אינסוף מתמטיקה

כפל מרוכבים ומשפט דה מואבר

למה בכפל של מספרים מרוכבים כופלים את האורכים ומחברים את הזוויות — ואיך השורשים של 1 יוצרים מצולע משוכלל

כיתה י״ב | 5 יח״ל | מספרים מרוכבים | 6 הוכחות | כ־25 דקות קריאה

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: למה כפל ב־i הוא רבע סיבוב.
- כפל בהצגה הקוטבית בשתי הוכחות: באלגברה, ובגאומטריה בלי אף זהות טריגונומטרית.
- חילוק, ומשפט דה מואבר: הוכחה באינדוקציה, והרחבה לחזקות שליליות.
- שימושים: נוסחאות הזווית המשולשת, הפתרונות של $z^n = w$ כקודקודים של מצולע משוכלל, וסכום שורשי היחידה.
- טעויות נפוצות, היסטוריה ושאלות לבדיקה עצמית.

מה כדאי לדעת קודם

- מספרים מרוכבים: $i^2 = -1$, וחיבור וכפל של מספרים מהצורה $a + bi$.
- מישור גאוס: המספר $a + bi$ הוא הנקודה (a, b).
- $\sin$ ו־$\cos$ של כל זווית (המסמך ״מעגל היחידה״).
- להוכחה 1: נוסחאות הסכום של $\sin$ ושל $\cos$.
- אינדוקציה, וסכום סדרה הנדסית.

1 האינטואיציה: כפל ב־i הוא רבע סיבוב

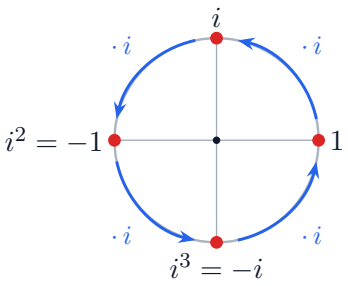
האינטואיציה

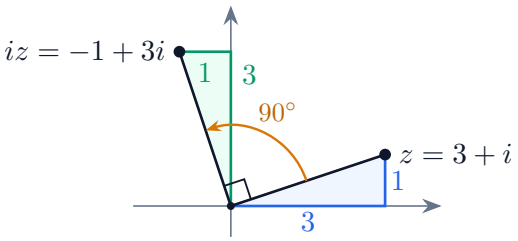
את החיבור של מספרים מרוכבים קל לדמיין במישור גאוס: כשמוסיפים $1 + 2i$ למספר כלשהו, הנקודה שלו זזה 1 ימינה ו־2 למעלה. אבל מה עושה **כפל**? נתחיל מהמספר i, ונכפול בו את 1 שוב ושוב:

$$1 \xrightarrow{\cdot i} i \xrightarrow{\cdot i} -1 \xrightarrow{\cdot i} -i \xrightarrow{\cdot i} 1$$

בסרטוט 1 (מימין) רואים מה קורה: כל כפל ב־i מסובב את הנקודה **רבע סיבוב** סביב הראשית, נגד כיוון השעון. אחרי ארבעה כפלים היא חוזרת למקום שבו התחילה.
האם זה נכון גם לנקודות שאינן על הצירים? ננסה: $i \cdot (3 + i) = 3i + i^2 = -1 + 3i$. בסרטוט 1 (משמאל) רואים שהנקודה $(-1, 3)$ היא בדיוק הנקודה $(3, 1)$ אחרי סיבוב של $90°$ סביב הראשית: המשולש ישר־הזווית שניצבין 3 ו־1 ״נשכב על הצד״. ואם כופלים את $3 + i$ ב־$2i$? מקבלים $-2 + 6i$: אותו רבע סיבוב, ועוד מתיחה פי 2.
גם ״מינוס כפול מינוס״ מקבל כאן משמעות: כפל ב־-1 מעביר כל נקודה z לנקודה $-z$, שנמצאת מעברה השני של הראשית — חצי סיבוב. שני חצאי סיבוב הם סיבוב שלם, ולכן $(-1) \cdot (-1) = 1$.

© אור בן שטרית · אינסוף





סרטוט 1: מימין: החזקות של i — כל כפל ב־i הוא רבע סיבוב. משמאל: המשולש הכחול הסתובב ב־ $90°$ והפך לירוק, והקודקוד $3 + i$ עבר ל־$-1 + 3i$.

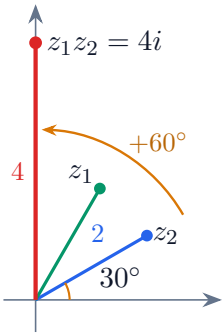
דוגמה: אורכים וזוויות

לנקודה $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ יש אורך 2 וזווית $60°$, ולנקודה $z_2 = \sqrt{3} + i$ יש אורך 2 וזווית $30°$. נכפול:

$$(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = \sqrt{3} + i + 3i + i^2\sqrt{3} = 4i.$$

לתוצאה $4i$ יש אורך $4 = 2 \cdot 2$ וזווית $90° = 60° + 30°$.

הניחוש: בכפל של מספרים מרוכבים **האורכים נכפלים והזוויות מתחברות**. במסמך הזה נוכיח אותו בשתי דרכים, ונראה מה אפשר לעשות איתו.



סרטוט 2: $z_1 z_2$ הוא z_2 אחרי סיבוב ב־ $60°$ (הזווית של z_1) ומתיחה פי 2 (האורך של z_1).

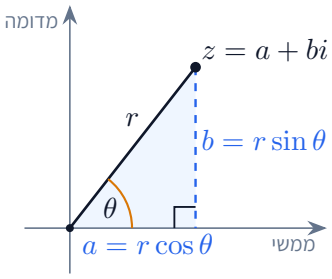
2 תזכורת: ההצגה הקוטבית

מספר מרוכב $z = a + bi$ הוא הנקודה (a, b) במישור גאוס. את הנקודה הזאת אפשר לתאר גם לפי **המרחק** שלה מהראשית ולפי **הכיוון** שלה:

- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ הוא **הערך המוחלט** של z: המרחק שלו מהראשית.
- θ היא **הזווית** של z (יש שקוראים לה הארגומנט): הזווית מהחלק החיובי של הציר הממשי אל הקטע שמחבר את הראשית ל־z, נגד כיוון השעון.

לפי ההגדרה של $\sin$ ו־$\cos$ במעגל היחידה, $a = r\cos\theta$ ו־$b = r\sin\theta$. לכן

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$



סרטוט 3: ההצגה הקוטבית: מרחק r וזווית θ.

לכתיבה הזאת קוראים **ההצגה הקוטבית** של z, ולכתיבה $a + bi$ — **ההצגה האלגברית**. שלוש הערות:

- **הזווית אינה יחידה.** θ ו־ $\theta + 360°$ מתארות אותו כיוון, ולכן גם אותו מספר. אפשר להוסיף לזווית כל כפולה שלמה של $360°$.
- **תמיד** $r > 0$**.** למספר 0 אין כיוון, ולכן אין לו הצגה קוטבית.

- **קיצור.** בדף הנוסחאות ובשאלוני הבגרות כותבים $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, וספרי לימוד רבים מקצרים ל־$r\operatorname{cis}\theta$. גם המשפטים במסמך כתובים במלואם, ובחישובים נשתמש לפעמים בקיצור. המספר $\operatorname{cis}\theta$ הוא הנקודה של מעגל היחידה שזוויתה θ, ולכן $|\operatorname{cis}\theta| = 1$.

3 המשפט: כפל בהצגה הקוטבית

⬟ כפל בהצגה הקוטבית

אם $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ו־$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, אז

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big)}$$

ובקיצור: $r_1\operatorname{cis}\theta_1 \cdot r_2\operatorname{cis}\theta_2 = r_1 r_2\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)$.

במילים: בכפל של שני מספרים מרוכבים **הערכים המוחלטים נכפלים והזוויות מתחברות**. כלומר $|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$, והזווית של $z_1 z_2$ היא $\theta_1+\theta_2$.

ובשפה של גאומטריה: כפל ב־z_1 **מסובב** כל נקודה סביב הראשית בזווית θ_1, **ומותח** אותה מהראשית פי r_1 (כש־$r_1 < 1$ זה בעצם כיווץ). בדוגמה של סרטוט 2: $2\operatorname{cis}30^\circ \cdot 2\operatorname{cis}60^\circ = 4\operatorname{cis}90^\circ = 4i$.

4 הוכחה 1: פותחים סוגריים

הרעיון נפתח את הסוגריים במכפלה $\operatorname{cis}\theta_1 \cdot \operatorname{cis}\theta_2$ (סרטוט 4), נאסוף את החלק הממשי ואת החלק המדומה, ונזהה בהם את נוסחאות הסכום של cos ושל sin (ראו את המסמך "נוסחאות סכום והפרש זוויות"):

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$\times$	$\cos\theta_2$	$i\sin\theta_2$
$\cos\theta_1$	$\cos\theta_1\cos\theta_2$	$i\cos\theta_1\sin\theta_2$
$i\sin\theta_1$	$i\sin\theta_1\cos\theta_2$	$-\sin\theta_1\sin\theta_2$

סרטוט 4: פתיחת הסוגריים: מכל סוגריים בוחרים מחובר אחד. בכחול — המכפלות הממשיות (המינוס בא מ־$i\cdot i = i^2 = -1$), ובירוק — המכפלות המדומות.

טענה	נימוק
(1) $z_1 z_2 = r_1 r_2 \cdot \operatorname{cis}\theta_1 \cdot \operatorname{cis}\theta_2$	בכפל מותר לשנות את סדר הגורמים
(2) החלק הממשי של $\operatorname{cis}\theta_1 \cdot \operatorname{cis}\theta_2$ הוא $\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$	התאים הכחולים בטבלה
(3) החלק המדומה שלו הוא $\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2$	התאים הירוקים בטבלה
(4) $\operatorname{cis}\theta_1 \cdot \operatorname{cis}\theta_2 = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$	נוסחאות הסכום, עם $\alpha = \theta_1$ ו־$\beta = \theta_2$
(5) $z_1 z_2 = r_1 r_2\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)$	הצבה של צעד 4 בצעד 1

מש"ל ■

ההוכחה קצרה, אבל כל העבודה הקשה מתחבאת בנוסחאות הסכום, שקיבלנו כאן מוכנות. ההוכחה הבאה לא משתמשת בהן בכלל — ולכן בסוף נוכל אפילו להוכיח אותן בעזרתה.

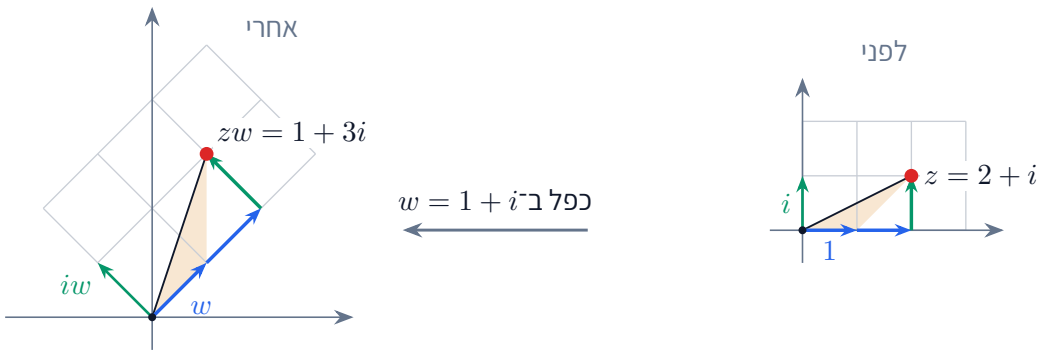
5 הוכחה 2: הרשת המסתובבת — בלי זהויות טריגונומטריות

הרעיון נבדוק מה הכפל ב־w עושה ל"רשת המשבצות" של מישור גאוס. נגלה שהוא מסובב את כל הרשת סביב הראשית ומותח אותה — ולכן מסובב ומותח כל נקודה.

נניח ש־$w \neq 0$ (אחרת $zw = 0$, ואין מה להוכיח), ונכתוב $w = \rho \operatorname{cis} \varphi$ (האותיות היווניות רו ופי). נסמן ב־T את הפעולה "סיבוב סביב הראשית בזווית φ, ואחריו מתיחה מהראשית פי ρ" — כמו שמסובבים ומגדילים תמונה במחשב. T מעבירה את הנקודה שמרחקה r וזוויתה θ לנקודה שמרחקה ρr וזוויתה $\theta + \varphi$. נוכיח ש־$T(z) = zw$ לכל z; מזה נובע המשפט.

כלל הרשת. T מסובבת כל קטע במישור בזווית φ וכופלת את אורכו ב־ρ (זו עובדה גאומטרית על סיבוב ועל מתיחה, ונקבל אותה בלי הוכחה). המספר $z = a + bi$ הוא סוף המסלול "a צעדים לאורך הווקטור 1, ואחריהם b צעדים לאורך הווקטור i" (צעד שלילי הוא צעד אחורה). T הופכת את המסלול הזה למסלול "a צעדים לאורך $T(1)$, ואחריהם b צעדים לאורך $T(i)$". לכן (גם בסיבוב בלי מתיחה, כש־$\rho = 1$):

$$T(a + bi) = a \cdot T(1) + b \cdot T(i).$$



סרטוט 5: מימין: המסלול אל $z = 2 + i$ — שני צעדים לאורך 1 (בכחול) וצעד אחד לאורך i (בירוק). משמאל: אחרי כפל ב־$w = 1 + i$ כל הרשת הסתובבה ב־$45°$ ונמתחה פי $\sqrt{2}$, ואותו מסלול מוביל אל $zw = 1 + 3i$.

	טענה	נימוק
1	כפל ב־i הוא סיבוב של $90°$	סיבוב כזה מעביר את 1 ל־i ואת i ל־-1. לפי כלל הרשת הוא מעביר את $a + bi$ ל־$a \cdot i + b \cdot (-1) = i(a + bi)$
2	$T(1) = w$	ל־1 יש מרחק 1 וזווית $0°$. אחרי T: מרחק ρ וזווית φ — זה w
3	$T(i) = iw$	i הוא 1 אחרי רבע סיבוב. לא משנה אם קודם מסובבים ברבע סיבוב ואחר כך מפעילים את T, או להפך: בשני המקרים מסובבים בסך הכול ב־$\varphi + 90°$ ומותחים פי ρ. לכן $T(i)$ הוא $w = T(1)$ אחרי רבע סיבוב, כלומר iw (צעד 1)

4	$T(a+bi) = a \cdot w + b \cdot iw$	כלל הרשת, וצעדים 2 ו־3
5	$T(z) = (a+bi) \cdot w = zw$	חוק הפילוג
6	$\lvert zw\rvert = \rho\,\lvert z\rvert = \lvert z\rvert \cdot \lvert w\rvert$, והזווית של zw היא $\theta + \varphi$	T מותחת פי ρ ומסובבת בזווית φ

מש"ל ■

כלומר, אם $z = r_1 \operatorname{cis}\theta_1$ ו־$w = r_2 \operatorname{cis}\theta_2$, אז $zw = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$ — זה בדיוק המשפט. ובדרך קיבלנו גם הוכחה לאינטואיציה מסעיף 1: לפי צעד 1, כפל ב־i הוא רבע סיבוב.

אותה עובדה במשולשים דומים. בסרטוט 5 צבועים שני משולשים: המשולש שקודקודיו הם הראשית, הנקודה 1 והנקודה z, והמשולש שקודקודיו הם הראשית, w ו־zw. T מעבירה את הראשון לשני, ולכן הם דומים, ביחס $\lvert w\rvert$. כך אפשר לבנות את zw בסרגל ובמחוגה: בונים על הקטע שבין הראשית ל־w משולש דומה למשולש הראשון.

עצרו ובדקו

הצעד העדין ביותר הוא צעד 3. בדקו אותו בדוגמה של סרטוט 5, שבה $w = 1 + i$: לאן מגיע i אחרי סיבוב של $45°$ ומתיחה פי $\sqrt{2}$? השוו ל־$i \cdot w$.

6 שתי ההוכחות זו מול זו

	הוכחה 1: פותחים סוגריים	הוכחה 2: הרשת המסתובבת
הרעיון	פותחים סוגריים ומזהים את נוסחאות הסכום	הכפל ב־w מעביר את הרשת של 1 ו־i לרשת של w ו־iw
הכלים	$i^2 = -1$, ונוסחאות הסכום של $\cos$ ושל $\sin$	חוק הפילוג, וסיבוב ומתיחה של המישור
היתרון	קצרה, וכל צעד בה הוא חישוב	מסבירה **למה**: הכפל הוא סיבוב ומתיחה של המישור כולו. היא לא צריכה את נוסחאות הסכום, ולכן אפשר להוכיח אותן בעזרתה

בונוס: נוסחאות הסכום מתוך הוכחה 2

הוכחה 2 לא השתמשה בנוסחאות הסכום, ולכן אפשר "להפוך את הכיוון" של הוכחה 1. לפי הוכחה 2, $\operatorname{cis}(\alpha+\beta) = \operatorname{cis}\alpha \cdot \operatorname{cis}\beta$. נפתח את הסוגריים באגף ימין, כמו בטבלה של סרטוט 4, ונשווה את החלקים הממשיים ואת החלקים המדומים של שני האגפים. כך נקבל את שתי נוסחאות הסכום, לכל שתי זוויות.

7 חילוק ומשפט דה מואבר

חילוק: הזוויות מתחסרות

ממשפט הכפל נובעת מייד נוסחה לחילוק. לפי המשפט, $\operatorname{cis}\theta\cdot\operatorname{cis}(-\theta)=\operatorname{cis}0^\circ=1$, ולכן

$$\frac{1}{\operatorname{cis}\theta}=\operatorname{cis}(-\theta)=\cos\theta-i\sin\theta.$$

(בשוויון האחרון השתמשנו בזהויות $\cos(-\theta)=\cos\theta$ ו־$\sin(-\theta)=-\sin\theta$.) כלומר, ההופכי של מספר שעל מעגל היחידה הוא **הצמוד** שלו — השיקוף שלו בציר הממשי. באותו אופן, כש־$r_2\neq 0$:

$$\frac{r_1\operatorname{cis}\theta_1}{r_2\operatorname{cis}\theta_2}=\frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2),$$

כי לפי משפט הכפל $\frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)\cdot r_2\operatorname{cis}\theta_2=r_1\operatorname{cis}\theta_1$. **במילים:** בחילוק הערכים המוחלטים מתחלקים והזוויות מתחסרות. למשל, בלי לכפול בצמוד של המכנה:

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{2\operatorname{cis}120^\circ}{2\operatorname{cis}60^\circ}=\operatorname{cis}60^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

משפט דה מואבר

משפט דה מואבר

לכל מספר טבעי n:

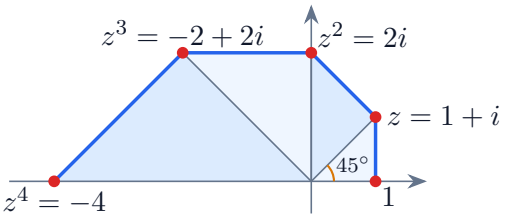
$$\boxed{\left[r(\cos\theta+i\sin\theta)\right]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)}$$

במילים: כדי להעלות מספר מרוכב בחזקה n, מעלים את הערך המוחלט שלו בחזקה n, וכופלים את הזווית שלו ב־n.

הרעיון נסמן $z=r\operatorname{cis}\theta$. אז $z^n=z\cdot z\cdots z$, וכל כפל ב־z מסובב בזווית θ ומותח פי r. לכן n כפלים מסובבים בזווית $n\theta$ ומותחים פי r^n (סרטוט 6). כדי להפוך את ה"$\cdots$" להוכחה נשתמש באינדוקציה (ראו את המסמך "הוכחה באינדוקציה"). זאת גם ההוכחה שנדרשת בתוכנית הלימודים של 5 יח"ל.

בסיס: עבור $n=1$ שני האגפים שווים ל־$r\operatorname{cis}\theta$.

צעד: נניח שהמשפט נכון עבור n מסוים, כלומר $(r\operatorname{cis}\theta)^n=r^n\operatorname{cis}n\theta$, ונוכיח אותו עבור $n+1$.



סרטוט 6: החזקות של $z=1+i$. כל חזקה מתקבלת מהקודמת בסיבוב של 45° ובמתיחה פי $\sqrt{2}$, ולכן כל המשולשים בסרטוט דומים (כולם ישרי־זווית ושווי־שוקיים).

	טענה	נימוק
1	$(r\operatorname{cis}\theta)^{n+1} = (r\operatorname{cis}\theta)^n \cdot r\operatorname{cis}\theta$	חוקי חזקות
2	$(r\operatorname{cis}\theta)^{n+1} = r^n \operatorname{cis} n\theta \cdot r\operatorname{cis}\theta$	הנחת האינדוקציה
3	$(r\operatorname{cis}\theta)^{n+1} = r^n \cdot r \cdot \operatorname{cis}(n\theta+\theta)$	משפט הכפל: הערכים המוחלטים נכפלים והזוויות מתחברות
4	$(r\operatorname{cis}\theta)^{n+1} = r^{n+1}\operatorname{cis}\big((n+1)\theta\big)$	זה המשפט עבור $n+1$, ולכן הוא נכון לכל n טבעי

מש"ל ■

ומה עם $n=0$ ועם חזקות שליליות? עבור $z\neq 0$ מגדירים $z^0=1$ ו־$z^{-n}=\frac{1}{z^n}$. אז $z^0=1=r^0\operatorname{cis}(0\cdot\theta)$, ולפי נוסחת החילוק

$$z^{-n}=\frac{1}{r^n\operatorname{cis}n\theta}=r^{-n}\operatorname{cis}(-n\theta).$$

לכן משפט דה מואבר נכון לכל מספר שלם n.

הידעתם? מי היה דה מואבר

אברהם דה מואבר (1667–1754) היה פרוטסטנט צרפתי. אחרי שהמלך לואי ה־14 ביטל את צו נאנט (1685), לפי חלק מהמקורות הוא נכלא בגלל אמונתו. בסוף עבר ללונדון. שם התפרנס כמורה פרטי למתמטיקה, והיה ידיד של אייזק ניוטון. נוסחאות קרובות מאוד למשפט מופיעות כבר במאמרים שלו מ־1707 ומ־1722, אבל בצורה המוכרת לנו הוא כנראה לא כתב אותו אף פעם. בצורה הזאת המשפט מופיע במפורש בספרו של לאונרד אוילר "מבוא לאנליזה של האינסוף" (1748).

8 מה עושים עם המשפטים?

שימוש 1: חזקות גבוהות בלי לפתוח סוגריים

דוגמה מספרית

חשבו את $(1+i)^{10}$.

נכתוב $1+i=\sqrt{2}\operatorname{cis}45^\circ$. לפי משפט דה מואבר

$$(1+i)^{10}=\left(\sqrt{2}\right)^{10}\operatorname{cis}450^\circ=32\operatorname{cis}90^\circ=32i,$$

כי $450^\circ=360^\circ+90^\circ$. בדיקה בדרך אחרת: $(1+i)^2=2i$, ולכן $(1+i)^{10}=(2i)^5=32\,i^5=32i$.

שימוש 2: נוסחאות הזווית המשולשת

נחשב את $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ בשתי דרכים. לפי משפט דה מואבר, החזקה הזאת שווה ל־$\cos 3\theta + i\sin 3\theta$. מצד שני, אפשר לפתוח אותה לפי הבינום, עם המקדמים 1, 3, 3 ו־1 (ראו את המסמך "הבינום של ניוטון ונוסחת ברנולי"). נסמן לקיצור $c = \cos\theta$ ו־$s = \sin\theta$, ונזכור ש־$i^2 = -1$ ו־$i^3 = -i$:

$$(c+is)^3 = c^3 + 3c^2(is) + 3c(is)^2 + (is)^3 = (c^3 - 3cs^2) + i\,(3c^2 s - s^3).$$

המספרים c ו־s ממשיים, ולכן אפשר להשוות את החלקים הממשיים ואת החלקים המדומים. בעזרת הזהות $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ נקבל:

$$\cos 3\theta = c^3 - 3cs^2 = c^3 - 3c\,(1-c^2) = \boxed{4\cos^3\theta - 3\cos\theta}$$
$$\sin 3\theta = 3c^2 s - s^3 = 3\,(1-s^2)\,s - s^3 = \boxed{3\sin\theta - 4\sin^3\theta}$$

בדיקה עם $\theta = 60°$: מצד אחד $\cos 180° = -1$, ומצד שני $4\cdot\frac{1}{8} - 3\cdot\frac{1}{2} = -1$.

שימוש 3: פתרון המשוואה $z^n = w$

⬟ הפתרונות של $z^n = w$

יהי n מספר טבעי, ויהי $w = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, כאשר $R > 0$. למשוואה $z^n = w$ יש בדיוק n פתרונות:

$$z_k = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\varphi + 360°k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 360°k}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

במילים: כל הפתרונות נמצאים על המעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו $\sqrt[n]{R}$. הזווית של הראשון היא $\frac{\varphi}{n}$, וכל פתרון מתקבל מהקודם בסיבוב של $\frac{360°}{n}$. כש־$n \geq 3$ הם הקודקודים של מצולע משוכלל בעל n צלעות. (ברדיאנים כותבים $2\pi k$ במקום $360°k$.)

כיוון א': כל z_k הוא פתרון. לפי משפט דה מואבר,

$$z_k^n = \left(\sqrt[n]{R}\right)^n \operatorname{cis}\left(n\cdot\frac{\varphi + 360°k}{n}\right) = R\operatorname{cis}(\varphi + 360°k) = R\operatorname{cis}\varphi = w,$$

כי k סיבובים שלמים לא משנים את הכיוון.

כיוון ב': אין פתרונות אחרים. יהי z פתרון כלשהו של המשוואה.

טענה	נימוק
(1) $z = \rho\operatorname{cis}\alpha$, כאשר $\rho > 0$	$z \neq 0$, כי $0^n = 0 \neq w$
(2) $\rho^n\operatorname{cis} n\alpha = R\operatorname{cis}\varphi$	משפט דה מואבר, ו־$z^n = w$
(3) $\rho^n = R$, ולכן $\rho = \sqrt[n]{R}$	משווים את הערכים המוחלטים של שני האגפים: הערך המוחלט של $\operatorname{cis} x$ הוא 1 לכל x. וגם ρ חיובי

(4) $n\alpha = \varphi + 360°m$, כאשר m מספר שלם	מצעדים 2 ו־3, $\operatorname{cis} n\alpha = \operatorname{cis}\varphi$: אותה נקודה על מעגל היחידה. לכן הזוויות נבדלות בסיבובים שלמים
(5) $z = z_k$ עבור k מסוים בין 0 ל־$n-1$	נחלק את m ב־n עם שארית: $m = qn + k$. אז $\alpha = \frac{\varphi + 360°k}{n} + 360°q$, ו־$q$ סיבובים שלמים לא משנים את המספר

מש"ל ■

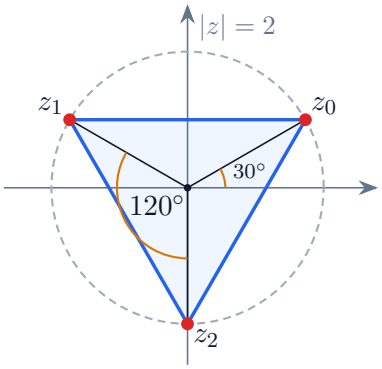
ולמה בדיוק n פתרונות? הזווית של z_0 היא $\frac{\varphi}{n}$, והזווית של כל פתרון גדולה ב־$\frac{360°}{n}$ מהזווית של הקודם. כל n הזוויות נמצאות בתוך סיבוב אחד, ולכן הן מתארות n נקודות שונות. הזוויות המרכזיות בין פתרונות סמוכים שוות, ולכן המשולשים שקודקודם בראשית ובסיסם צלע של המצולע חופפים (צ.ז.צ). מכאן שכל הצלעות שוות, וגם כל זוויות המצולע שוות: המצולע משוכלל.

דוגמה: $z^3 = 8i$

נכתוב $8i = 8\operatorname{cis}90°$. הרדיוס של הפתרונות הוא $\sqrt[3]{8} = 2$, והזוויות שלהם הן $30° + 120°k$ (כי $\frac{90°}{3} = 30°$ ו־$\frac{360°}{3} = 120°$), עבור $k = 0, 1, 2$:

$$z_0 = 2\operatorname{cis}30° = \sqrt{3} + i$$
$$z_1 = 2\operatorname{cis}150° = -\sqrt{3} + i$$
$$z_2 = 2\operatorname{cis}270° = -2i$$

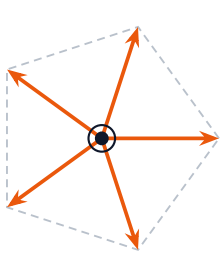
בדיקה: $(-2i)^3 = -8i^3 = 8i$.



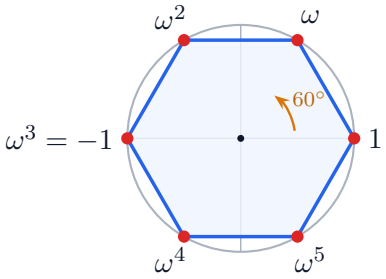
סרטוט 7: שלושת הפתרונות של $z^3 = 8i$: קודקודים של משולש שווה־צלעות, על מעגל שרדיוסו 2.

שימוש 4: שורשי היחידה, וסכום שווה לאפס

הפתרונות של $z^n = 1$ נקראים **שורשי היחידה** מסדר n. כאן $1 = \operatorname{cis}0°$, ולכן הפתרונות הם $\operatorname{cis}\frac{360°k}{n}$, עבור $k = 0, 1, \ldots, n-1$. נסמן $\omega = \operatorname{cis}\frac{360°}{n}$ (האות היוונית אומגה). לפי משפט דה מואבר $\omega^k = \operatorname{cis}\frac{360°k}{n}$, כלומר שורשי היחידה הם פשוט החזקות $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$. כש־$n \geq 3$ הם הקודקודים של מצולע משוכלל בעל n צלעות, החסום במעגל היחידה, שאחד מקודקודיו הוא 1. למשל, כש־$n = 6$ מתקבל משושה (סרטוט 8, מימין), ו־$\omega = \operatorname{cis}60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.



השקול: 0



סרטוט 8: מימין: שורשי היחידה מסדר 6, קודקודים של משושה משוכלל; כפל ב־ω מסובב את המשושה ב־$60°$ על עצמו. משמאל: חמישה כוחות שווים מושכים טבעת לעבר הקודקודים של מחומש משוכלל — והטבעת לא זזה.

סכום שורשי היחידה

לכל $n \geq 2$:

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$$

שימו לב: כש־$n \geq 2$ מתקיים $\omega \neq 1$, כי $0^\circ < \frac{360^\circ}{n} < 360^\circ$.

הוכחה א׳: סדרה הנדסית. זה סכום של n איברים בסדרה הנדסית שבה $a_1 = 1$ ו־$q = \omega \neq 1$. לפי הנוסחה מהמסמך ״סכום סדרה הנדסית״:

$$1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1} = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = \frac{1 - 1}{\omega - 1} = 0.$$

הנוסחה נכונה גם כשהמנה q היא מספר מרוכב: ההוכחה שלה (כופלים ב־q ומחסירים) משתמשת רק בכללי החשבון, ואלה נכונים גם במספרים מרוכבים.

מש״ל ■

הוכחה ב׳: סיבוב. נסמן את הסכום ב־S. כפל ב־ω מסובב את המצולע ב־$\frac{360^\circ}{n}$ סביב הראשית, וכל קודקוד עובר לקודקוד הבא: 1 עובר ל־ω, ו־ω ל־ω^2, וכן הלאה, עד ω^{n-1}, שעובר ל־$\omega^n = 1$. אלה אותם קודקודים בסדר אחר, ולכן גם הסכום שלהם לא השתנה:

$$\omega S = \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} + \omega^n = \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} + 1 = S.$$

מכאן $(\omega - 1)S = 0$, וכיוון ש־$\omega \neq 1$ נקבל $S = 0$. במילים: הנקודה S לא זזה כשמסובבים אותה ב־$\frac{360^\circ}{n}$ סביב הראשית — והנקודה היחידה שלא זזה בסיבוב כזה היא הראשית עצמה.

מש״ל ■

באלגברה שתי ההוכחות קרובות: גם נוסחת הסכום של סדרה הנדסית מוכחת בכפל ב־q ובחיסור. ההבדל הוא במה שרואים: בהוכחה ב׳ רואים שהסכום מתאפס בגלל הסימטריה של המצולע.

ובשפה של פיזיקה. נקשור n חבלים לטבעת שבראשית, ונמשוך אותה בכוחות שווים לעבר הקודקודים של מצולע משוכלל (סרטוט 8, משמאל). הטבעת לא תזוז: אילו השקול היה פונה לכיוון כלשהו, סיבוב של כל התמונה ב־$\frac{360^\circ}{n}$ היה נותן אותה תמונה בדיוק, אבל עם שקול בכיוון אחר — סתירה. כוחות מתחברים כמו וקטורים, כלומר כמו מספרים מרוכבים — ולכן זאת בעצם הוכחה ב׳.

מסקנה. גם סכום כל הפתרונות של $z^n = w$ הוא 0 (כש־$n \geq 2$). לפי משפט הכפל $z_k = z_0 \cdot \omega^k$, ולכן הסכום הוא $z_0(1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1}) = 0$. למשל, סכום הפתרונות של $z^3 = 8i$ הוא $(\sqrt{3} + i) + (-\sqrt{3} + i) - 2i = 0$.

טעויות נפוצות

- **מחברים במקום לכפול.** $|(1+i)^2| = |2i| = 2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, ולא $\sqrt{2} + \sqrt{2}$.
- **רק פתרון אחד.** בלי $360^\circ k$ מוצאים רק את z_0. למשל, ל־$z^2 = -4$ יש שני פתרונות: $2i$ וגם $-2i$.
- **הרביע הלא נכון.** למספר $-1 - i$ מתקיים $\tan\theta = 1$, אבל הנקודה ברביע השלישי, ולכן $\theta = 225^\circ$ ולא 45°.
- **זאת לא הצגה קוטבית.** המשפט מדבר רק על $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ עם $r > 0$. למשל $(\sin\theta + i\cos\theta)^2 \neq \sin 2\theta + i\cos 2\theta$ (בדקו עם $\theta = 0$). הדרך הנכונה: $\sin\theta + i\cos\theta = \operatorname{cis}(90^\circ - \theta)$.

הידעתם? מישור גאוס ומצולע בן 17 צלעות

את התמונה הגאומטרית — מספרים מרוכבים כנקודות במישור, וכפל כסיבוב ומתיחה — הציג לראשונה המודד הנורווגי־דני קספר וסל, בחיבור שהוגש לאקדמיה המלכותית הדנית ב־1797. כמעט איש לא שם לב אליו עד שתורגם לצרפתית ב־1897. בינתיים גילו את הרעיון מחדש ז׳אן־רובר ארגאן (1806) וקרל פרידריך גאוס, שפרסם אותו ב־1831 והכניס את המונח ״מספר מרוכב״. על שמו נקרא ״מישור גאוס״.
ושורשי היחידה? ב־30 במרץ 1796 רשם גאוס, שעוד לא מלאו לו 19, ביומן שלו תגלית: אפשר לבנות בסרגל ובמחוגה מצולע משוכלל בעל 17 צלעות, כלומר את הפתרונות של $z^{17}=1$. זאת הייתה ההתקדמות הראשונה בתחום מאז היוונים, ולפי המסופר היא שהכריעה את בחירתו של גאוס במתמטיקה ולא בחקר שפות עתיקות.

9 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

1. חשבו את $(\sqrt{3}+i)^6$.
2. מצאו את כל הפתרונות של $z^4=-16$, וסרטטו אותם במישור גאוס.
3. פתחו את $(\cos\theta+i\sin\theta)^2$ בשתי דרכים, והסיקו נוסחאות ל־$\cos 2\theta$ ול־$\sin 2\theta$.
4. מהי המכפלה של שלושת שורשי היחידה מסדר 3?
5. חשבו את $(1+i)(\sqrt{3}+i)$ בשתי דרכים, והסיקו את הערכים המדויקים של $\cos 75^\circ$ ושל $\sin 75^\circ$.
6. השאלה מתיבת ״עצרו ובדקו״: לאן מגיע i אחרי סיבוב של 45° ומתיחה פי $\sqrt{2}$?

תשובות

1. $\sqrt{3}+i=2\operatorname{cis}30^\circ$, ולכן $(\sqrt{3}+i)^6=2^6\operatorname{cis}180^\circ=64\cdot(-1)=-64$.
2. $-16=16\operatorname{cis}180^\circ$. הרדיוס הוא $\sqrt[4]{16}=2$, והזוויות הן $\frac{180^\circ+360^\circ k}{4}=45^\circ+90^\circ k$, אחת בכל רביע. הפתרונות הם ארבעת המספרים $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i$ (כל צירופי הסימנים): הקודקודים של ריבוע.
3. לפי משפט דה מואבר החזקה היא $\cos 2\theta+i\sin 2\theta$, ובפתיחת סוגריים — $\cos^2\theta-\sin^2\theta+2i\sin\theta\cos\theta$. לכן $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ ו־$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$.
4. השורשים הם $1,\omega,\omega^2$, כאשר $\omega=\operatorname{cis}120^\circ$, ולכן המכפלה היא $\omega^3=1$. בזוויות: $0^\circ+120^\circ+240^\circ=360^\circ$.
5. באלגברה: $(1+i)(\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}+i^2=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)\,i$. לפי המשפט: $2\operatorname{cis}30^\circ\cdot\sqrt{2}\operatorname{cis}45^\circ=2\sqrt{2}\operatorname{cis}75^\circ$. נשווה: $\cos 75^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ו־$\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
6. ל־i יש מרחק 1 וזווית 90°, ואחרי הסיבוב והמתיחה — מרחק $\sqrt{2}$ וזווית 135°: הנקודה $-1+i$. ואכן $i\cdot w=i(1+i)=-1+i$, כמו בצעד 3.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את המסמך בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנו קטעים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.