

זווית היקפית וזווית מרכזית

למה כל הזוויות ההיקפיות שנשענות על אותה קשת שוות זו לזו – ומה נובע מזה

כ־22 דקות קריאה

2 הוכחות ו־5 מסקנות

גאומטריה

4–5 יח"ל

כיתות י'–י"א

מה כדאי לדעת קודם

- משולש שווה-שוקיים, וזווית חיצונית למשולש.
- סכום הזוויות במשולש ובמרובע.
- להוכחה 2: מעגל היחידה (ראו "מעגל היחידה").
- למשיק: המשיק ניצב לרדיוס (ראו "המשיק למעגל").

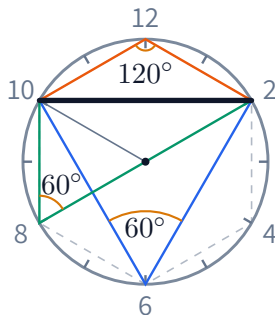
מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: במה, מושבים ושעון.
- הוכחה 1: שלושה מקרים, בדרך של אוקלידס.
- הוכחה 2 (להעמקה): כיוונים, כמו במעגל היחידה – בלי מקרים.
- חמש מסקנות: אותה קשת, קוטר, מרובע חסום, משיק ומיתר, מקום גאומטרי.
- דוגמאות, טעויות נפוצות ושאלות לבדיקה עצמית.

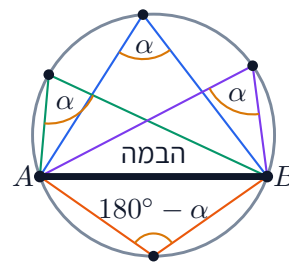
1 האינטואיציה: במה ומושבים

האינטואיציה

דמיינו אולם עגול. הבמה היא קטע ישר שמחבר שתי נקודות על הקיר, והמושבים מסודרים לאורך הקיר. מכל מושב רואים את הבמה בזווית מסוימת: הזווית שבין הקו אל קצה אחד של הבמה לבין הקו אל הקצה השני. נדמה שממושב קרוב לבמה רואים אותה בזווית גדולה יותר. אבל המושבים הקרובים נמצאים ליד אחד הקצוות ורואים את הבמה "מהצד", ואילו הרחוקים רואים אותה "מלפנים". שתי ההשפעות מקזזות זו את זו בדיוק: **מכל המושבים שבצד אחד של הבמה רואים אותה בזווית**. ומאחורי הבמה, על הקשת השנייה? גם שם כל המושבים רואים את הבמה באותה זווית, והיא משלימה את הזווית הראשונה ל־ 180° . במסמך נוכיח את שתי העובדות האלה. המפתח הוא זווית נוספת: הזווית שבה רואים את הבמה **ממרכז המעגל**.



סרטוט 2: השעון: מ־6 ומ־8 רואים את המיתר בזווית 60° , ומ־12 בזווית 120° .



סרטוט 1: מכל המושבים שעל הקשת הגדולה רואים את הבמה AB בזווית α , ומהמושב שעל הקשת הקטנה – בזווית $180^\circ - \alpha$.

דוגמה מספרית קטנה: השעון

סימני השעות הזוגיות על השעון הם קודקודים של משושה משוכלל, שמתחלק לשישה משולשים שווים-צלעות עם קודקוד משותף: מרכז השעון O . נסתכל על המיתר שמחבר את 10 ל-2 (סרטוט 2). הזווית המרכזית שבין 10 ל-2 מורכבת משתי זוויות של משולש שווה-צלעות, ולכן היא 120° .

• **מהשעה 6** רואים את המיתר בזווית 60° , כי המשולש שקודקדיו ב-10, ב-2 וב-6 שווה-צלעות.

• **מהשעה 8** הקו אל 2 עובר דרך O , ולכן רואים את המיתר בזווית של המשולש שווה-צלעות שקודקדיו O , 8 ו-10: שוב 60° . (בדקו בעצמכם את השעה 4).

• **מהשעה 12** רואים את המיתר בזווית של המשושה עצמו, 120° .

מכל השעות שבצד אחד של המיתר רואים אותו בזווית 60° , חצי מהזווית המרכזית. מהשעה 12, שבצד השני, רואים אותו בזווית $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$.

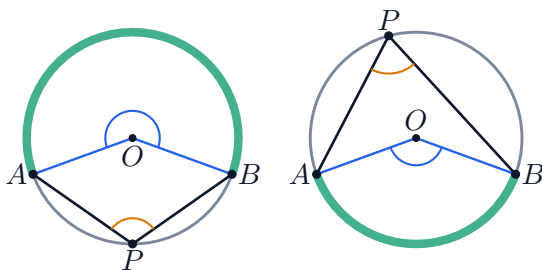
2 ההגדרות והמשפט

נסמן את מרכז המעגל ב- O . שתי נקודות A ו- B על המעגל מחלקות אותו לשתי **קשתות**, והקטע AB הוא **מיתר**.

• **זווית מרכזית** היא זווית שהקודקוד שלה במרכז המעגל, כמו $\angle AOB$. השוקיים שלה הן רדיוסים.

• **זווית היקפית** היא זווית שהקודקוד שלה על המעגל והשוקיים שלה מיתרים, כמו $\angle APB$, כאשר P נקודה על המעגל.

• זווית, מרכזית או היקפית, **נשענת** על הקשת שנמצאת בתוכה, בין השוקיים שלה. הזווית ההיקפית $\angle APB$ נשענת על הקשת AB שאינה מכילה את P .



סרטוט 3: הזווית ההיקפית $\angle APB$ (בכתום) והזווית המרכזית $\angle AOB$ (בכחול) נשענות על אותה קשת (בירוק).

בסרטוט 3 מימין, P נמצאת על הקשת הגדולה. לכן הזווית ההיקפית $\angle APB$ נשענת על הקשת הקטנה, והזווית המרכזית $\angle AOB$ נשענת עליה קטנה מ- 180° . משמאל, P נמצאת על הקשת הקטנה. עכשיו הזווית ההיקפית נשענת על הקשת **הגדולה**, והזווית המרכזית נשענת עליה גדולה מ- 180° . גם אותה נסמן $\angle AOB$, ונקפיד לומר על איזו קשת היא נשענת.

המשפט: זווית היקפית וזווית מרכזית

זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת:

$$\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

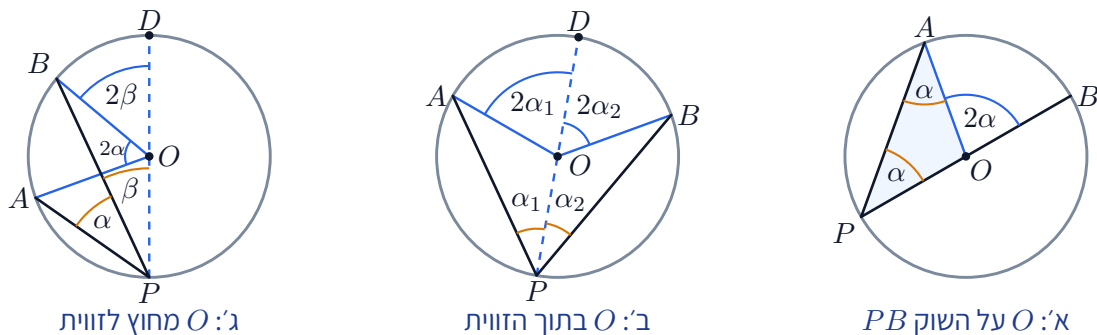
במילים: מכל נקודה על המעגל רואים מיתר בזווית שהיא חצי מהזווית שבה רואים אותו מהמרכז — כששתי הזוויות פונות אל אותה קשת.

המשפט נכון גם כשהזווית המרכזית גדולה מ- 180° . בשעון, למשל, מהשעה 12 רואים את המיתר שבין 10 ל-2 בזווית 120° . הזווית הזאת נשענת על הקשת הגדולה (מ-2 דרך 6 עד 10), שהזווית המרכזית שלה היא $360^\circ - 120^\circ$, כלומר 240° – פי שניים מ- 120° .

3 הוכחה 1: שלושה מקרים לפי מקום המרכז

הרעיון נתחיל במקרה שבו המרכז O נמצא על אחת השוקיים של הזווית ההיקפית: שם הזווית המרכזית היא זווית חיצונית למשולש שווה-שוקיים. בשני המקרים האחרים נעביר קוטר מקודקוד הזווית ההיקפית, נשתמש פעמיים במקרה הראשון, ונחבר או נחסר את התוצאות.

נסמן $\alpha = \angle APB$. יש שלוש אפשרויות למקום של המרכז O : על אחת השוקיים של הזווית, בתוכה או מחוצה לה (סרטוט 4).



סרטוט 4: שלושת המקרים. בכחול – הזוויות המרכזיות. PD הוא קוטר.

מקרה א': המרכז על אחת השוקיים

נניח ש- O על השוק PB , כלומר PB קוטר. נתבונן במשולש AOP :

נימוק	טענה
רדיוסים במעגל	$OA = OP$ ①
במשולש שווה-שוקיים זוויות הבסיס שוות	$\angle OAP = \angle OPA = \alpha$ ②
זווית חיצונית למשולש AOP שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה	$\angle AOB = \angle OAP + \angle OPA = 2\alpha$ ③

מקרה ב': המרכז בתוך הזווית

נעביר מ- P את הקוטר PD . הקרן PO נמצאת בתוך הזווית APB , ולכן הנקודה D נמצאת על הקשת שהזווית נשענת עליה. הקוטר מחלק את α לשתי זוויות, $\alpha_1 = \angle APD$ ו- $\alpha_2 = \angle DPB$, ובכל אחת מהן המרכז נמצא על שוק – כמו במקרה א'.

טענה	נימוק
① $\angle AOD = 2\alpha_1$	מקרה א' בזווית ההיקפית APD (המרכז על השוק PD)
② $\angle DOB = 2\alpha_2$	מקרה א' בזווית ההיקפית DPB
③ $\angle AOB = \angle AOD + \angle DOB = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha$	D על הקשת AB , ולכן OD מחלק את הזווית המרכזית לשתיים

מקרה ג': המרכז מחוץ לזווית

שוב נעביר את הקוטר PD , אבל הפעם הוא מחוץ לזווית. נניח שהקרן PB נמצאת בין PA ל- PD (אחרת נחליף בין השמות A ו- B), ונסמן $\beta = \angle BPD$. אז $\angle APD = \alpha + \beta$.

טענה	נימוק
① $\angle AOD = 2(\alpha + \beta)$	מקרה א' בזווית ההיקפית APD
② $\angle BOD = 2\beta$	מקרה א' בזווית ההיקפית BPD
③ $\angle AOB = \angle AOD - \angle BOD = 2\alpha$	B על הקשת APD ש- $\angle APD$ נשענת עליה, ולכן הקרן OB בתוך הזווית AOD

מש"ל

ומה אם α קהה? במקרה א' הזווית α היא זווית בסיס במשולש שווה-שוקיים, ובמקרה ג' היא חלק מזווית כזאת, ולכן בשני המקרים האלה היא חדה. זווית היקפית קהה או ישרה נמצאת אפוא תמיד במקרה ב', ושם הסכום $\angle AOD + \angle DOB$ הוא בדיוק הזווית המרכזית שנשענת על הקשת AB שאינה מכילה את P , והפעם היא 180° או יותר.

4 הוכחה 2 (להעמקה): כיוונים – חישוב אחד, בלי מקרים

הרעיון נמקם את המעגל במערכת צירים, ונתאר כל קרן לפי הכיוון שלה: הזווית שהיא יוצרת עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , כמו במעגל היחידה. נחשב את הכיוונים של הקרניים PA ו- PB , והזווית $\angle APB$ תהיה ההפרש ביניהם. **כיוון של קרן** הוא הזווית θ שבה צריך לסובב את הכיוון החיובי של ציר ה- x , נגד כיוון השעון, כדי שיפנה לאורך הקרן. קרן שיוצאת מהנקודה (x_0, y_0) בכיוון θ עוברת דרך $(x_0 + \cos \theta, y_0 + \sin \theta)$. נשתמש בשלוש עובדות, ונקבל אותן בלי הוכחה:

1. כיוונים שההפרש ביניהם 360° הם אותו כיוון.
2. אם לשתי קרניים שיוצאות מאותה נקודה יש כיוונים $\theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + 180^\circ$, הזווית שביניהן היא $\theta_2 - \theta_1$.
3. סיבוב של המישור סביב O בזווית φ שומר על מרחקים ומוסיף φ לכיוון של כל קרן – גם של קרן שאינה יוצאת מ- O .

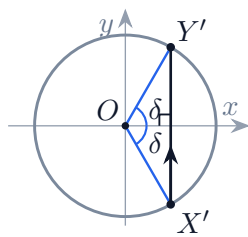
נמקם את מרכז המעגל O בראשית הצירים ונסמן את הרדיוס ב- r . נקודה על המעגל נמצאת "בכיוון t " אם הקרן O -אליה היא בכיוון t . כמו במעגל היחידה, זאת הנקודה $(r \cos t, r \sin t)$.

צעד ראשון: הכיוון של מיתר

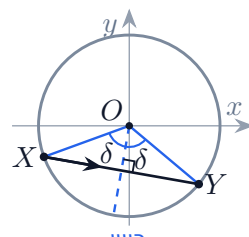
טענת עזר

אם X ו- Y נמצאות על המעגל בכיוונים u ו- v , כאשר $u < v < u + 360^\circ$, אז הקרן מ- X אל Y היא בכיוון

$$\frac{u+v}{2} + 90^\circ$$



אחרי הסיבוב



לפני הסיבוב

סרטוט 5: לפני הסיבוב המיתר XY ניצב לציר שכיוונו m . אחרי הסיבוב הציר הוא ציר ה- x , והמיתר אנכי.

נסמן $m = \frac{u+v}{2}$ ו- $\delta = \frac{v-u}{2}$. אז $u = m - \delta$ ו- $v = m + \delta$, ומהתנאי $u < v < u + 360^\circ$ נובע ש- $0^\circ < \delta < 180^\circ$.
הקרניים OX ו- OY יוצרות זוויות שוות, δ , עם הקרן שכיוונה m , אחת מכל צד שלה. לכן הישר שעובר דרך O בכיוון m הוא ציר הסימטריה של המשולש שווה-השוקיים XOY , והמיתר XY ניצב לו. כלומר הכיוון של המיתר הוא $m + 90^\circ$ או $m - 90^\circ$. כדי להחליט איזה מהשניים, נסובב את הסרטוט סביב O בזווית m בכיוון השעון, ונסמן ב- X' וב- Y' את המקומות החדשים של X ו- Y .

נימוק

טענה

הסיבוב מחסר m מכל כיוון: $u - m = -\delta$ ו- $v - m = \delta$

① X' בכיוון $-\delta$, ו- Y' בכיוון δ

$\sin(-\delta) = -\sin \delta$ ו- $\cos(-\delta) = \cos \delta$

② $Y' = (r \cos \delta, r \sin \delta)$ ו- $X' = (r \cos \delta, -r \sin \delta)$

לשתי הנקודות אותו שיעור ה- x ,
ו- $0^\circ < \delta < 180^\circ$ כי $r \sin \delta > 0$

③ הקרן מ- X' אל Y' אנכית ופונה למעלה, כלומר בכיוון 90°

מסובבים בחזרה: מוסיפים m לכל כיוון

④ הקרן מ- X אל Y בכיוון $m + 90^\circ$

מש"ל

בדיקה מספרית. על מעגל היחידה ניקח את הנקודה $X = (1, 0)$, שבכיוון 0° , ואת הנקודה $Y \approx (0.5, 0.866)$, שבכיוון 60° . כדי לעבור מ- X ל- Y זזים 0.5 שמאלה ו- 0.866 למעלה, וזה (בקירוב) $(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ)$. לכן הקרן מ- X אל Y היא בכיוון 120° . ואכן, לפי טענת העזר הכיוון הוא $\frac{0^\circ+60^\circ}{2} + 90^\circ$, שהוא 120° .

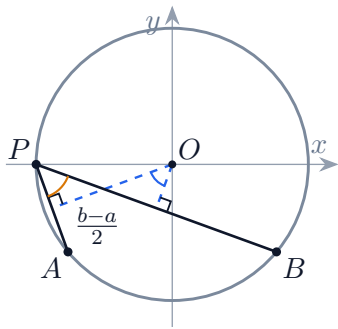
עצרו ובדקו

בטענת העזר הנחנו ש- $u < v < u + 360^\circ$, וחישבנו את הכיוון של הקרן מ- X אל Y . מה הכיוון של הקרן ההפוכה, מ- Y אל X ? הראו שטענת העזר נותנת בדיוק את הכיוון ההפוך.
רמז: כדי להשתמש בטענת העזר, כתבו את הכיוון של X כמספר שגדול מ- v .

צעד שני: הזווית ההיקפית

נסמן את הכיוונים של A, P ו- B ב- a, p, b , ונבחר אותם כך ש-

$$p < a < b < p + 360^\circ$$



סרטוט 6: הקווים המקווקווים ניצבים למיתרים, ולכן שתי הזוויות המסומנות שוות.

(אפשר להוסיף 360° לכל כיוון, ואם צריך – להחליף בין השמות A ו- B). המשמעות: כשהולכים על המעגל מ- P נגד כיוון השעון, פוגשים קודם את A , אחר כך את B , ורק אז חוזרים ל- P . לכן הקשת שעוברת מ- A ל- B נגד כיוון השעון אינה מכילה את P . זאת הקשת שהזווית $\angle APB$ נשענת עליה, והזווית המרכזית שנשענת עליה היא $\angle AOB = b - a$ – מספר בין 0° ל- 360° , שיכול להיות גם גדול מ- 180° .

טענה	נימוק
① הקרן PA בכיוון $\frac{p+a}{2} + 90^\circ$	טענת העזר, כי $p < a < p + 360^\circ$
② הקרן PB בכיוון $\frac{p+b}{2} + 90^\circ$	טענת העזר, כי $p < b < p + 360^\circ$
③ ההפרש בין שני הכיוונים הוא $\frac{b-a}{2}$	חיסור: p ו- 90° מתבטלים
④ $\angle APB = \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2} \angle AOB$	עובדה 2, כי $0^\circ < \frac{b-a}{2} < 180^\circ$

מש"ל

ואיפה? הכיוון של P נעלם מהתוצאה: מכל נקודה P על הקשת שעוברת מ- A ל- B נגד כיוון השעון רואים את המיתר AB באותה זווית. כך קיבלנו "בחינים" את מסקנה 1 (בסעיף 6).

ומהצד השני? תהי Q נקודה על הקשת השנייה, בכיוון q שמקיים $a < q < b$. כשהולכים מ- Q נגד כיוון השעון, פוגשים קודם את B ואחר כך את A , כלומר $a + 360^\circ < q < b + 360^\circ$. לכן לפי מה שהוכחנו, כש- B ממלאת את התפקיד של A , ו- $a + 360^\circ$ את התפקיד של b :

$$\angle AQB = \frac{(a + 360^\circ) - b}{2} = 180^\circ - \frac{b - a}{2} = 180^\circ - \angle APB.$$

כלומר $\angle APB + \angle AQB = 180^\circ$. במרובע החסום $PAQB$ הזוויות שבקודקודים P ו- Q נגדיות, ולכן קיבלנו את המשפט על מרובע חסום (מסקנה 3), בלי מקרים נוספים.

5 שתי ההוכחות זו מול זו

הוכחה 1: שלושה מקרים	הוכחה 2: כיוונים	
הרעיון	קוטר מקודקוד הזווית ההיקפית, ומשולש שווה-שוקיים	הכיוון של מיתר הוא ממוצע הכיוונים של קצותיו, ועוד 90°
הכלים	זוויות בסיס וזווית חיצונית	מעגל היחידה, סיבוב וציר סימטריה
מקרים	שלושה, לפי המקום של המרכז	אין: חישוב אחד לכל מיקום של הנקודות
היתרון	ההוכחה של אוקלידס; כל צעד רואים בסרטוט	נותנת בחינם גם את מסקנה 1 וגם את מסקנה 3

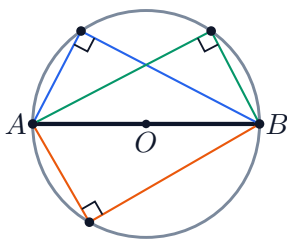
6 חמש מסקנות

מהמשפט נובעות כמה עובדות שמשמשות בהן הרבה בגאומטריה של המעגל, ולכל אחת מהן הוכחה קצרה. הזווית ההיקפית והמרובע החסום במעגל נלמדים ב־5 יח"ל בכיתה י' וב־4 יח"ל בכיתה י"א. המשפט על הזווית שבין משיק למיתר (מסקנה 4) נלמד רק ב־5 יח"ל.

מסקנה 1: זווית היקפית על אותה קשת שוות

זווית היקפיות שנשענות על אותה קשת שוות זו לזו, כי כל אחת מהן שווה למחצית אותה זווית מרכזית. זה בדיוק מה שראינו באולם (סרטוט 1). שימו לב לתנאי: הקודקודים צריכים להיות **מאותו צד** של המיתר. שתי זווית היקפיות שנשענות על אותו מיתר, משני צדדיו, משלימות זו את זו ל־ 180° (מסקנה 3).

מסקנה 2: זווית היקפית שנשענת על קוטר היא ישרה



סרטוט 7: מכל נקודה על המעגל רואים קוטר בזווית ישרה.

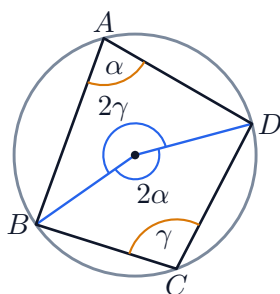
אם AB קוטר, הזווית המרכזית $\angle AOB$ היא זווית שטוחה, 180° , ולכן כל זווית היקפית שנשענת על הקוטר היא 90° . וגם להפך: אם $\angle APB = 90^\circ$, הזווית המרכזית שנשענת על אותה קשת היא 180° . לכן O, A ו־ B על ישר אחד, ו־ AB קוטר. במילים אחרות: **היתר של משולש ישר-זווית הוא קוטר של המעגל החוסם אותו**. נשתמש בעובדה הזאת שוב בסדרה, במסמכים "מעגל אפולוניוס" ו"אישוויון הממוצעים".

הערה על השם. באנגלית קוראים למסקנה הזאת Thales's theorem, "משפט תאלס". אבל בבית הספר בישראל "משפט תאלס" הוא משפט אחר: ישרים מקבילים שחותכים את שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים. לכן בבגרות מנמקים: "זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה".

מסקנה 3: מרובע חסום במעגל

מרובע חסום במעגל

במרובע שחסום במעגל, סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא 180° . ולהפך: אם במרובע יש זוג זוויות נגדיות שסכומן 180° , אפשר לחסום אותו במעגל.



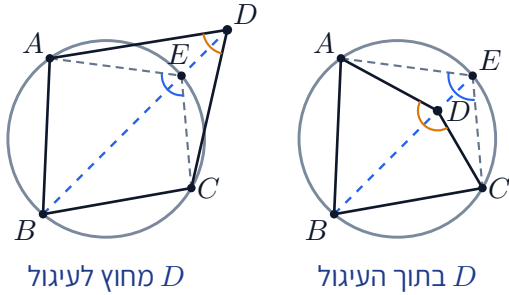
סרטוט 8: שתי הזוויות המרכזיות משלימות זו את זו ל־ 360° .

הכיוון הראשון. נסמן את הזוויות שבקודקודים A ו־ C ב־ α וב־ γ . הזווית α נשענת על הקשת BCD , והזווית γ נשענת על הקשת BAD . שתי הקשתות יחד הן המעגל כולו, ולכן שתי הזוויות המרכזיות שנשענות עליהן משלימות זו את זו ל־ 360° :

$$2\alpha + 2\gamma = 360^\circ \implies \alpha + \gamma = 180^\circ.$$

באותו אופן, גם סכום הזוויות שבקודקודים B ו־ D הוא 180° .

המשפט ההפוך, בדרך השלילה. נתון מרובע $ABCD$ שבו $\angle B + \angle D = 180^\circ$. דרך שלוש הנקודות A, B, C עובר מעגל אחד. נניח בשלילה ש- D אינה נמצאת עליו. המרובע קמור (במרובע קעור, סכום זוג הזוויות הנגדיות שכולל את הזווית הקעורה גדול מ- 180° , וסכום הזוג השני קטן מ- 180°). לכן האלכסון BD חותך את AC בנקודה שבתוך העיגול, והקרן BD פוגשת את המעגל שוב בנקודה E , מאותו צד של AC שבו נמצאת D (סרטוט 9). המרובע $ABCE$ חסום במעגל, ולכן לפי הכיוון הראשון $\angle AEC = 180^\circ - \angle B = \angle ADC$. נראה שהשוויון הזה בלתי אפשרי.



D מחוץ לעיגול

D בתוך העיגול

סרטוט 9: הזווית $\angle ADC$ (בכתום) והזווית ההיקפית $\angle AEC$ (בכחול).

- D בתוך העיגול, כלומר D בין B ל- E . הזווית $\angle ADB$ היא זווית חיצונית למשולש ADE , ולכן היא גדולה מ- $\angle AEB$. באותו אופן, במשולש CDE מתקיים $\angle CDB > \angle CEB$. נחבר את שני אי-השוויונות ונקבל $\angle ADC > \angle AEC$.
- D מחוץ לעיגול, כלומר E בין B ל- D . הפעם $\angle AEB$ היא זווית חיצונית למשולש AED , ולכן $\angle AEB > \angle ADB$. באותו אופן $\angle CEB > \angle CDB$, ואחרי חיבור: $\angle AEC > \angle ADC$.

(החיבור מותר, כי הקרן DB עוברת בתוך הזווית $\angle ADC$, דרך נקודת החיתוך של האלכסונים, וכך גם הקרן EB בתוך הזווית $\angle AEC$).

בשני המקרים $\angle ADC \neq \angle AEC$, בסתירה לשוויון שמצאנו. לכן D נמצאת על המעגל.

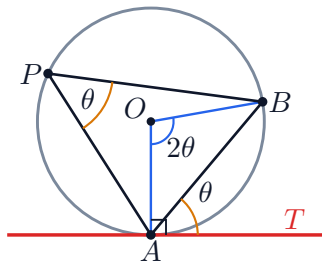
מש"ל

ההוכחה נתנה לנו יותר ממה שביקשנו: מנקודה שבתוך העיגול רואים את המיתר AC בזווית גדולה מהזווית ההיקפית, ומנקודה שמחוץ לעיגול – בזווית קטנה ממנה (כשהנקודה והקודקוד של הזווית ההיקפית נמצאים מאותו צד של המיתר). נשתמש בזה במסקנה 5.

מסקנה 4: הזווית שבין משיק למיתר

משיק ומיתר

הזווית שבין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני.



סרטוט 10: המשיק AT והמיתר AB .

המשיק בנקודה A והמיתר AB יוצרים זווית $\angle TAB = \theta$. נניח קודם שהיא חדה. הקשת AB שבתוך הזווית הזאת היא הקשת הקטנה, ונבחר נקודה P על הקשת השנייה. לפי המשפט $\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$, ולכן מספיק להוכיח ש- $\theta = \frac{1}{2} \angle AOB$. המשיק ניצב לרדיוס בנקודת ההשקה, כלומר $\angle OAT = 90^\circ$. הקרן AB נמצאת בין AO ל- AT , ולכן $\theta = 90^\circ - \angle OAB$. המשולש AOB שווה-שוקיים ($OA = OB$), ולכן

$$\angle OAB = \frac{180^\circ - \angle AOB}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AOB.$$

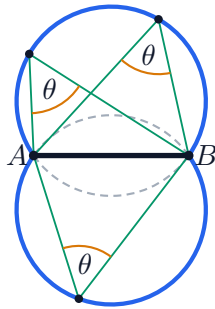
נציב ונקבל $\theta = \frac{1}{2} \angle AOB = \angle APB$.

אם הזווית שבין המשיק למיתר קהה, הזווית הצמודה לה, מהצד השני של המיתר, חדה. גם הזווית ההיקפית שמשני צדי המיתר משלימות זו את זו ל- 180° (מסקנה 3), ולכן המשפט נכון גם אז. ואם AB קוטר, כל הזוויות האלה ישרות.

מש"ל

ובדרך של הוכחה 2: המשיק ב- A ניצב לרדיוס OA , שכיוונו a , ולכן אחת הקרניים של המשיק היא בכיוון $90^\circ - a$ — מה שנותנת טענת העזר כשמציבים בה $u = v$. הכיוון של הקרן AB הוא $90^\circ + \frac{a+b}{2}$, וההפרש הוא $\frac{b-a}{2}$, חצי הזווית המרכזית.

מסקנה 5: מאילו נקודות רואים קטע בזווית נתונה?



סרטוט 11: המקום הגאומטרי (בכחול) כש- $\theta = 55^\circ$.

נתונים קטע AB וזווית θ בין 0° ל- 180° . לפי מסקנה 1, מכל הנקודות שעל קשת מתאימה של מעגל שעובר דרך A ו- B רואים את AB בזווית θ . לפי מה שגילינו במסקנה 3, מנקודות שבתוך העיגול רואים אותו בזווית גדולה יותר, ומנקודות שמחוץ לו — בזווית קטנה יותר. לכן **המקום הגאומטרי הוא שתי קשתות**, אחת מכל צד של AB , וכל אחת היא השיקוף של השנייה ב- AB . **והרדיוס R ?** כש- θ חדה, הזווית המרכזית שנשענת על AB היא 2θ , והאנך מהמרכז ל- AB חוצה אותה. לכן חצי הקטע הוא $R \sin \theta$, כלומר $AB = 2R \sin \theta$. זה משפט הסינוסים — וגם הוכחה 2 במסמך "משפט הסינוסים" נשענת על המסקנות שהוכחנו כאן.

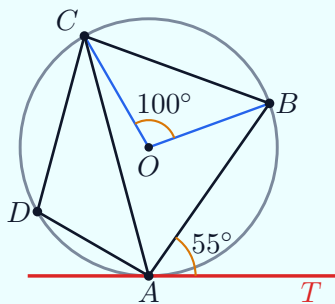
7 מה עושים עם המשפט?

דוגמה 1: מחפשים זוויות

בסרטוט, O מרכז המעגל ו- $\angle BOC = 100^\circ$. הנקודה D נמצאת על הקשת AC שאינה מכילה את B . הישר AT משיק למעגל בנקודה A , ו- $\angle TAB = 55^\circ$. מצאו את הזוויות של המשולש ABC ואת $\angle ADC$.

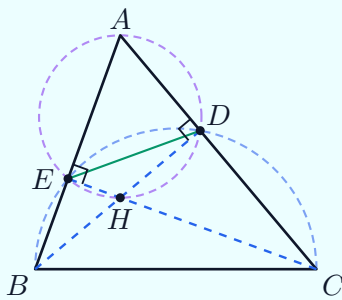
פתרון.

- $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 50^\circ$ (זווית היקפית וזווית מרכזית על אותה קשת).
- $\angle ACB = \angle TAB = 55^\circ$ (הזווית שבין משיק למיתר).
- $\angle ABC = 180^\circ - 50^\circ - 55^\circ = 75^\circ$ (סכום הזוויות במשולש).
- $\angle ADC = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$ (זוויות נגדיות במרובע חסום).



סרטוט 12: הנתונים של דוגמה 1.

דוגמה 2: "הוכיחו שאפשר לחסום את המרובע במעגל"



סרטוט 13: שני המעגלים.

1. במשולש חד-זווית ABC הקטעים BD ו- CE הם גבהים (על D על AC ו- E על AB), והם נחתכים בנקודה H .
הוכיחו שאפשר לחסום את המרובע $AEHD$ במעגל.
2. הוכיחו שהנקודות B, C, D, E נמצאות על מעגל אחד.
3. נתון $\angle BAC = 60^\circ$ ו- $\angle ABC = 70^\circ$. מצאו את $\angle EHD$ ואת $\angle ADE$.

הפתרון של דוגמה 2.

1. $\angle AEH = \angle ADH = 90^\circ$, כי BD ו- CE גבהים. אלה זוויות נגדיות במרובע $AEHD$, וסכומן 180° .
לכן, לפי המשפט ההפוך במסקנה 3, אפשר לחסום את המרובע במעגל.
2. $\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ$. לפי הכיוון ההפוך של מסקנה 2, נמצאת E על המעגל שהקוטר שלו BC . מאותה סיבה גם D על המעגל הזה.
3. לפי סעיף 1, $\angle EHD = 180^\circ - \angle BAC = 120^\circ$. לפי סעיף 2, המרובע $BCDE$ חסום במעגל, ולכן $\angle EDC = 180^\circ - \angle EBC = 110^\circ$. מכאן $\angle ADE = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ בדיוק $\angle ABC$.
(באותו אופן $\angle AED = \angle ACB = 50^\circ$, ולכן $\triangle ADE \sim \triangle ABC$)

טעות נפוצה

- **הזווית המרכזית של הקשת הלא נכונה.** אם $\angle AOB = 100^\circ$ ו- P על הקשת הקטנה AB , הזווית $\angle APB$ נשענת על הקשת הגדולה, ולכן היא $\frac{1}{2}(360^\circ - 100^\circ) = 130^\circ$, ולא 50° .
- **"זוויות שנשענות על אותו מיתר שוות".** רק אם הקודקודים שלהן נמצאים **מאותו צד** של המיתר. משני צדדין הזוויות משלימות זו את זו ל- 180° .
- **"צריך לבדוק את שני הזוגות של הזוויות הנגדיות".** לא צריך: סכום הזוויות במרובע הוא 360° , ולכן אם סכום זוג אחד הוא 180° , גם סכום הזוג השני הוא 180° .
- **משיק ומיתר: איזו זווית היקפית?** זו שנשענת על הקשת שבתוך הזווית שבין המשיק למיתר — כלומר זו שהקודקוד שלה **מהצד השני** של המיתר.

הידעתם?

המשפט ומסקנות 1-4 מופיעים ב"יסודות" של אוקלידס (בערך 300 לפני הספירה), בספר השלישי — חוץ מהמשפטים ההפוכים (על הזווית הישרה ועל המרובע החסום), שאינם מופיעים שם. טענה 20 היא המשפט המרכזי, טענה 21 עוסקת בזוויות היקפיות על אותה קשת, טענה 22 במרובע חסום, טענה 31 בזווית היקפית שנשענת על קוטר, וטענה 32 בזווית שבין משיק למיתר. ההוכחה של אוקלידס לטענה 20 היא הוכחה 1 שלנו: במצב אחד הוא מחבר שתי זוויות, ובמצב אחר מחסר אותן.
את המשפט על הקוטר מייחסים לתאלס ממילטוס (בערך 600 לפני הספירה). דיוגנס לארטיוס, שכתב במאה ה-3 לספירה, מביא בשם פמפילה (המאה ה-1 לספירה) סיפור שלפיו תאלס היה הראשון ש"חסם במעגל משולש ישר-זווית", ולכבוד התגלית הקריב שור. דיוגנס מוסיף שאחרים מספרים את אותו סיפור על פיתגורס. הסיפור נכתב מאות שנים אחרי תקופתו של תאלס, ולכן אין דרך לדעת אם הוא נכון.

8 בדקו את עצמכם

✓ חמש שאלות קצרות

1. במעגל שמרכזו O נתון $\angle AOB = 80^\circ$. מצאו את $\angle APB$ כאשר P על הקשת הגדולה AB , וכאשר P על הקשת הקטנה.
2. המרובע $ABCD$ חסום במעגל, ו- $\angle A = 2\angle C$. מצאו את $\angle A$ ואת $\angle C$.
3. הוכיחו שטרפז שחסום במעגל הוא טרפז שווה-שוקיים. (שאלה כזאת הופיעה בבחינת הברגות ב-5 יח"ל, בחורף 2021).
4. AT משיק למעגל שמרכזו O בנקודה A , והזווית שבין המשיק למיתר AB היא 35° . מצאו את $\angle AOB$ ואת $\angle OAB$.
5. מה הכיוון של הקרן מ- Y אל X ? (זאת השאלה מתיבת "עצרו ובדקו").

תשובות

1. על הקשת הגדולה: $\angle APB = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ$. על הקשת הקטנה הזווית נשענת על הקשת הגדולה, שהזווית המרכזית שלה היא 280° , ולכן $\angle APB = 140^\circ$ (ואכן $40^\circ + 140^\circ = 180^\circ$).
2. $\angle A + \angle C = 180^\circ$, כלומר $3\angle C = 180^\circ$. לכן $\angle C = 60^\circ$ ו- $\angle A = 120^\circ$.
3. בטרפז $ABCD$ שבו $AB \parallel CD$ מתקיים $\angle A + \angle D = 180^\circ$ (זוויות חד-צדדיות בין ישרים מקבילים). הטרפז חסום, ולכן גם $\angle A + \angle C = 180^\circ$. מכאן $\angle C = \angle D$, כלומר זוויות הבסיס של CD שוות, ולכן הטרפז שווה-שוקיים.
4. $\angle AOB = 2 \cdot 35^\circ = 70^\circ$, כי הזווית שבין המשיק למיתר היא חצי הזווית המרכזית (מסקנה 4). במשולש שווה-השוקיים AOB מתקיים $\angle OAB = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$, ואכן $55^\circ = 90^\circ - 35^\circ$.
5. נכתוב את הכיוון של X כ- $u + 360^\circ$. אז $u + 360^\circ < v + 360^\circ < v + 360^\circ + 90^\circ$, וטענת העזר נותנת את הכיוון $180^\circ + (m + 90^\circ) = \frac{v + u + 360^\circ}{2} + 90^\circ$ בדיוק הכיוון ההפוך לכיוון של הקרן מ- X אל Y .