

משפט חוצה הזווית

חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמולה ביחס של שתי הצלעות שלידה – שלוש הוכחות, משפט הפוך וחוצה הזווית החיצונית

כ־20 דקות קריאה

3 הוכחות

גאומטריה

4-5 יח"ל

כיתה י'

מה כדאי לדעת קודם

- זוויות מתאימות וזוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים.
- משפט תאלס ודמיון משולשים.
- שטח משולש: חצי בסיס כפול גובה.
- להוכחה 3: משפט הסינוסים (ראו את המסמך "משפט הסינוסים").
- לאורך חוצה הזווית: זוויות היקפיות במעגל (ראו "זווית היקפית וזווית מרכזית").

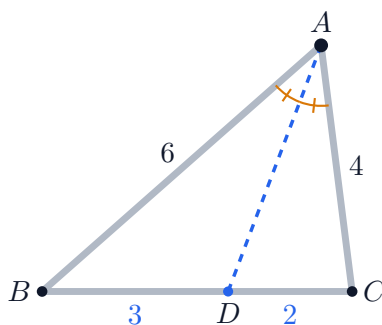
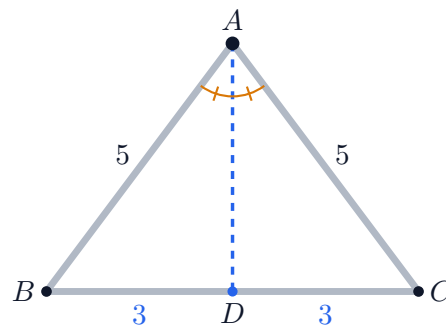
מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: שביל שעובר בדיוק באמצע הזווית שבין שתי דרכים.
- שלוש הוכחות: בעזרת משפט תאלס, בעזרת שטחים ובעזרת משפט הסינוסים.
- המשפט ההפוך וחוצה הזווית החיצונית.
- שימושים: אורך חוצה הזווית ומרכז המעגל החסום.
- טעויות נפוצות, היסטוריה ושאלות לבדיקה עצמית.

1 האינטואיציה: שביל באמצע הזווית

האינטואיציה

דמיינו צומת A שיוצאות ממנו שתי דרכים ישרות: האחת לעיר B , באורך 6 ק"מ, והשנייה לעיר C , באורך 4 ק"מ. דרך ישרה שלישית, באורך 5 ק"מ, מחברת את שתי הערים. עכשיו סוללים מהצומת שביל ישר שעובר בדיוק באמצע הזווית שבין שתי הדרכים, עד שהוא פוגש את הדרך BC בנקודה D . איפה תהיה D ? אילו שתי הדרכים היו שוות באורכן, המפה הייתה סימטרית, והשביל היה פוגש את BC בדיוק באמצע. אבל הדרך ל- B ארוכה יותר, והשביל פוגש את BC קרוב יותר ל- C . במילים אחרות: **הדרך הארוכה "מקבלת" את החלק הארוך**. ובאיזה יחס? ביחס שבין אורכי הדרכים, כלומר $BD : DC = 6 : 4$.



סרטוט 1: מימין: דרכים שוות, והשביל (המקווקו) פוגש את BC באמצע. משמאל: הדרך ל- B ארוכה יותר.

דוגמה מספרית קטנה

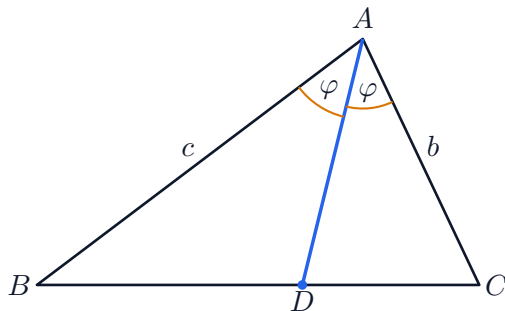
היחס $BD : DC = 6 : 4$ אומר שאם נחלק את הדרך BC ל- $10 = 6 + 4$ חלקים שווים, אז 6 חלקים שייכים ל- BD , ו-4 חלקים שייכים ל- DC . כל חלק הוא באורך $0.5 = 10 \div 5$ ק"מ, ולכן:

$$BD = 6 \cdot 0.5 = 3, \quad DC = 4 \cdot 0.5 = 2.$$

הסרטוט מצויר בקנה מידה. בדקו בסרגל: BD אורך מ- DC פי 1.5, בדיוק כמו ש- AB אורך מ- AC פי 1.5.

ולמה דווקא היחס בין הדרכים? השביל "הוגן": כל נקודה עליו, ובפרט D , רחוקה משתי הדרכים באותה מידה. לכן מבין שני ה"מגרשים" שהוא יוצר, ABD ו- ADC , המגרש שליד הדרך הארוכה גדול פי $\frac{6}{4}$ בדיוק. אבל לשני המגרשים יש גם גובה משותף מ- A אל BC , ולכן גם הבסיסים שלהם, BD ו- DC , הם ביחס $6 : 4$. זה הרעיון של הוכחה 2, ונראה גם שתי הוכחות אחרות.

2 המשפט



סרטוט 2: חוצה הזווית AD והסימונים.

נסתכל על משולש ABC ועל חוצה הזווית שבקודקוד A . הוא פוגש את הצלע BC בנקודה D , ומחלק את הזווית לשתי זוויות שוות. נסמן כל אחת מהן ב- φ :

$$\angle BAD = \angle DAC = \varphi, \quad \angle BAC = 2\varphi.$$

כמו בסימון המקובל, נסמן $a = BC$ הצלע AB $c =$ נמצאת מול הקודקוד C , והצלע AC $b =$ נמצאת מול הקודקוד B .

משפט חוצה הזווית

אם חוצה הזווית A במשולש ABC פוגש את הצלע BC בנקודה D , אז:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

במילים: חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים, והיחס ביניהם שווה ליחס בין שתי הצלעות שכולאות את הזווית. כל קטע "הולך" עם הצלע שנוגעת בו: BD עם AB , ו- DC עם AC .

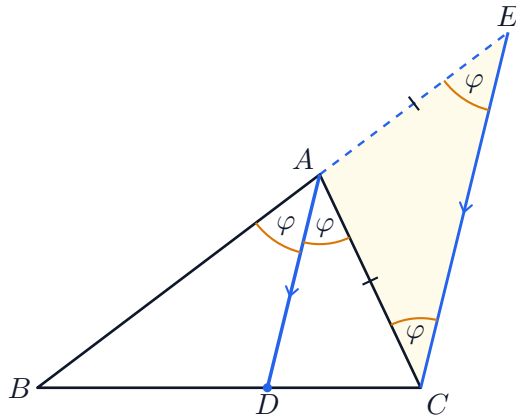
צורות שקולות. נכפול את שני האגפים ב- $\frac{DC}{AB}$ ונקבל $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$. ואם רוצים את אורכי הקטעים עצמם: לפי המשפט, $BD = c \cdot k$ ו- $DC = b \cdot k$ עבור מספר חיובי כלשהו k . כיוון ש- $BD + DC = a$, מקבלים $k = \frac{a}{b+c}$, ולכן

$$BD = \frac{ac}{b+c}, \quad DC = \frac{ab}{b+c}.$$

זה החישוב של "חלוקה לחלקים" מהדוגמה: $BD = \frac{5 \cdot 6}{10} = 3$ ו- $DC = \frac{5 \cdot 4}{10} = 2$.

3 הוכחה 1: ישר מקביל ומשפט תאלס

הרעיון נעביר ישר עזר שמקביל לחוצה הזווית. הוא "יעתיק" את הצלע AC אל ההמשך של הצלע BA , ואז משפט תאלס ישווה בין שני היחסים.



הבנייה. דרך הקודקוד C נעביר ישר שמקביל ל- AD . הישר הזה פוגש את ההמשך של הצלע BA , מעבר ל- A , בנקודה שנשמך ב- E .

נשתמש בשתי עובדות:

- בין שני ישרים מקבילים, זוויות מתאימות שוות זו לזו, וגם זוויות מתחלפות.
- **משפט תאלס:** שני ישרים מקבילים שחותכים את שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.

סרטוט 3: $CE \parallel AD$, והמשולש ACE שווה-שוקיים.

נימוק	טענה
זוויות מתאימות: $AD \parallel EC$, והישר BE חותך את שניהם	$\angle AEC = \angle BAD = \varphi$ ①
זוויות מתחלפות: $AD \parallel EC$, והישר AC חותך את שניהם	$\angle ACE = \angle DAC = \varphi$ ②
במשולש ACE שתי זוויות שוות (צעדים 1 ו-2), ומול זוויות שוות מונחות צלעות שוות	$AE = AC$ ③
משפט תאלס: הישרים המקבילים AD ו- EC חותכים את שוקי הזווית B	$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$ ④
הצבת $AE = AC$ מצעד 3	$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ ⑤

מש"ל

✓ עצרו ובדקו

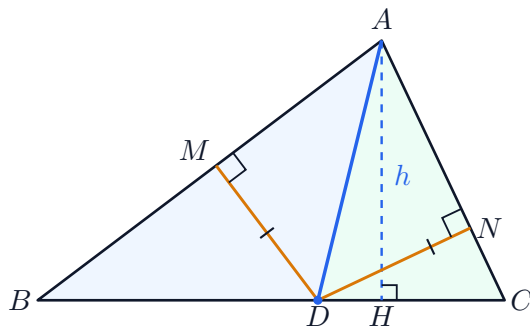
בבנייה אמרנו שהישר שעובר דרך C ומקביל ל- AD פוגש את הישר BA מעבר ל- A . למה הוא בכלל פוגש את BA ? ולמה לא בין A ל- B ?
רמז: באיזה צד של הישר AD נמצאת C , ובאיזה צד נמצאת B ?

🔗 מה למדנו מהוכחה 1

הישר המקביל הפך שתי זוויות **שוות** לשתי צלעות **שוות**, $AE = AC$, ומשפט תאלס השלים את העבודה. אותו רעיון יוכיח גם את משפט חוצה הזווית החיצונית.

4 הוכחה 2: שטחים

הרעיון חוצה הזווית מחלק את המשולש לשני משולשים, ABD ו- ADC . נחשב את היחס בין השטחים שלהם בשתי דרכים: פעם עם הבסיסים BD ו- DC , ופעם עם הבסיסים AB ו- AC .



סרטוט 4: גובה משותף מ- A , וגבהים שווים מ- D .

נוריד שלושה גבהים:

- AH מהקודקוד A לישר BC . נסמן את אורכו ב- h .
- DM מהנקודה D לישר AB .
- DN מהנקודה D לישר AC .

הגובה AH משותף לשני המשולשים. הגבהים DM ו- DN שווים זה לזה, כי **כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחקים שווים משוקי הזווית**.

נימוק	טענה
הבסיסים BD ו- DC , והגובה המשותף h	$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} BD \cdot h}{\frac{1}{2} DC \cdot h} = \frac{BD}{DC} \quad (1)$
נמצאת על חוצה הזווית A	$DM = DN \quad (2)$
הבסיסים AB ו- AC , הגבהים DM ו- DN , וצעד 2	$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot DM}{\frac{1}{2} AC \cdot DN} = \frac{AB}{AC} \quad (3)$
שני ביטויים לאותו יחס (צעדים 1 ו-3)	$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (4)$

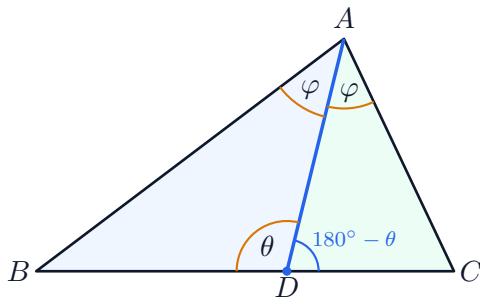
מש"ל

למה $DM = DN$? המשולשים AMD ו- AND חופפים לפי ז.צ.ז: היתר AD משותף, הזוויות שבקודקוד A שוות ל- φ , ולכן גם הזוויות שבקודקוד D שוות. ולא משנה אם עקב גובה נופל על הצלע עצמה או על ההמשך שלה: "חצי בסיס כפול גובה" נכון בשני המקרים.

אותה הוכחה בשורה אחת. לפי "חצי מכפלת שתי צלעות בסינוס הזווית שביניהן" (ראו את המסמך "נוסחאות לשטח משולש"), $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \varphi$ ו- $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot AD \sin \varphi$, והיחס ביניהם הוא שוב $\frac{AB}{AC}$.

5 הוכחה 3: משפט הסינוסים

הרעיון נפעיל את משפט הסינוסים בכל אחד מהמשולשים ABD ו- ADC . בשניהם מופיעה אותה זווית φ , והזוויות שבקודקוד D צמודות – ולכן יש להן אותו סינוס.



סרטוט 5: הזוויות הצמודות שבנקודה D.

נסמן $\theta = \angle ADB$. הזווית $\angle ADC$ צמודה לה, ולכן $\angle ADC = 180^\circ - \theta$, ולזוויות צמודות יש אותו סינוס:

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

במשולש ABD הצלע BD נמצאת מול הזווית φ , והצלע AB נמצאת מול הזווית θ . במשולש ADC הצלע DC נמצאת מול φ , והצלע AC מול $180^\circ - \theta$.

נימוק

טענה

משפט הסינוסים ב- $\triangle ABD$

$$\frac{BD}{\sin \varphi} = \frac{AB}{\sin \theta} \quad (1)$$

משפט הסינוסים ב- $\triangle ADC$, וזהות הזוויות הצמודות

$$\frac{DC}{\sin \varphi} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{AC}{\sin \theta} \quad (2)$$

בידוד BD ו-DC

$$DC = \frac{AC \sin \varphi}{\sin \theta} \quad \text{ו} \quad BD = \frac{AB \sin \varphi}{\sin \theta} \quad (3)$$

חילוק: $\sin \theta$ ו- $\sin \varphi$ מצטמצמים

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (4)$$

מש"ל

הכללה: ומה אם AD אינו חוצה זווית?

בהוכחה 3 כמעט לא השתמשנו בכך ש-AD חוצה את הזווית. תהי D נקודה כלשהי על הצלע BC, ונסמן $\angle BAD = \varphi_1$ ו- $\angle DAC = \varphi_2$. אותם צעדים בדיוק נותנים $\frac{BD}{DC} = \frac{AB \sin \varphi_1}{AC \sin \varphi_2}$. משפט חוצה הזווית הוא המקרה $\varphi_1 = \varphi_2$, שבו הסינוסים מצטמצמים. בנוסחה הזאת נשתמש כשנוכיח את המשפט ההפוך.

6 שלוש ההוכחות זו מול זו

הוכחה 1: מקביל ותאלס	הוכחה 2: שטחים	הוכחה 3: משפט הסינוסים	
הרעיון	יחס בין שני שטחים, בשתי דרכים	משפט הסינוסים בשני חלקי המשולש	ישר מקביל ל-AD "מעתיק" את AC אל הישר BA
הכלים	שטח משולש, מרחקים שווים משוקי זווית	משפט הסינוסים, זוויות צמודות	זוויות בין מקבילים, משולש שווה-שוקיים, תאלס
היתרון	ההוכחה של אוקלידס. עובדת גם לחוצה הזווית החיצונית	מראה "למה": לצלע הארוכה משולש גדול יותר	הכי קצרה, ונותנת נוסחה גם לקטע מ-A שאינו חוצה זווית

7 המשפט ההפוך

המשפט אומר: אם AD חוצה את הזווית, אז D מחלקת את BC ביחס $AB : AC$. גם הכיוון ההפוך נכון, ובזכותו אפשר להוכיח שקטע הוא חוצה זווית בלי למדוד זוויות בכלל – מספיק למדוד קטעים. במסמך "המשיק לאליפסה ולהיפרבולה" בסדרה משתמשים בו כדי להוכיח את תכונת ההחזרה.

המשפט ההפוך

אם D היא נקודה על הצלע BC של משולש ABC , ו- $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, אז AD חוצה את הזווית A .

הרעיון נשווה את D לנקודה שבה חוצה הזווית "האמיתי" פוגש את BC , ונראה שזו אותה נקודה: על קטע יש רק נקודה אחת שמחלקת אותו ביחס נתון.

הוכחה. נסמן ב- D' את הנקודה שבה חוצה הזווית A פוגש את BC . לפי משפט חוצה הזווית $\frac{BD'}{D'C} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, כלומר שתי הנקודות D ו- D' מחלקות את הקטע BC באותו יחס. אבל על קטע יש רק נקודה אחת שמחלקת אותו ביחס נתון: אם P על הקטע BC ו- $\frac{BP}{PC} = r$, אז $BP = r \cdot PC$ וגם $BP + PC = BC$, ולכן

$$PC = \frac{BC}{r+1}, \quad BP = \frac{r \cdot BC}{r+1}.$$

המרחק BP תלוי רק ב- r וב- BC . לכן $D' = D$, כלומר AD הוא חוצה הזווית.

מש"ל

דרך נוספת. לפי ההכללה שאחרי הוכחה 3, אם $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, אז $\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2$. לשתי זוויות שבין 0° ל- 180° יש אותו סינוס רק אם הן שוות, או אם סכומן 180° . כאן $\varphi_1 + \varphi_2 = \angle BAC < 180^\circ$, ולכן $\varphi_1 = \varphi_2$.

למה חשוב ש- D על הצלע? גם על ההמשך של BC , מחוץ לקטע, יש נקודה שהיחס בין המרחקים שלה מ- B ומ- C הוא $\frac{AB}{AC}$ (אם $AB \neq AC$). בנקודה הזאת חוצה הזווית **החיצונית** פוגש את הישר BC – הנושא של הסעיף הבא.

8 חוצה הזווית החיצונית (להעמקה)

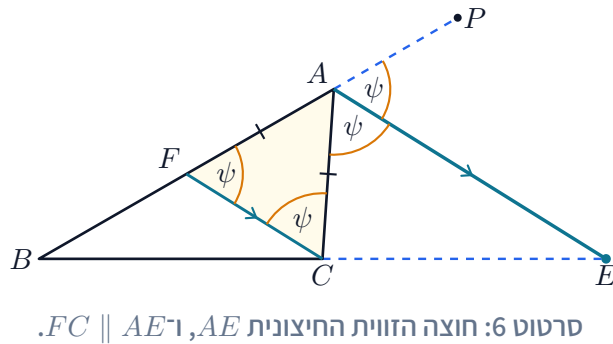
נאריך את הצלע BA מעבר ל- A עד נקודה P . הזווית $\angle CAP$, שבין הצלע AC להמשך של BA , נקראת **הזווית החיצונית** שבקודקוד A . היא צמודה לזווית $\angle BAC = 2\varphi$, ולכן גודלה $180^\circ - 2\varphi$. חוצה הזווית החיצונית מחלק אותה לשתי זוויות שוות, ונסמן כל אחת מהן ב- ψ . כלומר $2\psi = 180^\circ - 2\varphi$, ולכן $\psi = 90^\circ - \varphi$.

משפט חוצה הזווית החיצונית

אם $AB \neq AC$, חוצה הזווית החיצונית שבקודקוד A פוגש את הישר BC בנקודה E שמחוץ לקטע BC , ומתקיים:

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

אם $AC < AB$, הנקודה E נמצאת על ההמשך של BC מעבר ל- C , כלומר בצד של הצלע הקצרה.



הרעיון כמו בהוכחה 1: משולש שווה-שוקיים, ישר שמקביל לחוצה הזווית ומשפט תאלס. הפעם נתחיל מהמשולש שווה-השוקיים.

ההוכחה (כש- $AC < AB$). על הצלע AB נסמן נקודה F כך ש- $AF = AC$ (זה אפשרי, כי $AC < AB$). נראה ש-FC מקביל לחוצה הזווית החיצונית AE, ומשם נמשיך כמו בהוכחה 1.

נימוק	טענה
במשולש AFC זוויות הבסיס שוות ($AF = AC$), וסכומן שווה לזווית החיצונית $\angle CAP = 2\psi$	$\angle AFC = \angle ACF = \psi$ ①
זוויות מתאימות שוות: $\angle AFC = \angle PAE = \psi$	$FC \parallel AE$ ②
משפט תאלס: הישרים המקבילים FC ו-AE חותכים את שוקי הזווית B	$\frac{BF}{FA} = \frac{BC}{CE}$ ③
הוספת 1 לשני האגפים: $\frac{BF+FA}{FA} = \frac{BC+CE}{CE}$	$\frac{BA}{FA} = \frac{BE}{CE}$ ④
הצבת $FA = AC$	$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$ ⑤

מש"ל

ולמה E קיימת, ודווקא מעבר ל-C? (בצעדים 3-5 כבר השתמשנו בזה). הישר AE מקביל ל-FC, שחותך את BC, ולכן גם AE פוגש את הישר BC. כיוון ש-F נמצאת בין B ל-A, נקודת המפגש E נמצאת מעבר ל-C.

ואם $AC > AB$? מחליפים בין התפקידים של B ו-C, והנקודה E נמצאת מעבר ל-B. **ואם $AB = AC$?** אז זוויות הבסיס של המשולש שוות, וסכומן $180^\circ - 2\varphi$. לכן כל אחת מהן היא $\psi = 90^\circ - \varphi$, כלומר $\angle CAE = \angle ACB$ ואלה זוויות מתחלפות. מכאן שחוצה הזווית החיצונית מקביל ל-BC, ואין נקודה E בכלל. גם הנוסחה "יודעת" זאת: מחוץ לקטע BC אין על הישר נקודה שמרחקיה מ-B ומ-C שווים.

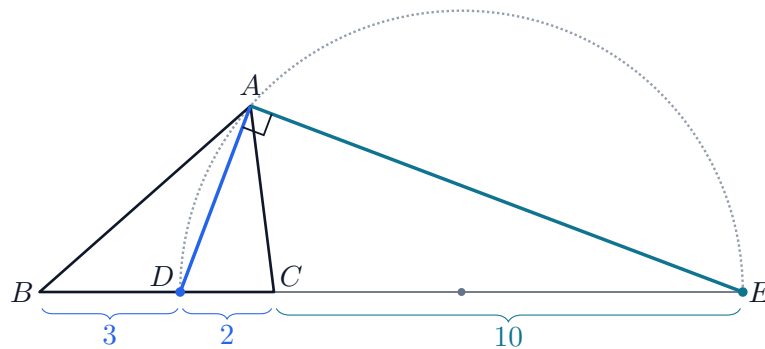
ובדוגמה של הדרכים? $AB = 6$ ו- $AC = 4$, ולכן E נמצאת מעבר ל-C. נסמן $EC = x$. אז $EB = x + 5$ ו- $\frac{x+5}{x} = \frac{3}{2}$, ומכאן $2x + 10 = 3x$, כלומר $x = 10$ ו- $EB = 15$.

שני חוצי הזוויות מאונכים זה לזה

הזווית שבין חוצה הזווית הפנימית לחוצה הזווית החיצונית, שבאותו קודקוד, היא תמיד ישרה:

$$\angle DAE = \varphi + \psi = \varphi + (90^\circ - \varphi) = 90^\circ.$$

בדוגמה של הדרכים, D ו-E מחלקות את BC באותו יחס, 2 : 3. הנקודה D מחלקת אותו מבפנים ($BD = 3$) ו-DC = 2), והנקודה E מבחוץ ($EB = 15$ ו- $EC = 10$). המשולש DAE ישר-זווית, והתיכון ליתר שווה למחצית היתר. לכן A נמצאת במרחק $\frac{DE}{2} = 6$ מאמצע הקטע DE, כלומר על המעגל שהקוטר שלו DE.



סרטוט DE : D ו- E מחלקות את BC ביחס $3:2$, מבפנים ומבחוץ. הזווית DAE ישרה, ולכן A על המעגל שקוטרו DE .

ומה עם נקודות אחרות? אם גם A' מקיימת $A'B : A'C = 3 : 2$, חוצי הזווית שבקודקוד A' פוגשים את הישר BC באותן נקודות D ו- E : על הישר יש רק נקודה אחת שמחלקת את BC ביחס $3:2$ מבפנים, ורק אחת שמחלקת אותו ביחס הזה מבחוץ. לכן גם A' "רואה" את DE בזווית ישרה, והיא על אותו מעגל. במסמך "מעגל אפולוניוס" בסדרה נראה שהמעגל הזה הוא בדיוק המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהיחס בין המרחקים שלהן מ- B ומ- C הוא $3:2$.

9 מה עושים עם המשפט?

שימוש 1: מוצאים את הקטעים

דוגמה מספרית

במשולש ABC נתון $AB = 12$ ו- $AC = 8$. חוצה הזווית A מחלק את הצלע BC לשני קטעים, ואחד מהם אורך מהשני ב-3. מצאו את BC .

לפי המשפט $\frac{BD}{DC} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$. הקטע הארוך הוא BD , שנוגע בצלע הארוכה AB . נסמן $BD = 3k$ ו- $DC = 2k$. אז $BD - DC = k = 3$, ולכן $BD = 9$ ו- $DC = 6$. אורך הצלע הוא $BC = 9 + 6 = 15$.

שימוש 2 (להעמקה): אורך חוצה הזווית

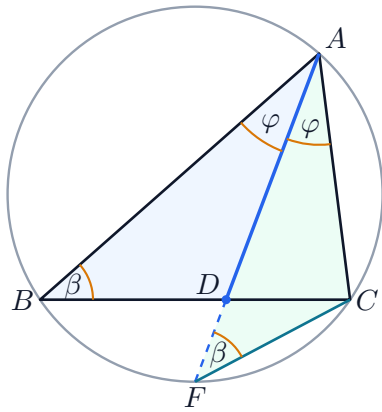
המשפט נותן את הקטעים BD ו- DC . אבל מה האורך של חוצה הזווית עצמו?

אורך חוצה הזווית

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

במילים: ריבוע חוצה הזווית שווה למכפלת שתי הצלעות שכולאות את הזווית, פחות מכפלת שני הקטעים שהוא יוצר על הצלע השלישית.

הרעיון נאריך את AD עד המעגל החוסם את המשולש. כך נקבל שני משולשים דומים, ומשפט על מיתרים נחתכים ישלים את העבודה.



סרטוט 8: המשולשים ABD ו-AFC דומים.

שתי עובדות על מעגלים:

- זוויות היקפיות שנשענות על אותו מיתר, מאותו צד שלו, שוות זו לזו (ראו את המסמך "זווית היקפית וזווית מרכזית").
- **מיתרים נחתכים:** אם שני מיתרים נחתכים, מכפלת הקטעים של מיתר אחד שווה למכפלת הקטעים של המיתר השני (ראו גם את המסמך "חזקת נקודה ביחס למעגל").

הבנייה. נאריך את AD מעבר ל-D עד שיפגוש את המעגל החוסם בנקודה F, ונחבר את F ל-C.

טענה	נימוק
① $\angle BAD = \angle FAC = \varphi$	AD חוצה את הזווית A
② $\angle ABD = \angle AFC$	זוויות היקפיות שנשענות על המיתר AC, מאותו צד שלו
③ $\triangle ABD \sim \triangle AFC$, ולכן $AB \cdot AC = AD \cdot AF$	ז.ז. (צעדים 1 ו-2), יחס הצלעות המתאימות $\frac{AB}{AF} = \frac{AD}{AC}$
④ $AD \cdot AF = AD(AD + DF) = AD^2 + AD \cdot DF$	$AF = AD + DF$
⑤ $AD \cdot DF = BD \cdot DC$	המיתרים AF ו-BC נחתכים ב-D
⑥ $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$	הצבה של צעדים 4 ו-5 בצעד 3, והעברת אגפים

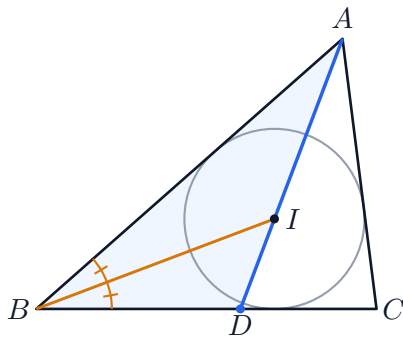
מש"ל

אם המשפט על מיתרים נחתכים חדש לכם, הנה הוכחה קצרה שלו. המשולשים ABD ו-CFD דומים לפי ז.ז., כי $\angle BAF = \angle BCF$ (זוויות היקפיות שנשענות על המיתר BF) ו- $\angle ADB = \angle CDF$ (זוויות קודקודיות). לכן $AD \cdot DF = BD \cdot DC$, כלומר $\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{FD}$.

בדוגמה של הדרכים

$AD = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4.24$ ולכן $AD^2 = 6 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 24 - 6 = 18$.
בדיקה במערכת צירים. נמקם $B = (0, 0)$ ו- $C = (5, 0)$. הקודקוד $A = (x, y)$ מקיים $x^2 + y^2 = 36$ ו- $(x - 5)^2 + y^2 = 16$. נחסר את המשוואות ונקבל $10x - 25 = 20$, כלומר $x = 4.5$ ו- $y^2 = \frac{63}{4}$. כיוון ש- $D = (3, 0)$, לפי נוסחת המרחק $AD^2 = 1.5^2 + \frac{63}{4} = 2.25 + 15.75 = 18$.

שימוש 3: מרכז המעגל החסום

סרטוט 9: BI חוצה את הזווית B .

שלושת חוצי הזוויות של משולש נפגשים בנקודה אחת, I – מרכז המעגל החסום במשולש. באיזה יחס I מחלקת את AD ?
במשולש ABD הקטע BI חוצה את הזווית B , והנקודה I נמצאת על הצלע AD . נפעיל את המשפט **במשולש ABD** :

$$\frac{AI}{ID} = \frac{BA}{BD} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

במילים: מרכז המעגל החסום מחלק את חוצה הזווית, החל מהקודקוד, ביחס של סכום הצלעות שכולאות את הזווית לצלע שמולה. בדוגמה של הדרכים $2 = \frac{4+6}{5} = \frac{AI}{ID}$, ולכן $2\sqrt{2} = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{2} = AI$ ו- $ID = \sqrt{2}$.

⚠ טעות נפוצה

- **יחס הפוך.** $\frac{BD}{DC} = \frac{AC}{AB}$ שגוי. בדיקה מהירה: הקטע הארוך נמצא ליד הצלע הארוכה. בדוגמה של הדרכים, הקטע $BD = 3$ נוגע בצלע $AB = 6$.
- **תיכון או גובה במקום חוצה זווית.** התיכון מחלק את BC תמיד ביחס $1:1$, והגובה – בדרך כלל ביחס אחר לגמרי. המשפט נכון רק לחוצה הזווית. שלושתם מתלכדים רק כש- $AB = AC$.
- **הצלע השלישית ביחס.** שגוי: הצלע BC היא זו שמתחלקת, והיא לא משתתפת ביחס (רק בסכום $BD + DC = BC$). $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ שגוי.
- **חוצה הזווית החיצונית בצד הלא נכון.** הנקודה E נמצאת על ההמשך של BC , בצד של הצלע הקצרה, ושני הקטעים EB ו- EC נמדדים מ- E .

🕒 הידעתם?

המשפט מופיע ב"יסודות" של אוקלידס (בערך 300 לפני הספירה), בספר השישי, טענה 3. באותה טענה מופיע גם המשפט ההפוך, וההוכחה של אוקלידס היא בדיוק הוכחה 1: ישר דרך C שמקביל ל- AD , והמשולש שווה-השוקיים ACE . ודבר מפתיע: באף מקום אחר ב"יסודות" אוקלידס לא משתמש בטענה הזאת. המקרה של חוצה הזווית החיצונית לא מופיע ב"יסודות". לפי היסטוריון המתמטיקה תומס הית', את המשפט הזה ניסח המתמטיקאי הסקוטי רוברט סימסון, במהדורה שלו ל"יסודות" (שיצאה לאור לראשונה ב-1756), והעיר שכבר פפוס מאלכסנדריה (המאה ה-4 לספירה) השתמש בו בלי הוכחה. סימסון הוסיף אותו לספר השישי בשם "טענה A". באותה מהדורה הוסיף גם "טענה B": מכפלת שתי הצלעות שכולאות את הזווית שווה למכפלת שני הקטעים ועוד ריבוע חוצה הזווית – כלומר הנוסחה $AB \cdot AC = BD \cdot DC + AD^2$ שהוכחנו כאן.

10 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

1. במשולש ABC נתון $AB = 8$ ו- $AC = 12$, ואורך הצלע BC הוא 15. חוצה הזווית A פוגש את BC בנקודה D . מצאו את BD ואת DC .
2. במשולש ABC נתון $AB = 9$ ו- $AC = 6$. הנקודה D על הצלע BC מחלקת אותה לקטעים $BD = 6$ ו- $DC = 4$. האם AD חוצה את הזווית A ? נמקו.
3. הוכיחו: אם חוצה הזווית שבקודקוד A הוא גם התיכון לצלע BC , אז המשולש שווה-שוקיים.
4. במשולש משאלה 1: (א) היכן פוגש חוצה הזווית החיצונית שבקודקוד A את הישר BC ? (ב) באיזה יחס מחלק מרכז המעגל החסום את AD ? (ג) חשבו את AD .
5. במשולש ABC הזווית A ישרה, והניצבים הם $AB = 3$ ו- $AC = 4$. חוצה הזווית הישרה פוגש את היתר בנקודה D . חשבו את BD , את DC ואת AD .
6. למה הישר שעובר דרך C ומקביל ל- AD פוגש את הישר BA , ודווקא מעבר ל- A ? (זאת השאלה מתיבת "עצרו ובדקו").

תשובות

1. $\frac{BD}{DC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. נסמן $BD = 2k$ ו- $DC = 3k$. אז $5k = 15$, כלומר $k = 3$, ולכן $BD = 6$ ו- $DC = 9$. הקטע הקצר נוגע בצלע הקצרה AB , כמו שצריך.
2. $\frac{BD}{DC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, וגם $\frac{AB}{AC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$. היחסים שווים, והנקודה D נמצאת על הצלע BC . לכן, לפי המשפט ההפוך, AD חוצה את הזווית A .
3. התיכון חוצה את BC , ולכן $BD = DC$, כלומר $\frac{BD}{DC} = 1$. לפי משפט חוצה הזווית $1 = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, ולכן $AB = AC$.
4. (א) $AB < AC$, ולכן E נמצאת מעבר ל- B , ו- $\frac{EB}{EC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. נסמן $EB = x$. אז $EC = x + 15$. ו- $3x = 2(x + 15)$ ולכן $EB = x = 30$ ו- $EC = 45$.
(ב) $\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a} = \frac{12+8}{15} = \frac{4}{3}$.
(ג) $AD = \sqrt{42} \approx 6.48$, ולכן $AD^2 = 8 \cdot 12 - 6 \cdot 9 = 96 - 54 = 42$.
5. לפי משפט פיתגורס $BC = 5$. לפי המשפט $\frac{BD}{DC} = \frac{3}{4}$, ולכן $BD = \frac{5 \cdot 3}{7} = \frac{15}{7}$ ו- $DC = \frac{5 \cdot 4}{7} = \frac{20}{7}$. אורך חוצה הזווית: $AD = \frac{12\sqrt{2}}{7} \approx 2.42$, ולכן $AD^2 = 3 \cdot 4 - \frac{15}{7} \cdot \frac{20}{7} = 12 - \frac{300}{49} = \frac{288}{49}$.
6. הנקודה D נמצאת בין B ל- C , ולכן B ו- C נמצאות משני צדי הישר AD . הישר שעובר דרך C ומקביל ל- AD אינו חותך את AD , ולכן הוא כולו בצד של C . על הישר BA , הקרן AB (בלי A) נמצאת בצד של B , וההמשך מעבר ל- A נמצא בצד של C . לכן נקודת המפגש נמצאת מעבר ל- A . ונקודת מפגש אכן קיימת: אילו הישר היה מקביל גם ל- BA , אז AD ו- BA היו מקבילים זה לזה – אבל הם נחתכים ב- A .