מפגש התיכונים במשולש

שלושת התיכונים נפגשים בנקודה אחת, שמחלקת כל תיכון ביחס של 2 ל־1 – ולמה דווקא שם המשולש "מתאזן"

כיתה י' | 4–5 יח"ל | גאומטריה | 3 הוכחות | כ־20 דקות קריאה

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: משולש מקרטון על קצה של עיפרון.
- הוכחה 1: קטע אמצעים ודמיון משולשים.
- הוכחה 2: וקטורים ושיעורים.
- הוכחה 3: שטחים, ושישה משולשים שווי שטח.
- מבט מהפיזיקה, אורך התיכון ושאלה בסגנון בגרות.

מה כדאי לדעת קודם

- משפט קטע האמצעים במשולש.
- דמיון משולשים (ז.ז).
- שטח משולש: חצי בסיס כפול גובה.
- להוכחה 2: וקטורים, או נוסחת אמצע הקטע.
- לאורך התיכון (להעמקה): משפט הקוסינוסים (5 יח"ל).

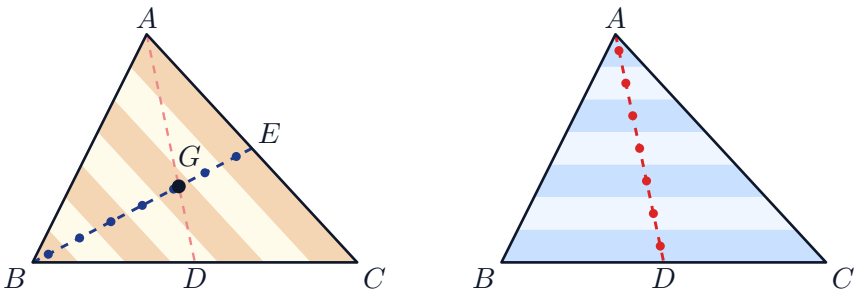
1 האינטואיציה: משולש על קצה של עיפרון

האינטואיציה

גזרו משולש מקרטון ונסו להניח אותו על קצה של עיפרון. כמעט בכל מקום הוא ייפול, אבל יש נקודה אחת שבה הוא מתאזן. איפה היא?

נדמיין שחתכנו את המשולש לרצועות דקות שמקבילות לצלע BC (סרטוט 1, מימין). כל רצועה היא כמעט מקל דק, ומקל מתאזן באמצע שלו. מתברר שהאמצעים של כל הרצועות נמצאים על קו ישר אחד: הקו מהקודקוד A אל אמצע הצלע BC, שנקרא **תיכון**. לכן המשולש כולו מתאזן על התיכון, ונקודת האיזון נמצאת איפשהו עליו.

אבל אפשר לחתוך את המשולש גם לרצועות שמקבילות לצלע AC (סרטוט 1, משמאל), ואז נקודת האיזון צריכה להיות גם על התיכון שיוצא מ־B — כלומר בנקודה שבה שני התיכונים נחתכים. ומה עם התיכון השלישי? אם ההיגיון שלנו נכון, גם הוא חייב לעבור דרך אותה נקודה!



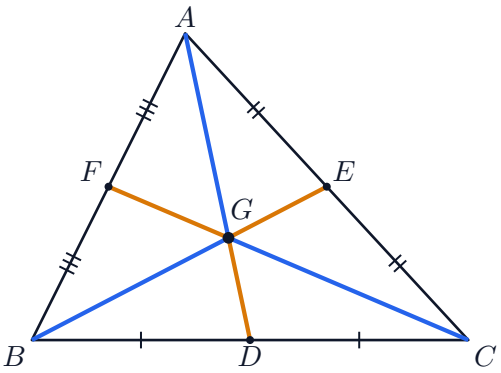
סרטוט 1: מימין: רצועות שמקבילות ל־BC ואמצעיהן על AD. משמאל: רצועות שמקבילות ל־AC ואמצעיהן על BE.

© אור בן שטרית · אינסוף

במסמך הזה נוכיח שזה אכן כך: בכל משולש שלושת התיכונים נפגשים בנקודה אחת. נגלה גם משהו שהאינטואיציה לא מגלה: הנקודה הזאת מחלקת כל תיכון ביחס $2:1$.

2 המשפט

תיכון במשולש הוא קטע שמחבר קודקוד עם אמצע הצלע שמולו. לכל משולש יש שלושה תיכונים.
נסמן ב־D את אמצע הצלע BC, ב־E את אמצע CA וב־F את אמצע AB. התיכונים הם AD, BE ו־CF. בסרטוט, קטעים שווים מסומנים במספר זהה של קווים קטנים.



סרטוט 2: שלושת התיכונים נפגשים ב־G. כל קטע כחול ארוך פי 2 מהקטע הכתום שממשיך אותו.

⬟ משפט מפגש התיכונים

בכל משולש ABC שלושת התיכונים נפגשים בנקודה אחת, G. הנקודה G מחלקת כל תיכון ביחס $2:1$, כך שהחלק הארוך קרוב לקודקוד:

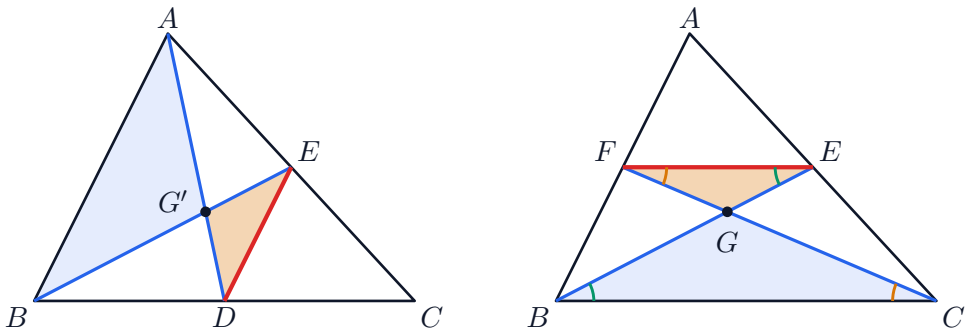
$$\boxed{AG:GD=BG:GE=CG:GF=2:1}$$

במילים: מפגש התיכונים נמצא על כל תיכון במרחק של שני שלישים מאורכו מהקודקוד, ושליש מאורכו מאמצע הצלע. למשל, $AG=\frac{2}{3}AD$ ו־$GD=\frac{1}{3}AD$.

הנקודה G נקראת **מפגש התיכונים** של המשולש. בחלק מהספרים מסמנים אותה באות M. זו גם נקודת האיזון מהאינטואיציה, ולכן קוראים לה גם **מרכז הכובד** של המשולש (באנגלית centroid). במשפט יש שתי טענות: התיכונים נפגשים בנקודה אחת, והנקודה הזאת מחלקת אותם ביחס מסוים. בהמשך נראה שהטענה השנייה עוזרת להוכיח את הראשונה.

3 הוכחה 1: קטע אמצעים ודמיון משולשים

הרעיון ניקח שני תיכונים, BE ו־CF. הקטע FE, שמחבר את אמצעי הצלעות AB ו־AC, הוא קטע אמצעים במשולש: הוא מקביל ל־BC ושווה למחציתה. בעזרתו נקבל שני משולשים דומים ביחס $1:2$, ומהם — את היחס $2:1$ על התיכונים. בסוף נראה שגם התיכון השלישי עובר דרך אותה נקודה.



סרטוט 3: מימין (שלב א׳): קטע האמצעים FE והמשולשים הדומים GFE ו־GCB. זוויות שוות מסומנות באותו צבע.
משמאל (שלב ב׳): אותו טיעון עם קטע האמצעים DE.

שלב א׳: שני תיכונים והיחס $2:1$

לפי משפט קטע האמצעים, $FE \parallel BC$, ולכן המרובע $BCEF$ הוא טרפז. האלכסונים שלו, BE ו־CF, נחתכים בנקודה כלשהי, ונסמן אותה ב־G.

	טענה	נימוק
1	$FE \parallel BC$ וגם $FE = \frac{1}{2}BC$	FE קטע אמצעים במשולש ABC
2	$\angle GFE = \angle GCB$	זוויות מתחלפות בין המקבילים FE ו־BC (החותך הוא CF)
3	$\angle GEF = \angle GBC$	זוויות מתחלפות (החותך הוא BE)
4	$\triangle GFE \sim \triangle GCB$	ז.ז (צעדים 2 ו־3)
5	$\frac{GF}{GC} = \frac{GE}{GB} = \frac{FE}{CB} = \frac{1}{2}$	יחס הדמיון, וצעד 1
6	$CG = 2 \cdot GF$ וגם $BG = 2 \cdot GE$	כלומר $CG : GF = BG : GE = 2:1$

מש״ל ■

שלב ב׳: גם התיכון השלישי עובר דרך G

נחזור על אותו טיעון בדיוק עם זוג אחר: התיכונים AD ו־BE (סרטוט 3, משמאל). הפעם קטע האמצעים הוא DE, שמקביל ל־AB ושווה למחציתה. נסמן ב־G' את נקודת החיתוך של AD ו־BE. כמו בשלב א׳, המשולשים $G'DE$ ו־$G'AB$ דומים ביחס $1:2$.

	טענה	נימוק
1	$BG' : G'E = 2:1$ וגם $AG' : G'D = 2:1$	שלב א׳, עם קטע האמצעים DE במקום FE
2	$BG' = \frac{2}{3}BE$ וגם $BG = \frac{2}{3}BE$	צעד 1 כאן, והתוצאה של שלב א׳
3	$G' = G$: התיכון AD עובר דרך G, ו־$AG : GD = 2:1$	על הקטע BE יש רק נקודה אחת שמרחקה מ־B הוא $\frac{2}{3}BE$. את היחס נותן צעד 1

מש״ל ■

שימו לב לרעיון: את המפגש קיבלנו מתוך היחס, כי היחס $2:1$ ״מצמיד״ את נקודת החיתוך למקום אחד ויחיד על התיכון BE. כל תיכון אחר שחותך את BE חותך אותו בדיוק שם.

עצרו ובדקו

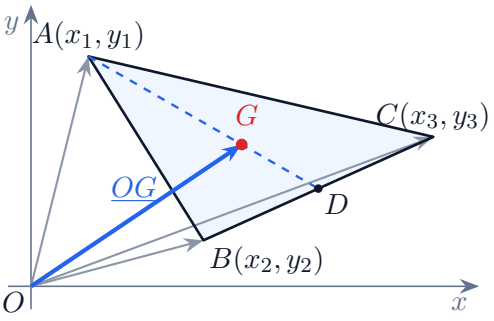
איפה בדיוק השתמשנו בכך ש־E ו־F הן **אמצעי** הצלעות? נניח שהנקודות E ו־F מחלקות את הצלעות כך ש־$AE : EC = AF : FB = 1:2$. האם FE עדיין מקביל ל־BC? באיזה יחס נחתכים עכשיו הקטעים BE ו־CF?

4 הוכחה 2: וקטורים ושיעורים – רעיון אחד בשתי שפות

הרעיון נבטא כל נקודה על התיכון AD בעזרת וקטורים, ונחפש עליו נקודה שבביטוי שלה יש לשלושת הקודקודים אותו מקדם. נקודה כזאת לא ״מעדיפה״ אף קודקוד, ולכן אפשר לצפות שתימצא גם על שני התיכונים האחרים. נכתוב את החישוב פעם בשפת הווקטורים ופעם בשפת השיעורים — אבל זה אותו רעיון בדיוק, ולכן נספור אותו כהוכחה אחת.

נבחר נקודה קבועה O (למשל ראשית הצירים), ונתאר כל נקודה P בעזרת הווקטור $\underline{OP}$. לכל שתי נקודות P ו־Q מתקיים $\underline{PQ} = \underline{OQ} - \underline{OP}$. ואם M היא אמצע הקטע PQ, כדי להגיע אליה הולכים מ־P חצי מהדרך אל Q:

$$\underline{OM} = \underline{OP} + \tfrac{1}{2}\left(\underline{OQ} - \underline{OP}\right) = \tfrac{1}{2}\underline{OP} + \tfrac{1}{2}\underline{OQ}.$$



סרטוט 4: הווקטורים מ־O אל הקודקודים (באפור) ואל G (בכחול).

	טענה	נימוק
1	$\underline{OD} = \frac{1}{2}\underline{OB} + \frac{1}{2}\underline{OC}$	D אמצע BC
2	$\underline{OP} = \underline{OA} + t \cdot \underline{AD}$	P נקודה על התיכון, ו־$AP = t \cdot AD$ (כאשר $0 \le t \le 1$)
3	$\underline{OP} = (1-t)\,\underline{OA} + \frac{t}{2}\,\underline{OB} + \frac{t}{2}\,\underline{OC}$	$\underline{AD} = \underline{OD} - \underline{OA}$, צעד 1, ופתיחת סוגריים

(4) $1-t=\frac{t}{2}$, ולכן $t=\frac{2}{3}$	דורשים מקדם שווה לשלושת הקודקודים
(5) $\underline{OG}=\frac{1}{3}\underline{OA}+\frac{1}{3}\underline{OB}+\frac{1}{3}\underline{OC}$	הצבת $t=\frac{2}{3}$ בצעד 3. כאן G היא הנקודה על AD שמקיימת $AG=\frac{2}{3}AD$

הביטוי בצעד 5 **סימטרי**: אם מחליפים בו את תפקידי הקודקודים, הוא לא משתנה. לכן אם נחזור על החישוב עם התיכון BE, הווקטור אל הנקודה שעליו במרחק $\frac{2}{3}BE$ מ־B יהיה $\frac{1}{3}\underline{OB}+\frac{1}{3}\underline{OC}+\frac{1}{3}\underline{OA}$ — אותו וקטור בדיוק, ולכן זו אותה נקודה G. כך גם עם CF. מכאן ש־G נמצאת על שלושת התיכונים, ומחלקת כל אחד מהם ביחס $2:1$. (נקודת מפגש נוספת אין: שני ישרים שונים נחתכים לכל היותר בנקודה אחת.) שימו לב: הפעם לא ידענו מראש את היחס $2:1$. הוא יצא מעצמו מהדרישה $1-t=\frac{t}{2}$.

מש"ל ■

אותו חישוב בשפת השיעורים

אם O היא ראשית הצירים, הווקטור $\underline{OA}$ הוא פשוט (x_1,y_1) — השיעורים של A. כך גם $\underline{OB}=(x_2,y_2)$ ו־$\underline{OC}=(x_3,y_3)$, וצעד 5 הופך לנוסחה:

⬟ שיעורי מפגש התיכונים

אם קודקודי המשולש הם $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ ו־$C(x_3,y_3)$, אז

$$\boxed{G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)}$$

במילים: השיעורים של מפגש התיכונים הם הממוצעים של שיעורי הקודקודים. במרחב מוסיפים שיעור שלישי, $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$.

אפשר להגיע לנוסחה גם בלי וקטורים. לפי נוסחת אמצע הקטע (ראו את המסמך "נוסחת המרחק בין שתי נקודות" בסדרה), שיעור ה־x של D הוא $\frac{x_2+x_3}{2}$. הנקודה G נמצאת שני שלישים מהדרך מ־A אל D, ולכן שיעור ה־x שלה הוא $x_1+\frac{2}{3}\left(\frac{x_2+x_3}{2}-x_1\right)=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, וכך גם שיעור ה־$y$. זה החישוב של צעדים 2–5, רק בלי הסימון של וקטורים.

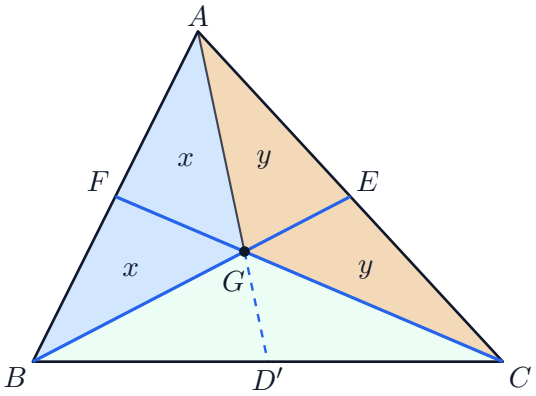
דוגמה. מפגש התיכונים של המשולש שקודקודיו $A(0,0)$, $B(6,0)$ ו־$C(3,9)$ הוא $G\left(\frac{0+6+3}{3},\ \frac{0+0+9}{3}\right)$, כלומר $G(3,3)$. בדיקה: אמצע AB הוא $F(3,0)$, ולכן התיכון CF מונח על הישר $x=3$, והנקודה G אכן עליו. בנוסף $CG=6$ ו־$GF=3$, כלומר $CG:GF=2:1$.

5 הוכחה 3: שטחים

הרעיון הכלי היחיד שלנו: שטח משולש, חצי בסיס כפול גובה. אם לשני משולשים יש קודקוד משותף, והבסיסים שלהם מונחים על ישר אחד, אז יש להם אותו גובה, ולכן **היחס בין השטחים שווה ליחס בין הבסיסים**. בפרט, תיכון מחלק משולש לשני משולשים שווי שטח. בעזרת העובדה הזאת נחשב שטחים, ומהם נסיק את היחסים בין הקטעים.

שלב א׳: היחס $2:1$

ניקח שוב את התיכונים BE ו־CF, שנחתכים ב־G, ונחבר את G עם A. כך נוצרים ארבעה משולשים קטנים: AFG ו־BFG (בכחול), AEG ו־CEG (בכתום). נשאר עוד המשולש BGC (בירוק).
נסמן את שטח המשולש ABC ב־S. הקו המקווקו הוא ההמשך של AG עד הצלע BC, ונשתמש בו בשלב ב׳.



סרטוט 5: התיכונים BE ו־CF והקטע AG.

	טענה	נימוק
1	$S_{\triangle AFG} = S_{\triangle BFG} = x$	קודקוד משותף G, ובסיסים שווים $AF = FB$. את שני השטחים נסמן ב־x
2	$S_{\triangle AEG} = S_{\triangle CEG} = y$	קודקוד משותף G, ובסיסים שווים $AE = EC$
3	$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2}S$	כל תיכון מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח
4	$2x + y = 2y + x$, ולכן $x = y$	$S_{\triangle ABE} = x + x + y$ וגם $S_{\triangle ACF} = y + y + x$
5	$S = 6x$ וגם $S_{\triangle BGC} = 2x$	$S = 2 \cdot S_{\triangle ABE} = 2(2x + x)$, ו־$S_{\triangle BGC} = S - 4x$
6	$BG : GE = S_{\triangle BGC} : S_{\triangle EGC} = 2x : x$	קודקוד משותף C, והבסיסים BG ו־GE על הישר BE
7	$BG : GE = 2 : 1$ וגם $CG : GF = 2 : 1$	את היחס השני מקבלים באותו אופן, מהשטחים $S_{\triangle CGB} = 2x$ ו־$S_{\triangle FGB} = x$

מש״ל ■

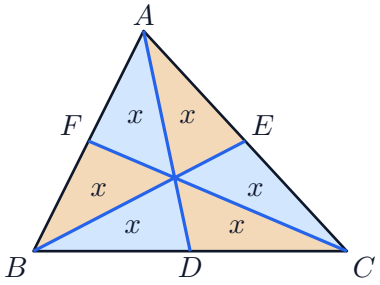
שלב ב׳: גם AG הוא תיכון

נמשיך את AG עד שיפגוש את BC בנקודה D' (הקו המקווקו בסרטוט 5). צריך להראות ש־D' היא אמצע BC. נסמן $k = \frac{BD'}{D'C}$.

	טענה	נימוק
1	$S_{\triangle ABD'} = k \cdot S_{\triangle ACD'}$	קודקוד משותף A, ובסיסים על BC
2	$S_{\triangle GBD'} = k \cdot S_{\triangle GCD'}$	קודקוד משותף G, ואותם בסיסים
3	$S_{\triangle ABG} = k \cdot S_{\triangle ACG}$	מחסרים: צעד 1 פחות צעד 2
4	$k = 1$, כלומר $D' = D$	$S_{\triangle ABG} = S_{\triangle ACG} = 2x$ (שלב א׳). ו־$k = 1$ פירושו $BD' = D'C$
5	$AG : GD = S_{\triangle ABG} : S_{\triangle DBG} = 2x : x$	קודקוד משותף B. ו־$S_{\triangle DBG} = x$, כי GD תיכון ב־$\triangle BGC$

מש״ל ■

בונוס: שישה משולשים שווי שטח



סרטוט 6: לכל משולש שטח $\frac{1}{6}S$.

בדרך גילינו עובדה יפה: שלושת התיכונים מחלקים את המשולש לשישה משולשים קטנים, ולכולם אותו שטח, $x = \frac{1}{6}S$. ארבעה מהם מצאנו בשלב א׳ (כי $x = y$), ואת שני האחרונים, BGD ו־CGD, בצעד האחרון של שלב ב׳. שימו לב: השטחים שווים, אבל המשולשים עצמם בדרך כלל **אינם חופפים** — יש להם צורות שונות.

6 שלוש הדרכים זו מול זו

	הוכחה 1: דמיון	הוכחה 2: וקטורים ושיעורים	הוכחה 3: שטחים
הרעיון	קטע האמצעים יוצר משולשים דומים ביחס $1:2$	נקודה על התיכון שמתייחסת לשלושת הקודקודים באותו אופן	מהשטחים מסיקים את היחסים בין הקטעים
הכלים	קטע אמצעים, זוויות מתחלפות, ז.ז	חיבור וקטורים וכפל במספר, או נוסחת אמצע הקטע	שטח משולש: חצי בסיס כפול גובה
למה הם נפגשים	על BE יש רק נקודה אחת שמחלקת אותו ביחס $1:2$	הביטוי של $\overline{OG}$ סימטרי בשלושת הקודקודים	הישר AG חוצה את BC

7 מבט מהפיזיקה: למה המשולש מתאזן דווקא ב־G?

נחזור למשולש הקרטון. שני הטיעונים שבסעיף הזה **אינם** הוכחות מתמטיות מלאות, כי הם נשענים על עובדות מהפיזיקה שנקבל בלי הוכחה. אבל הם מסבירים למה ל־G קוראים מרכז הכובד של המשולש.

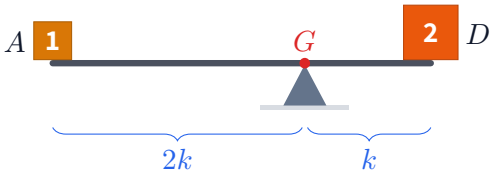
טיעון 1: רצועות. באינטואיציה טענו שהתיכון AD חוצה כל קטע שמקביל ל־BC. הנה הנימוק. ניקח קטע כזה, XY, שקצותיו X ו־Y נמצאים על AB ועל AC, ונסמן ב־P את נקודת החיתוך שלו עם AD. אז $\triangle AXP \sim \triangle ABD$ וגם $\triangle AYP \sim \triangle ACD$ (ז.ז, כי $XY \parallel BC$), ובשני הזוגות יחס הדמיון הוא $\frac{AP}{AD}$:

$$XP = \frac{AP}{AD} \cdot BD = \frac{AP}{AD} \cdot DC = PY.$$

כלומר כל רצועה שמקבילה ל־BC מתאזנת על AD, ולכן גם המשולש כולו מתאזן על AD — וכך גם על BE ועל CF. אם יש למשולש נקודת איזון אחת (והפיזיקה אומרת שיש), היא על שלושת התיכונים. הטיעון מסביר למה התיכונים נפגשים, אבל לא באיזה יחס הם נחתכים.

טיעון 2: שלוש משקולות. נחליף את הקרטון בשלוש משקולות של 1 ק"ג, שמונחות בקודקודים של מסגרת קלה מאוד.

- המשקולות שב־B וב־C שוות, ולכן הן מתאזנות באמצע הדרך ביניהן, ב־D. הן פועלות כמו משקולת אחת של 2 ק"ג שמונחת ב־D.
- נשאר מנוף: הקטע AD, עם 1 ק"ג ב־A ו־2 ק"ג ב־D. לפי **חוק המנוף**, מנוף מתאזן כשמכפלת כל משקל במרחק שלו מנקודת המשען שווה בשני הצדדים: $1 \cdot AG = 2 \cdot GD$. לכן $AG : GD = 2 : 1$!



סרטוט 7: המנוף AD מתאזן ב־G, כש־$1 \cdot AG = 2 \cdot GD$.

אם נתחיל דווקא מהמשקולות שב־A וב־B, נקבל נקודה שמחלקת את CF ביחס $2 : 1$. אבל לשלוש המשקולות יש נקודת איזון אחת, ולכן זו אותה נקודה. בשפת השיעורים: נקודת האיזון של משקולות שוות היא הממוצע של השיעורים שלהן — הנוסחה מהוכחה 2.

רגע, משקולות או קרטון? טיעון 2 עוסק במשקולות בקודקודים, ולא בקרטון. שתי נקודות האיזון מתלכדות, כי לפי טיעון 1 גם נקודת האיזון של הקרטון נמצאת על התיכונים. זו תכונה מיוחדת של המשולש: במרובע מקרטון נקודת האיזון בדרך כלל **שונה** מזו של ארבע משקולות שוות בקודקודיו.

הידעתם?

בספר הראשון של חיבורו "על שיווי המשקל של צורות מישוריות" (On the Equilibrium of Planes) הוכיח ארכימדס (המאה ה־3 לפני הספירה) שמרכז הכובד של משולש נמצא על הקו שמחבר קודקוד עם אמצע הצלע שמולו (טענה 13), ולכן בנקודת המפגש של הקווים האלה (טענה 14). ההוכחה שלו היא גרסה מדויקת של טיעון הרצועות: הוא מילא את המשולש במקביליות צרות, והראה בדרך השלילה שמרכז הכובד אינו יכול להיות מחוץ לתיכון.

ב־1678 פרסם המתמטיקאי האיטלקי ג'ובאני צ'בה משפט כללי יותר (להעמקה): אם D, E ו־F הן נקודות על הצלעות BC, CA ו־AB, אז הקטעים AD, BE ו־CF נפגשים בנקודה אחת אם ורק אם $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ (בתיכונים כל שבר שווה ל־1). גם צ'בה הוכיח את המשפט בעזרת מרכזי כובד וחוק המנוף.

8 מה עושים עם המשפט?

שימוש 1 (להעמקה): אורך התיכון

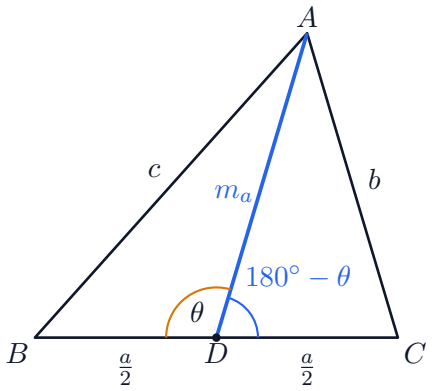
אם ידועים אורכי שלוש הצלעות, אפשר לחשב את אורך התיכון. הנוסחה הזאת היא **להעמקה**: היא אינה בתוכנית הלימודים, וההוכחה שלה משתמשת במשפט הקוסינוסים, שנלמד רק ב־5 יח"ל. נסמן ב־m_a את אורך התיכון AD, שיוצא אל הצלע $a = BC$. כמו במשפט הקוסינוסים, $b = CA$ ו־$c = AB$.

אורך התיכון

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

הנוסחה נקראת לפעמים **משפט התיכון**, ובאנגלית Apollonius's theorem ("משפט אפולוניוס").

הוכחה. נסמן $\theta = \angle ADB$. הזווית $\angle ADC$ צמודה לה, ולכן היא שווה ל־$180^\circ - \theta$, ו־$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$.
נפעיל את משפט הקוסינוסים (ראו את המסמך "משפט הקוסינוסים" בסדרה) בשני המשולשים ABD ו־ACD. בשניהם $BD = DC = \frac{a}{2}$, והצלע המשותפת היא התיכון $AD = m_a$.



סרטוט 8: התיכון AD מחלק את $\triangle ABC$ לשני משולשים.

	טענה	נימוק
(1)	$c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - a\,m_a\cos\theta$	משפט הקוסינוסים ב־$\triangle ABD$ (כי $2\cdot\frac{a}{2}\cdot m_a = a\,m_a$)
(2)	$b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} + a\,m_a\cos\theta$	משפט הקוסינוסים ב־$\triangle ACD$, ו־$\cos(180^\circ-\theta) = -\cos\theta$
(3)	$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$	חיבור: האיברים עם $\cos\theta$ מתבטלים
(4)	$m_a^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$	בידוד m_a^2

מש"ל ■

דוגמה מספרית

אורכי הצלעות של משולש הם 7, 8 ו־9. מצאו את אורך התיכון לצלע שאורכה 8.

כאן $a=8$, ושתי הצלעות האחרות הן 7 ו־9. לכן $m_a^2=\frac{2\cdot 49+2\cdot 81-64}{4}=\frac{196}{4}=49$, ו־$m_a=7$.

בדיקה בדרך אחרת: נניח ש־$AB=9$ ו־$AC=7$. לפי משפט הקוסינוסים במשולש ABC, הזווית β מקיימת $\cos\beta=\frac{8^2+9^2-7^2}{2\cdot 8\cdot 9}=\frac{2}{3}$. עכשיו נפעיל את המשפט במשולש ABD, שבו $BD=4$, ונקבל $AD^2=9^2+4^2-2\cdot 9\cdot 4\cdot\frac{2}{3}=49$ — אותה תוצאה.

שימוש 2: שאלה בסגנון בגרות

תיכונים ניצבים

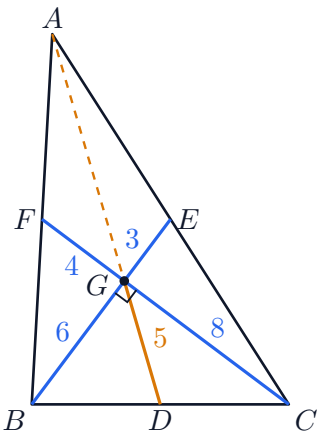
במשולש ABC התיכונים BE ו־CF ניצבים זה לזה, $BE=9$ ו־$CF=12$. **א.** מצאו את BC. **ב.** מצאו את אורך התיכון השלישי, AD. **ג.** מצאו את שטח המשולש ABC.

פתרון. לפי משפט מפגש התיכונים $BG=6$ ו־$GE=3$, וגם $CG=8$ ו־$GF=4$.

א. המשולש BGC ישר־זווית, ולכן לפי משפט פיתגורס $BC=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

ב. GD הוא התיכון ליתר במשולש BGC, ולכן $GD=\frac{1}{2}BC=5$, ו־$AD=3\cdot GD=15$.

ג. $S_{\triangle BGC}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$. המשולש BGC מורכב משניים משישת המשולשים שווי השטח (הבונוס בהוכחה 3), ולכן שטחו שליש משטח המשולש ABC, כלומר $S_{\triangle ABC}=3\cdot 24=72$.



סרטוט 9: $BE\perp CF$.

טעות נפוצה

- **היחס הפוך.** החלק הארוך של התיכון הוא זה שליד **הקודקוד**: $AG=2\cdot GD$, כלומר $AG=\frac{2}{3}AD$ ו־$GD=\frac{1}{3}AD$. שגוי: "$GD=2\cdot AG$".
- **תיכון, גובה וחוצה זווית.** תיכון מחבר קודקוד עם אמצע הצלע שמולו. בדרך כלל הוא לא ניצב לצלע הזאת ולא חוצה את הזווית שבקודקוד. (במשולש שווה־שוקיים התיכון לבסיס הוא גם גובה וגם חוצה זווית.)
- **מרכז של איזה מעגל?** G אינה מרכז המעגל החוסם את המשולש (מפגש האנכים האמצעיים), וגם לא מרכז המעגל החסום בו (מפגש חוצי הזוויות). שלוש הנקודות מתלכדות רק במשולש שווה־צלעות.
- **מחלקים ב־3, לא ב־2.** בנוסחה לשיעורי G מחלקים ב־3. חילוק ב־2 שייך לנוסחת אמצע הקטע.

9 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

1. מצאו את מפגש התיכונים של המשולש שקודקודיו $A(-2,1)$, $B(4,3)$ ו־$C(1,-7)$.
2. שניים מקודקודי משולש הם $A(1,2)$ ו־$B(7,4)$, ומפגש התיכונים שלו הוא $G(4,5)$. מצאו את הקודקוד השלישי.
3. במשולש שווה־צלעות שצלעו 6, חשבו את המרחק מ־G לקודקודים. למה כאן G היא גם מרכז המעגל החוסם?
4. שטח המשולש ABC הוא 36. מצאו את שטח המשולש AGB ואת שטח המשולש BGD.
5. ניצבי משולש ישר־זווית הם 6 ו־8. חשבו את אורך התיכון ליתר בעזרת הנוסחה משימוש 1. למה התוצאה לא מפתיעה?
6. מה קורה בהוכחה 1 אם $AE:EC=AF:FB=1:2$? (זו השאלה מתיבת "עצרו ובדקו".)

תשובות

1. $G\left(\frac{-2+4+1}{3},\ \frac{1+3-7}{3}\right)=G(1,-1)$.
2. נסמן את הקודקוד השלישי $C(x,y)$. אז $\frac{1+7+x}{3}=4$ ו־$\frac{2+4+y}{3}=5$, ולכן $x=4$ ו־$y=9$, כלומר $C(4,9)$.
3. במשולש שווה־צלעות התיכון הוא גם גובה, ואורכו $\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$. לכן $AG=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$, וכך גם BG ו־CG. הנקודה G במרחק שווה משלושת הקודקודים, ולכן היא מרכז המעגל החוסם (כאן כל תיכון הוא גם אנך אמצעי).
4. לכל אחד משש המשולשים שטח $\frac{36}{6}=6$. המשולש AGB מורכב משניים מהם, AGF ו־BGF, ולכן שטחו 12. שטח המשולש BGD הוא 6.
5. כאן $a=10$ (היתר), $b=6$ ו־$c=8$. לכן $m_a^2=\frac{2\cdot 36+2\cdot 64-100}{4}=\frac{100}{4}=25$, ו־$m_a=5$ — חצי מהיתר. זה מתאים למשפט "במשולש ישר־זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר".
6. המשולשים AFE ו־ABC דומים (צ.ז.צ: הזווית A משותפת, ו־$\frac{AF}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{3}$). לכן $\angle AFE=\angle ABC$, כלומר $FE\parallel BC$ (זוויות מתאימות), ו־$FE=\frac{1}{3}BC$. צעדים 2–4 בשלב א׳ נשארים כמו שהם, ובצעד 5 היחס הוא $\frac{1}{3}$. לכן $BG:GE=CG:GF=3:1$. החצי שבצעד 1 הוא מה שנותן את היחס $2:1$.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את המסמך בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנו קטעים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.