

המספר e והלוגריתם הטבעי

למה דווקא e , למה הנגזרת של e^x היא e^x –
ואיך שיקוף אחד נותן את הנגזרת של $\ln x$

כ־25 דקות קריאה

8 הוכחות

חשבון דיפרנציאלי

4–5 יח"ל

כיתה י"ב

מה כדאי לדעת קודם

- חוקי חזקות, ולוגריתם: $\log_a b = c$ פירושו $a^c = b$.
- הגדרת הנגזרת, וכללי המכפלה והשרשרת (המסמך "הנגזרת וכללי הגזירה" בסדרה).
- שיפוע של ישר.
- לסעיף 6: פונקציה קדומה ואינטגרל (המסמך "האינטגרל המסוים").

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: מכל הפונקציות המעריכיות רק אחת "יוצאת" מהנקודה $(0, 1)$ בשיפוע 1.
- למה הנגזרת של a^x פרופורציונלית ל- a^x , ואיך מזה מגדירים את e .
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ בשתי הוכחות: שיקוף בישר $y = x$, וכלל השרשרת.
- מסקנות: $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, e^{-1} כגבול של $(1 + \frac{1}{n})^n$.
- חוקי הלוגריתמים בשתי דרכים, שימושים, טעויות נפוצות ושאלות לבדיקה עצמית.

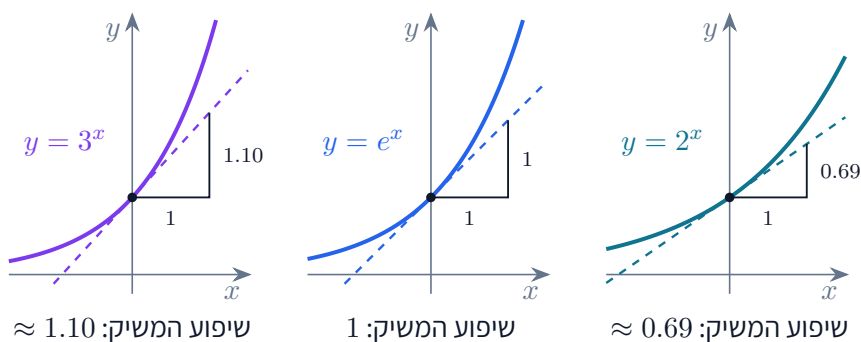
1 האינטואיציה: עקומה אחת שיוצאת בשיפוע 1

האינטואיציה

דמיינו צלחת עם חיידקים, שבה כל חיידק מתחלק לשניים בקצב קבוע. כשמספר החיידקים בצלחת גדל פי שניים, גם מספר החיידקים החדשים שנוספים בכל דקה גדל פי שניים. במילים אחרות, **קצב הגדילה פרופורציונלי לגודל**: ככל שיש יותר חיידקים, האוכלוסייה גדלה מהר יותר.

כך מתנהגת כל פונקציה מעריכית $y = a^x$: בסעיף 2 נראה שהשיפוע של הגרף שלה בכל נקודה שווה לגובה של הגרף באותה נקודה, כפול מספר קבוע. את המספר הקבוע הזה קל "לקרוא" בנקודה $(0, 1)$, שבה עוברים כל הגרפים האלה (כי $a^0 = 1$): הגובה שם הוא 1, ולכן המספר הקבוע הוא פשוט השיפוע של הגרף בנקודה הזאת.

הגרף של 2^x "יוצא" מהנקודה $(0, 1)$ בשיפוע קטן מ־1, והגרף של 3^x – בשיפוע גדול מ־1. אם נגדיל את הבסיס בהדרגה מ־2 ל־3, השיפוע יגדל בהדרגה, ובשלב מסוים יהיה שווה ל־1 בדיוק. הבסיס הזה הוא המספר המפורסם $e \approx 2.718$. אצל e^x "המספר הקבוע" הוא 1, ולכן השיפוע שלה בכל נקודה שווה **בדיוק** לגובה שלה.



סרטוט 1: שלוש פונקציות מעריכיות והמשיקים שלהן (המקווקווים) בנקודה $(0, 1)$. רק המשיק של e^x עולה בדיוק 1 בכל צעד של 1 ימינה.

דוגמה מספרית: מחפשים את השיפוע 1

כדי למצוא בקירוב את השיפוע בנקודה $(0, 1)$, נעביר מיתר קצר מאוד: מהנקודה $(0, 1)$ אל הנקודה (h, a^h) שעל הגרף. השיפוע של המיתר הוא $\frac{a^h - 1}{h}$. הנה התוצאות עבור $h = 0.001$:

הבסיס a	2	2.5	2.7	2.8	3
שיפוע המיתר	0.693	0.917	0.994	1.030	1.099

השיפוע עובר את 1 כשהבסיס בין 2.7 ל-2.8. בסעיף 3 נמצא את הבסיס הזה בדיוק, ונוכיח שיש רק אחד כזה.

2 הנגזרת של a^x : השיפוע פרופורציונלי לגובה

נאמר ביושר על מה ההוכחות נשענות. מה פירוש $2^{\sqrt{2}}$, חזקה שהמעריך שלה אינו שבר? ההגדרה המדויקת של חזקה כזאת, וההוכחות של התכונות שלה, נלמדות באוניברסיטה. כאן נקבל בלי הוכחה שלוש עובדות:

מה נקבל בלי הוכחה

1. לכל $a > 0$ החזקה a^x מוגדרת לכל x ממשי, הפונקציה $y = a^x$ רציפה (בגרף שלה אין "קפיצות"), וחוקי החזקות נכונים: $a^{s+t} = a^s \cdot a^t$ ו- $(a^s)^t = a^{st}$.
2. כאשר $a > 0$ ו- $a \neq 1$, הפונקציה $y = a^x$ מקבלת כל ערך חיובי פעם אחת בדיוק. בזכות זה הלוגריתם $\log_a b$ מוגדר לכל $b > 0$.
3. לכל $a > 0$ קיים הגבול

$$k(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

המספר $k(a)$ הוא השיפוע של הגרף של a^x בנקודה $(0, 1)$: זה הגבול של שיפועי המיתרים מסעיף 1. הטבלה מראה איך שיפועי המיתרים "מתייצבים" כש- h קטן:

$k(a)$ הגבול	$h = 0.0001$	$h = 0.001$	$h = 0.01$	$h = 0.1$	
≈ 0.6931	0.6932	0.6934	0.6956	0.7177	$a = 2$
≈ 1.0986	1.0987	1.0992	1.1047	1.1612	$a = 3$
≈ 2.3026	2.3029	2.3052	2.3293	2.5893	$a = 10$

גם עבור h שלילי, למשל $h = -0.001$, מתקבלים מספרים קרובים מאוד לגבולות האלה.

הנגזרת של פונקציה מעריכית

לכל $a > 0$:

$$(a^x)' = k(a) \cdot a^x$$

במילים: השיפוע של הגרף בכל נקודה שווה לגובה של הגרף באותה נקודה, כפול מספר קבוע – השיפוע בנקודה $(0, 1)$.

הרעיון לפי חוק החזקות, $a^{x+h} = a^x \cdot a^h$. הגורם a^x לא תלוי ב- h , ולכן הוא "יוצא החוצה" מהגבול, ומה שנשאר בפנים שואף בדיוק ל- $k(a)$:

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} a^x \cdot k(a).$$

מש"ל

כל הקושי "התרכז" בנקודה אחת: מי שיוזע את השיפוע בנקודה $(0, 1)$ יודע את השיפוע בכל נקודה. למשל, השיפוע של 2^x בנקודה $(3, 8)$ הוא $8 \cdot k(2) \approx 8 \cdot 0.693 \approx 5.5$.

3 המספר e

בסעיף 1 ראינו שהשיפוע $k(a)$ עובר את 1 כשהבסיס בין 2.7 ל-2.8. כדי למצוא את הבסיס הזה בדיוק, נבדוק קודם מה קורה ל- k כשמעלים את הבסיס בחזקה.

טענת עזר: $k(a^c) = c \cdot k(a)$

יהי $a > 0$, ויהי $c \neq 0$ מספר כלשהו. לפי חוק החזקות $(a^c)^h = a^{ch}$, ולכן

$$\frac{(a^c)^h - 1}{h} = \frac{a^{ch} - 1}{h} = c \cdot \frac{a^{ch} - 1}{ch}.$$

נסמן $t = ch$. כש- $h \rightarrow 0$ גם $t \rightarrow 0$ (ו- $t \neq 0$), ולכן השבר האחרון שואף ל- $k(a)$. מכאן $k(a^c) = c \cdot k(a)$. (וכש- $c = 0$, שני האגפים שווים ל-0, כי $a^0 = 1$ ו- $1^h - 1 = 0$).

בתמונה: הגרף של $a^{2x} = (a^2)^x$ הוא הגרף של a^x "מכווץ" אופקית פי 2, ולכן בכל גובה הוא תלול פי 2.

ההגדרה של e , והנגזרת של e^x

יש בסיס אחד ויחיד a שעבורו הגרף של a^x יוצא מהנקודה $(0, 1)$ בשיפוע 1, כלומר $k(a) = 1$. מסמנים אותו באות e , וערכו בקירוב 2.71828. לפי סעיף 2, $(e^x)' = k(e) \cdot e^x = 1 \cdot e^x$, ולכן:

$$(e^x)' = e^x$$

במילים: השיפוע של הגרף של e^x בכל נקודה שווה לגובה שלו באותה נקודה.

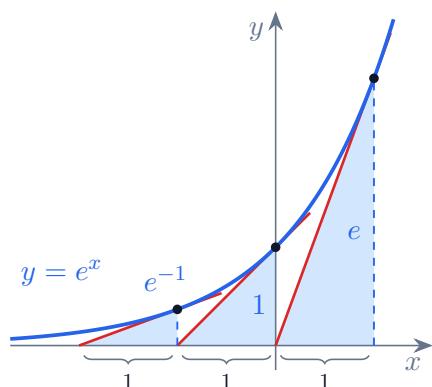
ההוכחה נכתוב כל בסיס b כחזקה של 2, כלומר $b = 2^c$, כאשר $c = \log_2 b$ (עובדה 2). לפי טענת העזר

$$k(b) = k(2^c) = c \cdot k(2),$$

ולכן $k(b) = 1$ בדיוק כאשר $c = \frac{1}{k(2)}$. (מותר לחלק ב- $k(2)$: אילו $k(2) = 0$, הנגזרת של 2^x הייתה 0 בכל נקודה, ו- 2^x הייתה קבועה – אבל $2^1 \neq 2^0$). יש אפוא בסיס אחד, ורק אחד, שבו השיפוע בנקודה $(0, 1)$ הוא 1:

$$e = 2^{1/k(2)} \approx 2^{1.442695} \approx 2.71828.$$

מש"ל



סרטוט 2: המשיקים ל- e^x בשלוש נקודות. כל משיק פוגש את ציר ה- x יחידה אחת משמאל לנקודת ההשקה.

לתכונה הזאת יש תמונה יפה. המשיק לגרף בנקודה (x_0, e^{x_0}) הוא

$$y = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) = e^{x_0}(x - x_0 + 1),$$

وهוא חותך את ציר ה- x כאשר $x - x_0 + 1 = 0$, בנקודה $x = x_0 - 1$. בכל נקודה, אם כן, המשיק פוגש את ציר ה- x בדיוק **יחידה אחת משמאל** לנקודת ההשקה. כך נוצר משולש ישר-זווית שהבסיס שלו 1 והגובה שלו e^{x_0} . לכן השיפוע – הגובה חלקי הבסיס – שווה לגובה עצמו.

4 הלוגריתם הטבעי $\ln x$

לפי עובדה 2, הפונקציה e^x מקבלת כל ערך חיובי פעם אחת בדיוק. לכן לכל $x > 0$ יש מספר אחד ויחיד y שעבורו $e^y = x$. המספר הזה נקרא **הלוגריתם הטבעי** של x , ומסמנים אותו $\ln x$:

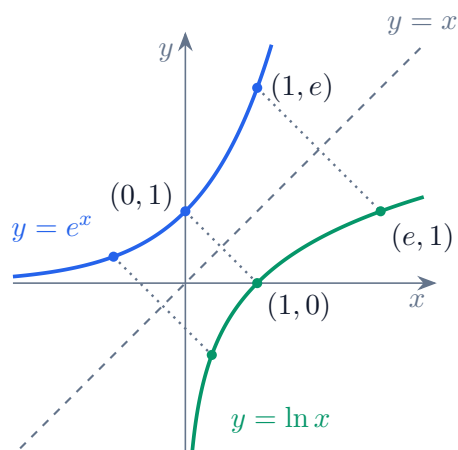
$$\ln x = y \iff e^y = x \quad (x > 0)$$

במילים: $\ln x$ הוא המעריך שבו צריך להעלות את e כדי לקבל x . זה בדיוק $\log_e x$, הלוגריתם לפי הבסיס e . (הסימן $\ln$ בא מהמילים הלטיניות logarithmus naturalis – "לוגריתם טבעי"). מההגדרה נובעות מייד כמה עובדות:

• $e^{\ln x} = x$ לכל $x > 0$, ו- $\ln(e^x) = x$ לכל x . כל אחת מהפונקציות "מבטלת" את השנייה: $\ln x$ היא הפונקציה ההפוכה של e^x .

• $\ln 1 = 0$, כי $e^0 = 1$, וגם $\ln e = 1$, כי $e^1 = e$.

• $\ln x$ מוגדר רק כש- $x > 0$, כי e^y חיובי תמיד.



סרטוט 3: הגרפים של e^x ושל $\ln x$ הם תמונות ראי ביחס לישר $y = x$. כל נקודה (p, q) על גרף אחד עוברת לנקודה (q, p) על הגרף השני.

איך נראה הגרף של $\ln x$? אם הנקודה (p, q) נמצאת על הגרף של e^x , כלומר $q = e^p$, אז $p = \ln q$, ולכן הנקודה (q, p) נמצאת על הגרף של $\ln x$. את הנקודה (p, q) מקבלים מ- $y = x$ בשיקוף בישר $y = x$: הקטע שביניהן, $(\frac{p+q}{2}, \frac{p+q}{2})$, נמצא על הישר $y = x$, והקטע מאונך לישר הזה (השיפוע של הקטע הוא $-\frac{p-q}{q-p} = -1$ ושל הישר 1). מכאן:

הגרף של $\ln x$ הוא השיקוף של הגרף של e^x בישר $y = x$.

לכן, למשל, כש- x מתקרב ל-0, הגרף של $\ln x$ "צולל" לאורך ציר ה- y — כמו שהגרף של e^x מתקרב לציר ה- x משמאל.

5 הנגזרת של $\ln x$

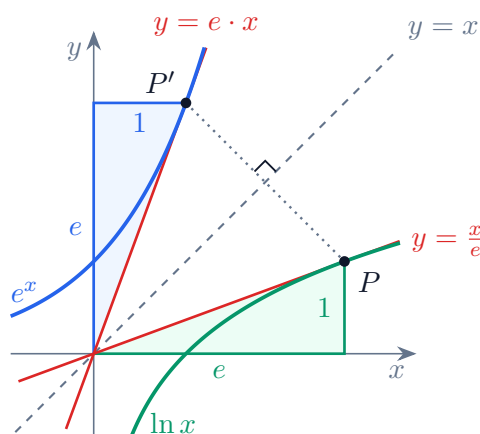
הנגזרת של הלוגריתם הטבעי

לכל $x > 0$:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

במילים: השיפוע של הגרף של $\ln x$ בנקודה $(x, \ln x)$ הוא $\frac{1}{x}$. ככל ש- x גדל, השיפוע קטן: הגרף ממשיך לעלות כל הזמן, אבל לאט יותר ויותר.

הוכחה 1: שיקוף בישר $y = x$



סרטוט 4: המשיק ל- e^x ב- P' והמשיק ל- $\ln x$ ב- P הם תמונות ראי, והשיפועים שלהם e ו- $\frac{1}{e}$.

הרעיון השיקוף בישר $y = x$ מעביר את הגרף של e^x אל הגרף של $\ln x$, וכל מיתר או משיק של גרף אחד — אל מיתר או משיק של הגרף השני. בשיקוף, השיפוע של ישר "מתהפך": הופך ל- $\frac{1}{m}$. את השיפועים של e^x אנחנו כבר מכירים, ומהם נקבל את השיפועים של $\ln x$.

למה השיפוע מתהפך? ישר ששיפועו $m \neq 0$ עובר דרך הנקודות (p, q) ו- $(p+1, q+m)$: צעד של 1 ימינה ועלייה של m . השיקוף מעביר אותן ל- (q, p) ול- $(q+m, p+1)$: עכשיו הצעד ימינה הוא m והעלייה היא 1, ולכן השיפוע הוא $\frac{1}{m}$.

בסרטוט: הנקודה $P(e, 1)$ נמצאת על הגרף של $\ln x$, ותמונת הראי שלה, $P'(1, e)$, נמצאת על הגרף של e^x . השיפוע של e^x ב- P' שווה לגובה, e , והמשיק שם הוא $y = e \cdot x$. השיקוף שלו הוא המשיק ל- $\ln x$ בנקודה P : הישר $y = \frac{x}{e}$, ששיפועו $\frac{1}{e}$. ובאופן כללי: לנקודה $(x, \ln x)$ שעל הגרף של $\ln x$ מתאימה הנקודה $(\ln x, x)$ שעל הגרף של e^x , ושם השיפוע הוא $e^{\ln x} = x$; לכן השיפוע של $\ln x$ ב- x הוא $\frac{1}{x}$.

עכשיו נכתוב את הטיעון במדויק, בעזרת מיתרים. נקבע $x > 0$ ומספר קטן $h \neq 0$ (קטן מספיק כדי ש- $x+h > 0$), ונסמן $u = \ln x$ ו- $v = \ln(x+h)$. אז $e^u = x$ ו- $e^v = x+h$. בנוסף $u \neq v$, כי $x+h \neq x$.

נימוק	טענה
שיפוע המיתר של $\ln x$, כאשר $h = (x+h) - x = e^v - e^u$	① $\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{v - u}{e^v - e^u}$
ההופכי של שיפוע המיתר של e^x בין (u, e^u) ל- (v, e^v) – המיתר המשוקף	② $= 1 / \frac{e^v - e^u}{v - u}$
$\ln x$ רציפה: הגרף שלה הוא שיקוף של גרף רציף, בלי "קפיצות"	③ $h \rightarrow 0 \text{ כאשר } v \rightarrow u$
הגדרת הנגזרת של e^x בנקודה u , עם הצעד $v - u \neq 0$	④ $\frac{e^v - e^u}{v - u} \rightarrow e^u = x$
צעדים 2 ו-4. מותר לחלק ב- x , כי $x > 0$	⑤ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

מש"ל

✓ עצרו ובדקו

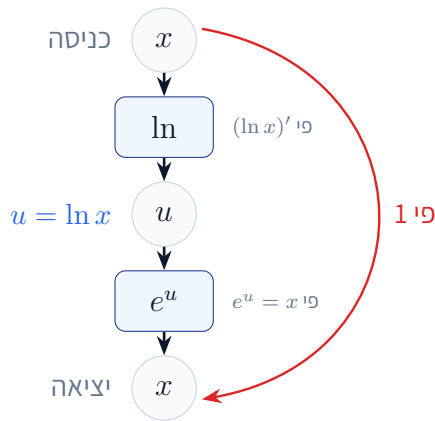
בנקודה $(1, 0)$ השיפוע של $\ln x$ הוא $\frac{1}{1} = 1$. לאיזה משיק של e^x מתאים המשיק הזה בשיקוף? מה מיוחד בזוג המשיקים הזה, לעומת הזוג שבסרטוט 4? (התשובה בסוף המסמך).

הוכחה 2: כלל השרשרת

הרעיון נגזור את שני האגפים של הזהות $e^{\ln x} = x$. באגף ימין הנגזרת היא 1, ובאגף שמאל, לפי כלל השרשרת, מופיעה הנגזרת שאנחנו מחפשים.

נימוק	טענה
ההגדרה של $\ln x$	① $x > 0 \text{ לכל } e^{\ln x} = x$
גוזרים את שני האגפים (כלל השרשרת)	② $e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = 1$
$e^{\ln x} = x$	③ $x \cdot (\ln x)' = 1$
חילוק ב- $x > 0$	④ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

מש"ל



סרטוט 5: הזהות $e^{\ln x} = x$ כשתי מכונות
בשרשרת.

אפשר לחשוב על הזהות $e^{\ln x} = x$ כעל שתי "מכונות" בשרשרת (סרטוט 5). שינוי קטן בכניסה מוכפל פי $(\ln x)'$ במכונה הראשונה, ופי $e^u = x$ בשנייה. אבל היציאה שווה לכניסה, ולכן בסך הכול השינוי מוכפל פי 1. כלומר $x \cdot (\ln x)' = 1$.

מה ההוכחה הזאת מניחה? כדי להפעיל את כלל השרשרת בצעד 2 צריך לדעת **מראש** ש- $\ln x$ גזירה. לכן הוכחה 2 לא מוכיחה שהנגזרת קיימת; היא רק מוצאת מה הנגזרת חייבת להיות, **אם** היא קיימת. את הקיום עצמו נותנת הוכחה 1. שתי ההוכחות משלימות זו את זו.

שתי הדרכים זו מול זו

הוכחה 1: שיקוף	הוכחה 2: כלל השרשרת	
הרעיון	כל מיתר של $\ln x$ הוא שיקוף של מיתר של e^x , והשיפוע מתהפך	גוזרים את שני האגפים של $e^{\ln x} = x$
מה מניחים	ש- $\ln x$ רציפה	ש- $\ln x$ גזירה
היתרון	מוכיחה שלגרף של $\ln x$ יש משיק בכל נקודה, וממחישה זאת בסרטוט	ארבע שורות בלבד; אותה שיטה מתאימה לכל פונקציה הפוכה (ראו שאלה 4 בסוף)

6 מסקנות: הנגזרות של a^x ושל $\ln |x|$

הנגזרת של a^x . לכל $a > 0$ מתקיים $a = e^{\ln a}$, ולכן לפי חוקי החזקות $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$. לפי כלל השרשרת, עם הפונקציה הפנימית $x \ln a$ (שנגזרתה היא המספר הקבוע $\ln a$):

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

השוו לסעיף 2, שם קיבלנו $(a^x)' = k(a) \cdot a^x$. לכן $k(a) = \ln a$: המספרים ה"מסתוריים" מהטבלה של סעיף 2 הם פשוט לוגריתמים טבעיים. למשל $k(2) = \ln 2 = 0.6931 \dots$, ובאותו אופן $k(3) = \ln 3$ ו- $k(10) = \ln 10$. (ב-4 יח"ל לומדים רק את הבסיס e ; הנוסחה של $(a^x)'$ נלמדת ב-5 יח"ל בלבד.)

הנגזרת של $\ln |x|$. הפונקציה $\frac{1}{x}$ מוגדרת גם כש- $x < 0$, אבל $\ln x$ לא. מהי הפונקציה הקדומה של $\frac{1}{x}$ שם? כש- $x < 0$ מתקיים $|x| = -x > 0$, ולפי כלל השרשרת

$$(\ln |x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

וכש- $x > 0$, פשוט $\ln |x| = \ln x$. לכן $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ לכל $x \neq 0$, ומכאן $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$ (בכל אחד מהתחומים $x > 0$ ו- $x < 0$ בנפרד). הלוגריתם ממלא "חור" ב-1: $n = -1$ הנוסחה $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ לא עובדת (חלוקה ב-0).

7 להעמקה: ההגדרה ה"אחרת" של e

$(1 + \frac{1}{n})^n$	n
2	1
2.5937	10
2.7048	100
2.7169	1000

במסמך "ריבית דריבית" בסדרה פגשנו את e בהקשר אחר לגמרי. מפקידים 1 ש בריבית של 100% לשנה, והריבית מצטרפת לחשבון n פעמים בשנה, בכל פעם $\frac{1}{n}$ מהסכום שבחשבון. בסוף השנה יש בחשבון $(1 + \frac{1}{n})^n$ ש, וכש- n גדל, הסכום מתקרב ל- e (בטבלה). אבל האם זה **אותו** מספר כמו ה- e שלנו, הבסיס שבו הגרף יוצא מהנקודה (0, 1) בשיפוע 1? זה בכלל לא מובן מאליו. עכשיו נוכיח שכן.

e כגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

הרעיון נכתוב את $(1 + \frac{1}{n})^n$ כחזקה של e . במעריך יופיע שיפוע של מיתר של $\ln x$ ליד הנקודה (1, 0), והשיפועים האלה שואפים לשיפוע של $\ln x$ בנקודה הזאת – כלומר ל-1. כיוון ש- $1 + \frac{1}{n} = e^{\ln(1+\frac{1}{n})}$, לפי חוק החזקות $(e^s)^n = e^{sn}$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1+\frac{1}{n})}.$$

נסמן $h = \frac{1}{n}$. כיוון ש- $\ln 1 = 0$, המעריך הוא $\frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h}$ מנת הפרשים של $\ln x$ בנקודה 1. כאשר $n \rightarrow \infty$, גם $h \rightarrow 0$, ולכן המעריך שואף לשיפוע של $\ln x$ בנקודה הזאת, שהוא $\frac{1}{1} = 1$. הפונקציה e^x רציפה, ולכן כשהמעריך שואף ל-1, החזקה שואפת ל- $e^1 = e$.

■ מש"ל

8 חוקי הלוגריתמים – בשתי דרכים

חוקי הלוגריתמים

לכל $a, b > 0$ ולכל מספר r :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad \ln(a^r) = r \cdot \ln a$$

את החוק הראשון נוכיח בשתי דרכים שונות לגמרי. שני האחרים נובעים ממנו ומחוקי החזקות.

דרך 1 מחוקי החזקות. נבדוק באיזו חזקה צריך להעלות את e כדי לקבל ab . לפי חוק החזקות,

$$e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \cdot e^{\ln b} = a \cdot b.$$

כלומר, כשמעלים את e בחזקת $\ln a + \ln b$ מקבלים ab . לפי ההגדרה של $\ln$, המעריך הזה הוא בדיוק $\ln(ab)$.

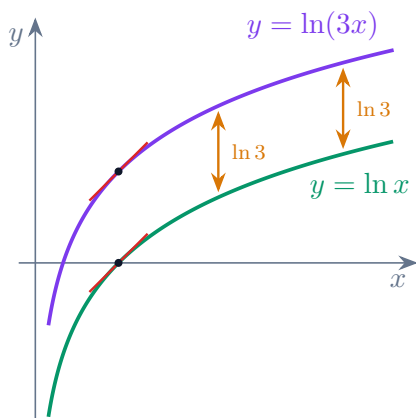
■ מש"ל

דורך 2 בעזרת נגזרות. נקבע $b > 0$, ונסתכל על ההפרש $g(x) = \ln(bx) - \ln x$ כפונקציה של $x > 0$. נראה שהנגזרת שלו היא 0, ולכן הוא קבוע. לפי כלל השרשרת (הפונקציה הפנימית bx , ונגזרתה b):

$$g'(x) = \frac{1}{bx} \cdot b - \frac{1}{x} = 0.$$

פונקציה שנגזרתה 0 בכל נקודה של קטע היא קבועה בקטע (זה מוכח במסמך "משפטי פרמה, רול ולגרנז" בסדרה).
לכן $g(x) = g(1) = \ln b - \ln 1 = \ln b$ לכל $x > 0$, כלומר $\ln(bx) = \ln x + \ln b$. בהצבת $x = a$ מקבלים את החוק.

מש"ל



סרטוט 6: הגרף של $\ln(3x)$ הוא הגרף של $\ln x$ מוזז ב- $\ln 3$ כלפי מעלה. המשיקים (באדום) מקבילים.

בסרטוט $b = 3$. לגרפים של $\ln x$ ושל $\ln(3x)$ יש אותו שיפוע, $\frac{1}{x}$, בכל x , ולכן המרחק האנכי ביניהם לא משתנה: הגרף של $\ln(3x)$ הוא הגרף של $\ln x$ מוזז כלפי מעלה ב- $\ln 3 \approx 1.1$.

שני החוקים האחרים. מהחוק הראשון,

$$\ln \frac{a}{b} + \ln b = \ln \left(\frac{a}{b} \cdot b \right) = \ln a,$$

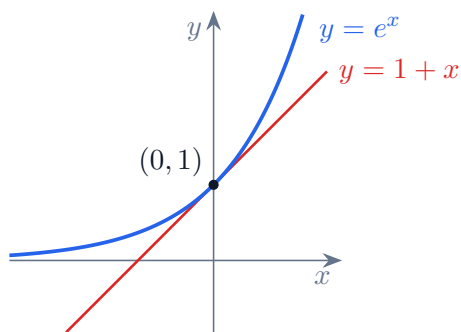
ולכן $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$. ומחוקי החזקות, $e^{\ln a} = (e^{\ln a})^r = a^r$, ולכן $\ln(a^r) = r \ln a$.

9 מה עושים עם זה?

שימוש 1: גוזרים

לפי כלל השרשרת: $(e^{2x})' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$. לפי כלל המכפלה: $(x \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$. ובבסיס אחר משתמשים בנוסחה של סעיף 6, למשל $(2^x)' = 2^x \cdot \ln 2 \approx 0.693 \cdot 2^x$.

שימוש 2: $e^x \geq 1 + x$ ו- e בין 2 ל-3



סרטוט 7: הגרף של e^x מעל המשיק $y = 1 + x$.

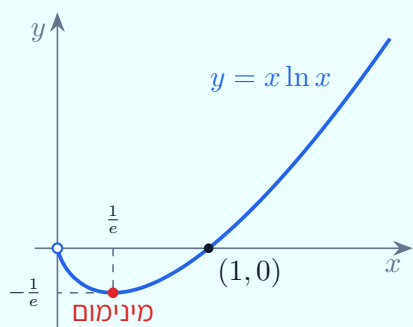
המשיק לגרף של e^x בנקודה $(0, 1)$ הוא $y = 1 + x$, כי השיפוע שם הוא $e^0 = 1$. בסרטוט רואים שכל הגרף נמצא מעל המשיק הזה. נוכיח: **לכל x מתקיים $e^x \geq 1 + x$, ויש שוויון רק ב- $x = 0$.**

נסמן $f(x) = e^x - 1 - x$ – ההפרש בין הגרף למשיק. אז $f'(x) = e^x - 1$. כיוון ש- e^x עולה ו- $e^0 = 1$, הנגזרת שלילית כש- $x < 0$ וחיובית כש- $x > 0$. לכן f יורדת בתחום $x < 0$ ועולה בתחום $x > 0$, כך שב- $x = 0$ יש לה מינימום מוחלט: $f(x) \geq f(0) = 0$. כלומר $e^x \geq 1 + x$.

מש"ל

בנוסף: e בין 2 ל-3. נציב $x = \frac{1}{n}$ באי-השוויון ונעלה בחזקת n : מקבלים $e \geq (1 + \frac{1}{n})^n$. נציב $x = -\frac{1}{n+1}$, נעבור להופכיים (כיוון אי-השוויון מתהפך) ונעלה בחזקת $n+1$: מקבלים $e \leq (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. עבור $n = 5$ זה נותן $2 < e < 3$, ובפרט $2.48832 \leq e \leq 2.985984$.

שימוש 3: שאלה בסגנון בגרות



סרטוט 8: הגרף של $x \ln x$.

שאלה: הפונקציה $f(x) = x \ln x$

א. מצאו את תחום ההגדרה של f .

ב. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של f , וקבעו את סוגה.

פתרון. א. $\ln x$ מוגדר רק כש- $x > 0$, ולכן תחום ההגדרה הוא $x > 0$.

ב. לפי שימוש 1, $f'(x) = \ln x + 1$. הנגזרת מתאפסת כאשר

$\ln x = -1$, כלומר כאשר $x = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.368$. כאשר $0 < x < \frac{1}{e}$, $\ln x < -1$, ולכן $f'(x) < 0$; כאשר $x > \frac{1}{e}$, מתקיים $f'(x) > 0$. לכן ב- $x = \frac{1}{e}$ יש מינימום:

נקודת המינימום היא $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e} \cdot (-1) = -\frac{1}{e}$. $(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}) \approx (0.368, -0.368)$.

⚠ טעות נפוצה

- **כלל החזקה במקום הלא נכון.** $(2^x)' \neq x \cdot 2^{x-1}$. כלל החזקה מתאים לבסיס משתנה ולמעריך קבוע, כמו ב- x^5 . ב- 2^x הבסיס קבוע והמעריך משתנה, ולכן $(2^x)' = 2^x \ln 2$.
- **הנגזרת הפנימית.** $(\ln 2x)' = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$, ולא $\frac{1}{2x}$. רואים זאת גם כך: $\ln 2x = \ln 2 + \ln x$, והקבוע $\ln 2$ נעלם בגזירה. ובאותו אופן, $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, ולא e^{2x} .
- **לוגריתם של סכום.** $\ln(x+y) \neq \ln x + \ln y$. החוק עוסק במכפלה: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. דוגמה נגדית: $\ln(1+1) = \ln 2 \approx 0.69$, אבל $\ln 1 + \ln 1 = 0$.
- **תחום ההגדרה.** $\ln x$ מוגדר רק כש- $x > 0$. למשל, הפונקציה $\ln(x-2)$ מוגדרת רק כש- $x > 2$.

🕒 הידעתם?

את הלוגריתמים המציא הסקוטי ג'ון נאפייר, שפרסם ב-1614 את הטבלאות הראשונות שלהם. בעזרתן אפשר היה להחליף כפל בחיבור, וכך התקצרו מאוד חישובים ארוכים, למשל באסטרונומיה. הלוגריתמים של נאפייר לא היו בדיוק הלוגריתמים הטבעיים שלנו, והמספר e עוד לא הופיע אצלו. ב-1647 פרסם הישועי הפלמי גרגואר דה ס'ונסאן תגלית על השטח שמתחת להיפרבולה: אם מכפילים את שני הקצוות של קטע באותו מספר, השטח לא משתנה. ב-1649 הבחין תלמידו, אלפונס אנטוניו דה סרסה, שהשטח הזה מתנהג כמו לוגריתם. היום קל לראות למה: לפי המשפט היסודי (במסמך "האינטגרל המסוים") ולפי סעיפים 6 ו-8, השטח שמתחת ל- $y = \frac{1}{t}$ בין a ל- b הוא $\ln \frac{b}{a} = \ln b - \ln a$, והוא תלוי רק ביחס $\frac{b}{a}$. המונח "לוגריתם טבעי" הופיע לראשונה אצל ניקולאוס מרקטור, בספר "לוגריתמוטכניה" (1668). ב-1683 חקר יעקב ברנולי את שאלת הריבית שבסעיף 7, והראה שהגבול נמצא בין 2 ל-3. לאונרד אוילר השתמש באות e כבר בסוף שנות ה-20 של המאה ה-18, והיא הופיעה לראשונה בדפוס בספרו על מכניקה (1736).

10 בדקו את עצמכם

שש שאלות

1. גזרו: א. e^{3x} ב. $\ln(x^2 + 1)$ ג. 5^x ד. $x^2 e^x$
2. מצאו את משוואת המשיק לגרף של $\ln x$ בנקודה שבה $x = e$, והראו שהוא עובר בראשית הצירים.
3. ענו על השאלה מתיבת "עצרו ובדקו" שבהוכחה 1.
4. גזרו את שני האגפים של $(\sqrt{x})^2 = x$, כמו בהוכחה 2, ומצאו את $(\sqrt{x})'$. מה ההנחה הסמויה?
5. חשבו את $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{n})^n$. **רמז:** פעלו כמו בהוכחה שבסעיף 7.
6. הוכיחו ש- $\ln x \leq x - 1$ לכל $x > 0$. **רמז:** הציבו $\ln x$ במקום x ב- $e^x \geq 1 + x$. מה הקשר לשיקוף?

תשובות

1. א. $3e^{3x}$ ב. $\frac{2x}{x^2+1}$ ג. $5^x \cdot \ln 5$ ד. $2x \cdot e^x + x^2 e^x = xe^x(x+2)$
2. הנקודה היא $(e, 1)$ והשיפוע $\frac{1}{e}$, ולכן המשיק הוא $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$, כלומר $y = \frac{x}{e}$; בהצבת $x = 0$ מקבלים $y = 0$. זה המשיק בנקודה P שבסרטוט 4.
3. הנקודה $(1, 0)$ היא תמונת הראי של $(0, 1)$, שבה השיפוע של e^x הוא $e^0 = 1$. המשיק שם, $y = x + 1$, ותמונת הראי שלו, $y = x - 1$, מקבילים לישר $y = x$, ולכן לא נפגשים. כל זוג אחר כזה נפגש על הישר $y = x$ (כמו $y = e \cdot x$ ו- $y = \frac{x}{e}$ בראשית).
4. $2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' = 1$, ולכן $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (כש- $x > 0$). ההנחה הסמויה, כמו בהוכחה 2: ש- $\sqrt{x}$ גזירה.
5. $(1 + \frac{2}{n})^n = e^{n \ln(1 + \frac{2}{n})}$, ועם $h = \frac{2}{n}$ המעריך הוא $2 \cdot 1 = 2$. $\frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} \rightarrow 2 \cdot 1 = 2$. לכן הגבול הוא e^2 .
6. לכל $x > 0$ מתקיים $e^{\ln x} \geq 1 + \ln x$, כלומר $x \geq 1 + \ln x$, ומכאן $\ln x \leq x - 1$. בשיקוף: הגרף של e^x מעל המשיק $y = x + 1$, ולכן הגרף של $\ln x$ מתחת לתמונת הראי שלו, $y = x - 1$.