט אחד

הוכחה 2	הוכחה 1	
באותו משולש: הניצב PP' הוא מרחק של נקודה ממישור	במשולש $PP'Q$ הזווית עם הנורמל משלימה את β ל- 90°	ישר ומישור
מערכת צירים שבה L הוא ציר ה- z	חתך שניצב ל- L , ומרובע עם שתי זוויות ישרות	שני מישורים
הולכים מהראשית לאורך הנורמל	נקודה על π_1 ונוסחת המרחק של נקודה ממישור	מישורים מקבילים

החוט המקשר: בכל שלוש הנוסחאות **הנורמל** עושה את העבודה. בישר ומישור מופיע $\sin$, כי הזווית עם הנורמל **משלימה** את β ל- 90° . בשני מישורים מופיע $\cos$, כי הנורמלים יוצרים **אותה** זווית כמו המישורים. ואת המרחק מודדים לאורך הנורמל.

8 מה עושים עם הנוסחאות?

שימוש 1: קובייה

בקובייה $ABCD A'B'C'D'$ אורך המקצוע 1. נמקם את A בראשית הצירים, ואת שלושת המקצועות שיוצאים ממנו על הצירים:

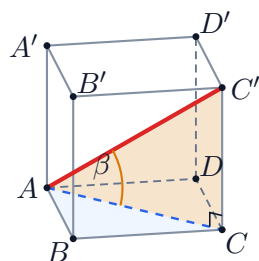
$$B(1, 0, 0) \quad D(0, 1, 0) \quad A'(0, 0, 1) \quad C'(1, 1, 1)$$

הבסיס $ABCD$ מונח במישור $z = 0$, שהנורמל שלו $(0, 0, 1)$.

(א) הזווית בין האלכסון AC' לבסיס. וקטור הכיוון הוא $\underline{AC'} = (1, 1, 1)$ ולכן

$$\sin \beta = \frac{|0 + 0 + 1|}{\sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \beta \approx 35.26^\circ$$

בדיקה בלי וקטורים: ההיטל של AC' על הבסיס הוא האלכסון AC , והגובה הוא $CC' = 1$. במשולש ישר-הזווית ACC' מתקיים $\tan \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ – ויוצאת אותה זווית.

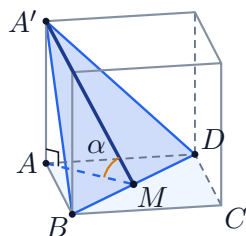


סרטוט 9: האלכסון AC' וההיטל שלו AC על הבסיס.

(ב) הזווית בין המישור $A'BD$ לבסיס. משוואת המישור היא $x + y + z = 1$ (בדקו בשלושת הקודקודים שלו). לכן

$$\cos \alpha = \frac{|(1, 1, 1) \cdot (0, 0, 1)|}{\sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \alpha \approx 54.74^\circ$$

בדיקה בלי וקטורים: תהי M אמצע BD . אז $AM \perp BD$ (אלכסוני ריבוע) ו- $A'M \perp BD$ (המשולש $A'BD$ שווה-צלעות), ולכן לפי ההגדרה $\alpha = \angle A'MA$. במשולש ישר-הזווית $A'MA$ מתקיים $\tan \alpha = \frac{AA'}{AM} = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2}$, ושוב $\alpha \approx 54.74^\circ$.



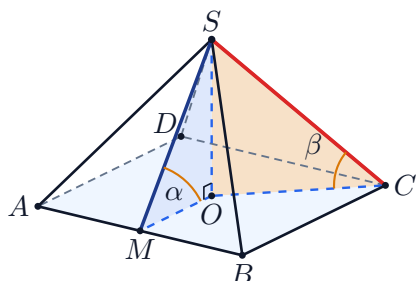
סרטוט 10: המישור $A'BD$ והזווית $\angle A'MA$.

שימו לב: $35.26^\circ + 54.74^\circ = 90^\circ$, כי $(1, 1, 1)$ הוא גם וקטור הכיוון של AC' וגם הנורמל של $A'BD$. ובכלל, הזווית של מישור עם הבסיס והזווית של הנורמל שלו עם הבסיס משלימות זו את זו ל- 90° .

שימוש 2: פירמידה ריבועית ישרה

בסיס הפירמידה $SABCD$ הוא ריבוע שאורך צלעו 6, וגובהה $SO = 4$. נמקם את מרכז הבסיס O בראשית הצירים ואת S על ציר ה- z . הבסיס מונח אז במישור $z = 0$, שהנורמל שלו $(0, 0, 1)$, ושיעורי הקודקודים הם

$$S(0, 0, 4) \quad A(3, -3, 0) \quad B(3, 3, 0) \quad C(-3, 3, 0)$$



(א) **מקצוע צדדי ובסיס.** וקטור הכיוון של המקצוע SC הוא $\underline{CS} = (3, -3, 4)$, ואורכו $\sqrt{34}$:

$$\sin \beta = \frac{|0 + 0 + 4|}{\sqrt{34} \cdot 1} = \frac{4}{\sqrt{34}} \Rightarrow \beta \approx 43.31^\circ$$

בלי וקטורים: ההיטל של SC על הבסיס הוא חצי האלכסון OC , ובמשולש ישר-הזווית SOC מתקיים $\tan \beta = \frac{SO}{OC} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$ — אותה זווית.

סרטוט 11: הפירמידה: β בין המקצוע SC להיטל OC , ו- α בין הפאה SAB לבסיס.

(ב) **פאה צדדית ובסיס.** משוואת המישור SAB היא $4x + 3z = 12$ (בדקו בשלושת הקודקודים שלו), והנורמל שלו $(4, 0, 3)$ באורך 5. לכן

$$\cos \alpha = \frac{|0 + 0 + 3|}{5 \cdot 1} = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha \approx 53.13^\circ$$

בלי וקטורים: תהי M אמצע AB . אז $SM \perp AB$ (המשולש SAB שווה-שוקיים) ו- $OM \perp AB$, ולכן $\alpha = \angle SMO$. במשולש ישר-הזווית SOM מתקיים $SM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, ולכן $\cos \alpha = \frac{OM}{SM} = \frac{3}{5}$.

⚠ טעות נפוצה

- **בלבול בין $\sin$ ל- $\cos$.** בישר ומישור, הוא הקוסינוס של הזווית עם הנורמל. מי שכותב $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ באלכסון הקובייה מקבל 54.74° במקום 35.26° .
- **בלי ערך מוחלט.** עבור המישורים $x + y = 4$ ו- $z - x = 1$ מתקיים $\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 = -1$. בלי ערך מוחלט יוצא $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, כלומר "120°". אבל הזווית בין מישורים לעולם אינה קהה: $\alpha = 60^\circ$.
- **מקדמים פרופורציוניים.** בין $2x - y + 2z - 3 = 0$ ל- $4x - 2y + 4z + 12 = 0$ החישוב "שגוי". קודם מחלקים את המשוואה השנייה ב-2 ומקבלים $2x - y + 2z + 6 = 0$, ורק אז $\frac{|-3-6|}{3} = 5$.

🕒 הידעתם?

ההגדרות שלנו ישנות מאוד. ב"סודות" של אוקלידס (בערך 300 לפני הספירה) שלושת הספרים האחרונים עוסקים בעיקר בגאומטריה של המרחב. בפתח הספר האחד-עשר מוגדרת "הנטייה של ישר אל מישור" (הגדרה 5): מורידים אנך מהקצה של הישר שמורם מעל המישור, מחברים את עקב האנך אל הקצה שעל המישור, והנטייה היא הזווית בין הקו שהתקבל לבין הישר — בדיוק β שבסרטוט 2. בהגדרה 6 מוגדרת "הנטייה של מישור אל מישור": הזווית החדה בין שני ישרים, אחד בכל מישור, שניצבים לישר החיתוך באותה נקודה שלו — כמו אצלנו. אוקלידס כתב בלי וקטורים ובלי שיעורים.

9 בדקו את עצמכם

✓ ארבע שאלות קצרות

- מצאו את הזווית בין הישר $\underline{x} = (0, 1, 2) + t \cdot (1, 0, 1)$ למישור $x + 2y + 2z = 7$.
- הראו שהישר $\underline{x} = (1, 1, 1) + t \cdot (2, 0, -1)$ מקביל למישור $x + 2y + 2z = 0$, ומצאו את המרחק ביניהם.
- בפירמידה משימוש 2, מצאו את הזווית בין המישורים SAB ו- SBC . האם זו הזווית בין הפאות בתוך הפירמידה? (רמז: K עקב הגובה מ- A אל SB ; משפט הקוסינוסים ב- $\triangle AKC$).
- מה קיבלתם בתיבת "עצרו ובדקו", ולמה?

תשובות

- $\underline{u} = (1, 0, 1)$ ו- $\underline{n} = (1, 2, 2)$ ולכן $\sin \beta = \frac{|1+0+2|}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ו- $\beta = 45^\circ$.
- $(1, 2, 2) \cdot (2, 0, -1) = 2 + 0 - 2 = 0$, ולכן הישר מקביל למישור או מונח בו. הצבת הנקודה $(1, 1, 1)$ שלו באגף שמאל של משוואת המישור נותנת $1 + 2 + 2 = 5 \neq 0$, ולכן הישר מקביל למישור, וכל נקודה שלו נמצאת במרחק ממנו. $\frac{|5|}{3} = \frac{5}{3}$.
- משוואת המישור SBC היא $4y + 3z = 12$ (בדקו בשלושת הקודקודים שלו). הנורמלים $(4, 0, 3)$ ו- $(0, 4, 3)$ נותנים $\cos \alpha = \frac{9}{25}$, כלומר $\alpha \approx 68.9^\circ$. ובתוך הפירמידה: שטח $\triangle SAB$ הוא $SB = \sqrt{34}$ ו- $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15$, ולכן $AK = \frac{30}{\sqrt{34}}$. מהסימטריה $CK \perp SB$ ו- $CK = AK$, ולכן הזווית בין הפאות היא $\angle AKC$. לפי משפט הקוסינוסים, ובעזרת $AC = 6\sqrt{2}$, מתקבל $\cos \angle AKC = \frac{2AK^2 - AC^2}{2AK^2} = 1 - \frac{72 \cdot 34}{1800} = -\frac{9}{25}$, ולכן $\angle AKC \approx 111.1^\circ = 180^\circ - 68.9^\circ$. הזווית בתוך הפירמידה קהה, והנוסחה נותנת את המשלימה שלה ל- 180° .
- עבור $\underline{u} = (0, 3, 4)$ מקבלים $\cos \gamma = \frac{4}{5}$, כלומר $\gamma \approx 36.87^\circ$. עבור $\underline{u} = (0, 3, 4)$ מקבלים $\cos \gamma = -\frac{4}{5}$, כלומר $\gamma \approx 143.13^\circ$. בשני המקרים $\sin \beta = \frac{4}{5}$ ו- $\beta \approx 53.13^\circ$: הזווית γ השתנתה $(90^\circ - \beta)$ או $(90^\circ + \beta)$, אבל β לא – זה אותו ישר. את ההבדל מבטל הערך המוחלט שבנוסחה: בשני המקרים $|\cos \gamma| = \sin \beta$.