

הוכחה באינדוקציה

אפקט הדומינו: איך מוכיחים טענה על
אינסוף מספרים טבעיים בשני שלבים בלבד

כ־25 דקות קריאה

8 הוכחות

סדרות ואינדוקציה

5 יח"ל

כיתה י"א

מה כדאי לדעת קודם

- סכום סדרה חשבונית, ובמיוחד $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- חוקי חזקות, פתיחת סוגריים ופירוק לגורמים.
- כפל של אי-שוויון במספר שלילי הופך את כיוונו.
- להוכחות ה"אחרות": סכום סדרה הנדסית והבינום של ניוטון.

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: שורה של אבני דומינו.
- עקרון האינדוקציה, למה הוא נכון, ותבנית לכתיבת הוכחה.
- שלוש טענות, ולכל אחת שתי הוכחות: באינדוקציה ובדרך אחרת.
- בסיס שאינו 1, ושלוש מלכודות מפורסמות.
- שאלות לבדיקה עצמית.

1 האינטואיציה: אבני דומינו

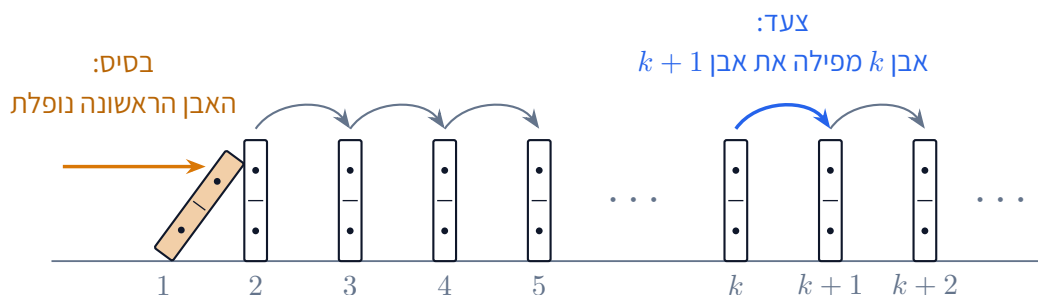
האינטואיציה

העמידו שורה ארוכה של אבני דומינו. איך אפשר להיות בטוחים שכולן ייפלו — גם האבן המאה וגם האבן המיליון — בלי לבדוק כל אבן בנפרד? מספיק לוודא שני דברים:

1. **האבן הראשונה נופלת:** דוחפים אותה.

2. **כל אבן שנופלת מפילה את האבן שאחריה:** המרווחים בין האבנים קטנים מספיק.

אז הראשונה מפילה את השנייה, השנייה את השלישית, וכן הלאה, ואף אבן לא נשארת עומדת. כך גם בסולם: אם אפשר לעלות לשלב הראשון, ומכל שלב אפשר לעלות לשלב שמעליו, מגיעים לכל שלב, גבוה ככל שיהיה. **הוכחה באינדוקציה** עושה בדיוק את זה עם טענות על מספרים טבעיים. "האבן ה־ n " היא הטענה עבור המספר n . מוכיחים שהטענה נכונה עבור $n = 1$ (האבן הראשונה נופלת), ושם היא נכונה עבור מספר טבעי כלשהו, היא נכונה גם עבור המספר שאחריו (כל אבן מפילה את הבאה).



סרטוט 1: הבסיס: האבן הראשונה נופלת. הצעד: כל אבן שנופלת מפילה את זו שאחריה.

דוגמה מספרית קטנה: נוסחה שעוברת ממקרה למקרה

ניקח את הנוסחה $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (ראו את המסמך "סכום סדרה חשבונית" בסדרה). כל סכום מתקבל מהסכום הקודם כשמוסיפים לו את המספר הבא, ובכל פעם הנוסחה מתאימה:

5	4	3	2	1	n
$10 + 5 = 15$	$6 + 4 = 10$	$3 + 3 = 6$	$1 + 2 = 3$	1	הסכום הקודם ועוד n
15	10	6	3	1	$\frac{n(n+1)}{2}$

במקום לבדוק עוד ועוד מקרים, נבדוק את **המעבר** ממקרה למקרה, אחת ולתמיד. אם הסכום עד k הוא $\frac{k(k+1)}{2}$, אז הסכום עד $k+1$ הוא $\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$, וזו בדיוק הנוסחה עבור $n = k+1$. הנוסחה נכונה עבור $n = 1$, והיא עוברת מכל k ל- $k+1$ ולכן היא נכונה לכל n .

2 עקרון האינדוקציה

נסמן ב- $P(n)$ טענה שתלויה במספר טבעי n . למשל, $P(n)$ יכולה להיות " $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ", או " $7^n - 1$ " מתחלק ב-6". הסימון $P(5)$ פירושו אותה טענה עבור $n = 5$.

עקרון האינדוקציה

נניח שמתקיימים שני תנאים:

1. $P(1)$ נכונה. זה **בסיס האינדוקציה**.

2. לכל מספר טבעי k : אם $P(k)$ נכונה, אז גם $P(k+1)$ נכונה. זה **צעד האינדוקציה**.

אז $P(n)$ נכונה לכל מספר טבעי n .

במילים: טענה שנכונה עבור 1, ו"עוברת" מכל מספר טבעי למספר שאחריו, נכונה לכל המספרים הטבעיים.

הבסיס לא חייב להיות 1. אם $P(n_0)$ נכונה, ואם לכל $k \geq n_0$ הטענה $P(k+1)$ נובעת מ- $P(k)$, אז $P(n)$ נכונה לכל $n \geq n_0$: שורת הדומינו פשוט מתחילה באבן n_0 . נראה דוגמה כזאת בסעיף 7.

למה העיקרון נכון?

הרעיון נניח בשלילה שהטענה שגויה עבור מספר כלשהו, ונסתכל על **המספר הקטן ביותר** שעבורו היא שגויה. נראה שהבסיס והצעד לא מאפשרים לו להתקיים.

טענה	נימוק
1. נניח שיש מספרים טבעיים שעבורם $P(n)$ אינה נכונה, ונסמן ב- m את הקטן שבהם	הנחת השלילה. בכל קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים יש מספר קטן ביותר
2. $m \neq 1$, ולכן $m-1$ הוא מספר טבעי	$P(1)$ נכונה (הבסיס)
3. $P(m-1)$ נכונה	$m-1$ קטן מ- m , ו- m הוא הקטן ביותר שעבורו הטענה שגויה

4 $P(m)$ נכונהצעד האינדוקציה, עם $k = m - 1$ 5 סתירה: $P(m)$ גם נכונה וגם אינה נכונה

צעדים 1 ו-4. לכן ההנחה בצעד 1 שגויה

מש"ל

מה קיבלנו בלי הוכחה? את התכונה "בכל קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים יש מספר קטן ביותר". היא נראית מובנת מאליה, אבל במספרים השלמים, למשל, אין מספר קטן ביותר. אפשר להוכיח אותה מעקרון האינדוקציה, ואת העיקרון ממנה, כמו שעשינו כאן. לכן אפשר לקבל אחת משתי הטענות האלה כהנחת יסוד (אקסיומה). כך עשה ג'וזפה פאנו, שב-1889 תיאר את המספרים הטבעיים בעזרת כמה אקסיומות, ועקרון האינדוקציה הוא אחת מהן.

3 איך כותבים הוכחה באינדוקציה

הוכחה באינדוקציה בנויה משני שלבים ומשפט סיכום. כך נכתוב אותה בכל הדוגמאות שבמסמך:

תבנית: הוכחה באינדוקציה

- בסיס האינדוקציה.** בודקים שהטענה נכונה עבור $n = 1$. בשוויון מחשבים כל אגף בנפרד, ומשווים.
- צעד האינדוקציה.**
 - ההנחה:** "נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$, כאשר k מספר טבעי כלשהו". זו **הנחת האינדוקציה**.
 - המטרה:** כותבים במפורש את הטענה עבור $n = k + 1$ (מציבים $k + 1$ במקום n , בכל מקום).
 - ההוכחה:** מוצאים בתוך הביטוי עבור $k + 1$ את הביטוי מההנחה, ומשתמשים בהנחה.
- סיכום.** "לפי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי."

רגע – אנחנו מניחים את מה שרוצים להוכיח? לא. בשלב הצעד לא טוענים ש- $P(k)$ נכונה, אלא מוכיחים טענה מהצורה "**אם** $P(k)$ נכונה, **אז** גם $P(k + 1)$ נכונה". זה כמו לוודא שהמרווח בין כל שתי אבנים קטן מספיק: הבדיקה לא מפילה אף אבן, אבל היא מבטיחה שאבן שתיפול תפיל את זו שאחריה. את השרשרת מתחיל הבסיס.

ובבגרות? בשאלות על אינדוקציה מופיע לעיתים הניסוח "הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי..." לכן בכל אחת משלוש הדוגמאות הבאות נוכיח את הטענה פעמיים, ונראה מה כל דרך נותנת.

4 דוגמה 1: סכום הריבועים

כמה זה $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2$? אפשר לחבר מאה מספרים, אבל יש נוסחה:

סכום הריבועים

לכל מספר טבעי n :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

לדוגמה: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} = 30$, ו- $1^2 + 2^2 + \dots + 100^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = 338,350$

נסמן $S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$, ונוכיח את הנוסחה בשתי דרכים.

הוכחה א': באינדוקציה

בסיס ($n = 1$): באגף שמאל $S_1 = 1^2 = 1$, ובאגף ימין $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$. האגפים שווים.

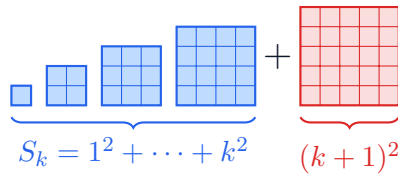
צעד. נניח שהנוסחה נכונה עבור $n = k$:

$$S_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

(זו הנחת האינדוקציה), ונוכיח אותה עבור $n = k + 1$:

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

הצבנו $k + 1$ במקום n , ולכן $n + 1$ הפך ל- $k + 2$, ו- $2n + 1$ הפך ל- $2(k + 1) + 1 = 2k + 3$.



סרטוט 2: S_{k+1} הוא S_k ועוד ריבוע אחד (כאן $k = 4$).

נימוק	טענה
k הריבועים הראשונים ועוד הריבוע הבא; הנחת האינדוקציה	① $S_{k+1} = S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$
מכנה משותף, והוצאת $(k+1)$ כגורם משותף	② $S_{k+1} = \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$
פתיחת הסוגריים המרובעים	③ $S_{k+1} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$
פירוק לגורמים: $2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3)$ זו הנוסחה עבור $n = k + 1$, ולכן לפי עקרון האינדוקציה היא נכונה לכל n	④ $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

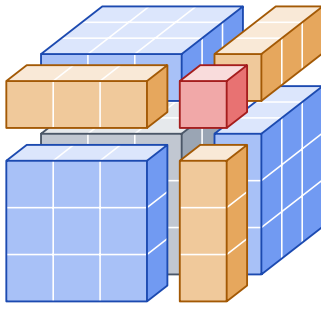
מש"ל

✓ עצרו ובדקו

בצעד 4 פירקנו את $2k^2 + 7k + 6$ לגורמים $(k+2)(2k+3)$. איך ידענו לחפש דווקא את הפירוק הזה? התשובה בסוף המסמך.

הוכחה ב': סכום טלסקופי – כך מגלים את הנוסחה

הרעיון הוכחה א' מוודאת את הנוסחה, אבל לא מסבירה מאיפה היא באה: היינו צריכים לדעת אותה מראש. הנה דרך שמגלה אותה. נחבר n מקרים של זהות פשוטה על חזקות שלישיות. כמעט כל האיברים יתבטלו, ונקבל משוואה שהנעלים בה הוא S_n .



סרטוט 3: קובייה שצלעה $k+1$ (כאן $k=3$)
מפורקת לחלקיה: $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$.

לפי פתיחת סוגריים, $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$, ולכן לכל k :

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

בסרטוט רואים את הזהות הזאת בעיניים. מקובייה שצלעה $k+1$ מוציאים קובייה אפורה שצלעה k . נשארים שלושה "לוחות" כחולים של $k \times k \times 1$ (יחד $3k^2$ קוביות קטנות), שלושה "מוטות" כתומים של $k \times 1 \times 1$ (יחד $3k$) וקובייה קטנה אדומה.

נרשום את הזהות עבור $k = 1, 2, 3, \dots, n$, ונחבר את כל השורות:

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$

$$4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$$

$$\vdots$$

$$(n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$$

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + n$$

באגף שמאל כל חזקה מ- 2^3 עד n^3 מופיעה פעם עם פלוס ופעם עם מינוס, ולכן מתבטלת. מכאן השם **סכום טלסקופי**: כמו בטלסקופ מתקפל, נשארים רק הקצוות. באגף ימין נאספים $3S_n$, ועוד $3(1 + 2 + \dots + n)$, ועוד n אחדים. נציב $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, ונבודד את $3S_n$:

$$\begin{aligned} 3S_n &= (n+1)^3 - 1 - n - \frac{3n(n+1)}{2} = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)[2(n+1)^2 - 2 - 3n]}{2} = \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}. \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ ונקבל ב-} 3.$$

מש"ל

הפעם הנוסחה **יצאה** מהחישוב, ולא היינו צריכים לנחש אותה. אותו טריק עובד גם לסכום $1 + 2 + \dots + n$: מחברים את הזהות $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$ עבור $k = 1, \dots, n$, ומקבלים $(n+1)^2 - 1 = 2(1 + 2 + \dots + n) + n$. בדקו שמכאן יוצא $\frac{n(n+1)}{2}$.

אז אפשר בלי אינדוקציה? לא לגמרי. גם בהוכחה ב' יש "וכן הלאה": הנקודות: באמצע החישוב. עקרון האינדוקציה הוא בדיוק מה שהופך "וכן הלאה" כזה להוכחה מלאה.

5 דוגמה 2: טענת התחלקות

התחלקות ב-6

לכל מספר טבעי n , המספר $7^n - 1$ מתחלק ב-6 (ללא שארית).

"מתחלק ב-6" פירושו שיש מספר שלם m שעבורו $7^n - 1 = 6m$. נבדוק כמה מקרים:

$$7^1 - 1 = 6 = 6 \cdot 1, \quad 7^2 - 1 = 48 = 6 \cdot 8, \quad 7^3 - 1 = 342 = 6 \cdot 57.$$

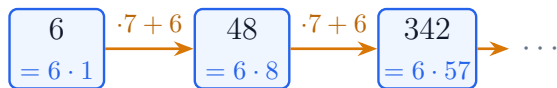
הוכחה א': באינדוקציה

בסיס ($n = 1$): המספר $7^1 - 1 = 6$ מתחלק ב-6.

צעד. נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$, כלומר $7^k - 1 = 6m$, עבור מספר שלם m כלשהו. נוכיח שגם $7^{k+1} - 1$ מתחלק ב-6.

נימוק	טענה
חוקי חזקות. כדי שיופיע $7^k - 1$, מחסירים 7 ומוסיפים 7	① $7^{k+1} - 1 = 7 \cdot 7^k - 1 = 7(7^k - 1) + 6$
הנחת האינדוקציה	② $7(7^k - 1) + 6 = 7 \cdot 6m + 6$
הוצאת 6 כגורם משותף. $7m + 1$ הוא מספר שלם, ולכן $7^{k+1} - 1$ מתחלק ב-6	③ $7^{k+1} - 1 = 6(7m + 1)$

מש"ל



סרטוט 4: המספרים $7^n - 1$ עבור $n = 1, 2, 3$.

הרעיון שבצעד 1 הוא לב הוכחה: **דואגים שהביטוי מההנחה יופיע**, כדי שאפשר יהיה להשתמש בה. זה הרעיון ברוב ההוכחות של טענות התחלקות. בסרטוט רואים את הצעד בפעולה: כל מספר בשרשרת הוא פי 7 מהקודם, ועוד 6. לכן אם הקודם מתחלק ב-6, גם הבא מתחלק ב-6.

הוכחה ב': פירוק לגורמים

הרעיון במסמך "סכום סדרה הנדסית" בסדרה הוכחנו, בלי אינדוקציה, את הזהות

$$q^n - 1 = (q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1).$$

נציב בה $q = 7$:

$$7^n - 1 = (7 - 1)(7^{n-1} + \dots + 7 + 1) = 6 \cdot (7^{n-1} + \dots + 7 + 1).$$

בסוגריים יש סכום של מספרים שלמים, כלומר מספר שלם. לכן $7^n - 1$ מתחלק ב-6.

מש"ל

ההוכחה הזאת נותנת יותר מאישור. היא מראה **מאיפה** בא ה-6 (הוא $7 - 1$), ונותנת את המנה במפורש, כמו $\frac{7^3-1}{6} = 49 + 7 + 1 = 57$. באותו אופן, לכל מספר טבעי $a \geq 2$ המספר $a^n - 1$ מתחלק ב- $a - 1$. כך, למשל, $4^n - 1$ מתחלק ב-3, ו- $5^n - 1$ מתחלק ב-4. טענות כאלה הן חלק מתוכנית הלימודים, אבל בבחינות הבגרות של 2026 ושל 2027 "בעיות התחלקות" באינדוקציה אינן נכללות (לפי המיקוד).

6 דוגמה 3 (להעמקה): אי־שוויון ברנולי

באינדוקציה אפשר להוכיח גם אי־שוויונים. בתוכנית הלימודים מוכיחים באינדוקציה בעיקר נוסחאות של סכומים וטענות התחלקות, ולכן הסעיף הזה והסעיף הבא הם להעמקה.

אי־שוויון ברנולי

לכל מספר ממשי $x \geq -1$ ולכל מספר טבעי n :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

לדוגמה: עבור $x = 0.1$ ו- $n = 10$, באגף שמאל $2.59 \approx 1.1^{10}$, ובאגף ימין $2 = 1 + 10 \cdot 0.1$.

האי־שוויון קרוי על שם יעקב ברנולי, שפרסם אותו ב־1689.

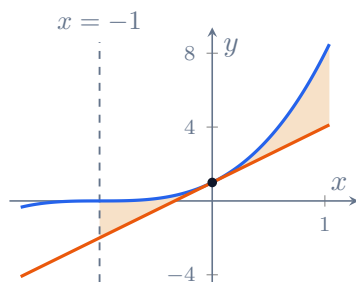
הוכחה א': באינדוקציה

בסיס ($n = 1$): שני האגפים שווים ל- $1+x$, ולכן האי־שוויון "≥" מתקיים.

צעד. נניח ש- $(1+x)^k \geq 1+kx$ (הנחת האינדוקציה), ונוכיח ש- $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$.

טענה	נימוק
① $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x)$	חוקי חזקות
② $(1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx)(1+x)$	כופלים את שני האגפים של הנחת האינדוקציה ב- $1+x$. כאן משתמשים בתנאי $x \geq -1$: המספר $1+x$ אינו שלילי, ולכן הכפל בו לא הופך את כיוון האי־שוויון
③ $(1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$	פתיחת סוגריים, ו- $kx^2 \geq 0$
④ $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$	צעדים 3-1

מש"ל



סרטוט 5: בכחול $y = (1+x)^3$, ובכתום המשיק $y = 1+3x$. בתחום $x \geq -1$ הפער הצבוע אינו שלילי.

והתנאי $x \geq -1$ **באמת נחוץ?** להוכחה – כן: אם $x < -1$, $1+x < 0$, הכפל בצעד 2 הופך את כיוון האי־שוויון. הטענה עצמה נכונה גם קצת משמאל ל-1, כמו שרואים בסרטוט. למשל,

$(1+x)^3 - (1+3x) = x^2(x+3)$, ולכן עבור $n = 3$ היא נכונה לכל $x \geq -3$. אבל לא לכל x : עבור $x = -4$ ו- $n = 3$, מקבלים $(1-4)^3 = -27$, ואילו $1+3 \cdot (-4) = -11$.

מבט בגרף. הישר $y = 1+nx$ **משיק** לגרף של $y = (1+x)^n$ בנקודה $(0,1)$: הנגזרת $n(1+x)^{n-1}$ שווה שם ל- n , השיפוע של הישר. אי־שוויון ברנולי אומר שבתחום $x \geq -1$ הגרף לא יורד אל מתחת למשיק הזה.

הוכחה ב' (כש- $x \geq 0$): הבינום של ניוטון

לפי הבינום, עבור $n \geq 2$:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots + x^n.$$

כש- $x \geq 0$ כל האיברים שאחרי $1 + nx$ אינם שליליים, ולכן $(1+x)^n \geq 1 + nx$. עבור $n = 1$ יש שוויון.

מש"ל

בדיוק בנימוק הזה, עם $x = h > 0$, השתמשנו במסמך "סכום סדרה הנדסית אינסופית" בסדרה. שם אי-שוויון ברנולי הוא המפתח להוכחה ש- q^n שואף ל-0 כש- $|q| < 1$.

7 בסיס שאינו 1 (להעמקה): $2^n > n^2$

מי גדול יותר, 2^n או n^2 ? נבדוק:

7	6	5	4	3	2	1	n
128	64	32	16	8	4	2	2^n
49	36	25	16	9	4	1	n^2
כן	כן	כן	לא	לא	לא	כן	האם $2^n > n^2$?

הטענה $2^n > n^2$ נכונה עבור $n = 1$, שגויה עבור $n = 2, 3, 4$, ונראית נכונה מ- $n = 5$ והלאה. נוכיח: לכל $n \geq 5$ מתקיים $2^n > n^2$.

בסיס ($n = 5$): הטענה נכונה, כי $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

צעד. נניח ש- $2^k > k^2$ עבור $k \geq 5$ כלשהו, ונוכיח ש- $2^{k+1} > (k+1)^2$.

נימוק	טענה
כופלים את הנחת האינדוקציה ב-2	$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2$ ①
פתיחת סוגריים והשלמה לריבוע. $k \geq 5$, ולכן $k-1 \geq 4$	$2k^2 - (k+1)^2 = (k-1)^2 - 2 \geq 4^2 - 2 > 0$ ②
צעדים 1 ו-2	$2^{k+1} > 2k^2 > (k+1)^2$ ③

מש"ל

ולמה לא להתחיל מ- $n = 3$? הנימוק שבצעד 2 עובד כבר כש- $2 > (k-1)^2$, כלומר לכל $k \geq 3$. אבל הצעד הוא רק הבטחה: **אם** הטענה נכונה עבור k , היא נכונה גם עבור $k+1$. עבור $k = 3$ ו- $k = 4$ ה"אם" לא מתקיים ($9 < 8$ ו- $16 = 16$). והטענה עבור $n = 1$ היא נכונה, אבל ממנה אי אפשר להתקדם: עבור $n = 2$ הטענה היא $4 > 4$, והיא שגויה. לכן שרשרת הדומינו מתחילה רק ב- $n = 5$.

8 שלוש מלכודות

עקרון האינדוקציה דורש גם בסיס וגם צעד. בכל אחת משלוש המלכודות הבאות נכשל משהו אחר. זיהוי של "הוכחה" שגויה הוא אחת המטרות המפורשות של תוכנית הלימודים באינדוקציה, ולכן כדאי להכיר את המלכודות האלה.

▲ מלכודת 1: צעד בלי בסיס

"טענה": לכל n טבעי, המספר $n^2 + n$ אי-זוגי.
"צעד": נניח ש- $k^2 + k$ אי-זוגי. אז $(k+1)^2 + (k+1) = (k^2 + k) + 2(k+1)$ הוא מספר אי-זוגי ועוד מספר זוגי, כלומר מספר אי-זוגי. הצעד נכון לגמרי!
אבל הבסיס נכשל: $1^2 + 1 = 2$ הוא מספר זוגי. ולמעשה הטענה שגויה עבור כל n , כי $n^2 + n = n(n+1)$ הוא מכפלה של שני מספרים עוקבים, ואחד מהם זוגי. האבנים מסודרות היטב, אבל אף אחד לא דחף את הראשונה.

▲ מלכודת 2: הרבה בדיקות הן לא הוכחה

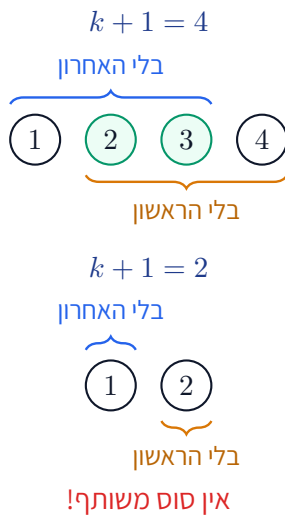
נציב בביטוי $n^2 + n + 41$ את $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ונקבל $41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, \dots$ כולם מספרים ראשוניים! זה נמשך כך ארבעים פעמים ברציפות, עבור $n = 0, 1, \dots, 39$. האם $n^2 + n + 41$ תמיד ראשוני? לא. עבור $n = 40$:

$$40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot 41 = 41^2.$$

ארבעים בדיקות שהצליחו אינן הוכחה, כי אין כאן צעד: שום נימוק לא מעביר את הטענה מ- k ל- $k+1$. לאונרד אוילר שם לב לתכונה הזאת של הביטוי כבר ב-1772.

▲ מלכודת 3: כל הסוסים באותו צבע

"טענה": בכל קבוצה של n סוסים, כל הסוסים באותו צבע.
בסיס ($n = 1$): בקבוצה של סוס אחד יש רק צבע אחד. נכון.
"צעד": נניח שבכל קבוצה של k סוסים כל הסוסים באותו צבע. ניקח קבוצה של $k+1$ סוסים, ממוספרים מ-1 עד $k+1$. בלי הסוס האחרון נשארים k סוסים, מ-1 עד k , ולכן הם באותו צבע. גם בלי הסוס הראשון נשארים k סוסים, מ-2 עד $k+1$, ולכן גם הם באותו צבע. הסוס מספר 2 שייך לשתי הקבוצות, ולכן לשתייהן אותו צבע – וכל $k+1$ הסוסים באותו צבע.
מצאו את הטעות לפני שתמשיכו לקרוא. רמז: נסו $k = 1$.



סרטוט 6: למעלה: 2 ו-3 בשתי
הקבוצות. למטה: אין סוס משותף.

הטעות היא במשפט "הסוס מספר 2 שייך לשתי הקבוצות".
כש- $k + 1 \geq 3$ הוא נכון. אבל כש- $k + 1 = 2$, הקבוצה הראשונה היא
סוס 1 לבדו, והשנייה היא סוס 2 לבדו: אין ביניהן סוס משותף, ואין סיבה
שהיו באותו צבע. כלומר, הצעד מ- $n = 1$ ל- $n = 2$ שגוי, והשרשרת
נעצרת כבר באבן השנייה. הנימוק של הצעד תקין לכל $k \geq 2$, אבל זה לא
עוזר: אבן שלא נפלה לא מפילה את הבאה.
את הטעוין הזה, בגרסה על צבע העיניים של בנות, הציג המתמטיקאי
ג'ורג' פוליה ב-1954.

9 אינדוקציה מול דרכים אחרות

בדוך אחרת	באינדוקציה	
סכום טלסקופי: מגלה את הנוסחה	מוודאת נוסחה שצריך לדעת מראש	סכום הריבועים
פירוק לגורמים: מראה שה-6 הוא $7 - 1$, ונותן את המנה	דואגים ש- $7^k - 1$ יופיע	$7^n - 1$ מתחלק ב-6
הבינום: רק כש- $x \geq 0$, אבל רואים את כל האיברים	מכסה את כל התחום $x \geq -1$	אי-שוויון ברנולי

איפה עוד בסדרה? הוכחות באינדוקציה יש גם במסמכים "סכום סדרה חשבונית" (הוכחה 3) ו"הבינום של ניוטון ונוסחת ברנולי" (הוכחות 2 ו-4). במסמך "כפל מרוכבים ומשפט דה מואבר" מוכיחים כך את משפט דה מואבר, ובמסמך "אי-שוויון הממוצעים" מתוארת האינדוקציה "הלך ושוב" של קושי.

הידעתם?

כבר אל-כרג'י, שחי בבגדאד בסביבות שנת 1000, עבר ממקרה למקרה, עד בערך $n = 5$, והעיר שאפשר להמשיך כך בלי סוף – אבל לא ניסח הוכחה כללית. הרלב"ג, רבי לוי בן גרשון (1288–1344), מתמטיקאי ופילוסוף יהודי שחי בדרום צרפת, השלים ב-1321 את ספרו "מעשה חושב". יש היסטוריונים שרואים בהוכחות שבספר הזה את השימוש השיטתי הראשון באינדוקציה.

פרנצ'סקו מאורוליקו מסיציליה הוכיח באינדוקציה, בספר שנדפס ב-1575, שסכום n המספרים האי-זוגיים הראשונים הוא n^2 (שאלה 1 בסוף המסמך). בלז פסקל כתב ב-1654 חיבור על המשולש שנקרא היום על שמו, והחיבור יצא לאור רק ב-1665, אחרי מותו. כדי להוכיח שם טענה על יחס בין מספרים סמוכים במשולש, הוא כתב: "אף שלטענה הזאת יש אינסוף מקרים, אתן לה הוכחה קצרה מאוד, בהנחת שתי טענות עזר." הראשונה, "המובנת מאליה": היחס מתקיים בשורה השנייה של המשולש. השנייה: "אם היחס הזה מתקיים בשורה כלשהי, הוא יתקיים בהכרח גם בשורה שאחריה." אלה בדיוק הבסיס והצעד. השם "אינדוקציה מתמטית" הופיע, ככל הידוע, ב-1838, אצל המתמטיקאי הבריטי אוגוסטוס דה מורגן.

10 בדקו את עצמכם

✓ חמש שאלות

1. הוכיחו באינדוקציה: לכל n טבעי, $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.
2. הוכיחו באינדוקציה: לכל n טבעי, $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
3. הוכיחו שלכל n טבעי המספר $3^{2n} - 1$ מתחלק ב-8, פעם באינדוקציה ופעם בדרך אחרת.
4. מצאו את הטעות: "נוכיח ש- $n^2 \geq 2^n$ לכל n טבעי. בסיס: $2^1 = 2 \geq 1$. צעד: אם $2^k \geq k^2$, אז $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2k^2 \geq (k+1)^2$ (רמז: בדקו את $n = 3$).
5. ענו על השאלה מתיבת "עצרו ובדקו".

תשובות

1. **בסיס:** $1 = 1^2$. **צעד:** נניח ש- $k^2 = 1 + 3 + \dots + (2k - 1)$. האיבר הבא הוא $2k + 1$, ולכן הסכום החדש הוא $(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1$. ובלי אינדוקציה: זו סדרה חשבונית עם $a_1 = 1$ ו- $d = 2$, וסכומה $\frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$.
2. **בסיס:** $1^3 = 1 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$. **צעד:** נניח ש- $1^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$. אז $1^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$.
3. שימו לב: סכום החזקות השלישיות שווה לריבוע של $1 + 2 + \dots + n$.
באינדוקציה. בסיס: $3^2 - 1 = 8$. צעד: אם $3^{2k} - 1 = 8m$, אז $3^{2k+2} - 1 = 9 \cdot 3^{2k} - 1 = 9(3^{2k} - 1) + 8 = 8(9m + 1)$.
בדרך אחרת. $3^{2n} - 1 = 9^n - 1 = (9 - 1)(9^{n-1} + \dots + 9 + 1)$, ולכן הוא מתחלק ב-8.
 עבור $n = 3$ הטענה שגויה: $3^2 = 9 < 8 = 2^3$. הבסיס נכון, והטעות בצעד. האי-שוויון $2k^2 \geq (k+1)^2$ שקול ל- $(k-1)^2 \geq 2$, והוא נכון רק כש- $k \geq 3$. במעבר מ- $n = 2$ ל- $n = 3$ הוא נכשל ($8 < 9$), והשרשרת נשברת.
 (מ- $n = 4$ והלאה הטענה שוב נכונה, אבל את זה מוכיחים מבסיס חדש.)
5. ידענו מה צריך לצאת: $\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$. לכן חיפשנו בתוך $2k^2 + 7k + 6$ את הגורמים $k+2$ ו- $2k+3$, ובדקנו בפתיחת סוגריים. בהוכחה באינדוקציה תמיד יודעים לאן רוצים להגיע, וזה עוזר מאוד באלגברה.