

נוסחאות סכום והפרש זוויות

שלוש הוכחות: מיתר במעגל, מלבן ושטחים –
ומנוסחה אחת, בשורה או שתיים, כל שאר הנוסחאות

כ־20 דקות קריאה

3 הוכחות

טריגונומטריה

5 יח"ל

כיתה י"א

מה כדאי לדעת קודם

- $\sin$ ו- $\cos$ במעגל היחידה (המסמך "מעגל היחידה").
- הזהות $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- הזהויות $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ו- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.
- נוסחת המרחק (המסמך "נוסחת המרחק בין שתי נקודות").
- להוכחה 3: שטח משולש לפי $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: למה $\cos(\alpha + \beta)$ אינו $\cos \alpha + \cos \beta$.
- הוכחה 1: מיתר במעגל היחידה – לכל הזוויות בבת אחת.
- הוכחה 2: מלבן אחד, ושתי נוסחאות שנקראות מהצלעות שלו.
- הוכחה 3: אותו שטח, בשני חישובים.
- עץ המשפחה: טנגנס, זווית כפולה ומסכום למכפלה.
- ערכים מדויקים, משוואה, טעויות נפוצות ושאלות.

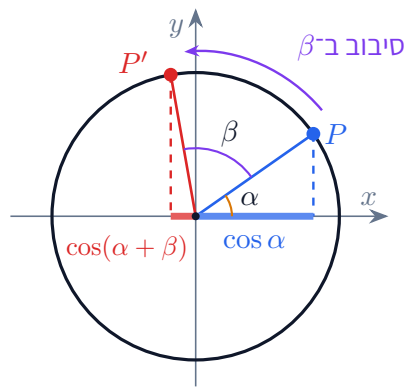
1 האינטואיציה: סיבוב "מערבב" את השיעורים

האינטואיציה

זוויות מתחברות כמו מספרים רגילים: מי שמסתובב ב- 60° ואחר כך עוד ב- 60° , מסתובב בסך הכול ב- 120° . לכן מפתה לחשוב שגם הקוסינוסים פשוט מתחברים. אבל $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ אבל $\cos 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$, ואילו $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ – אפילו הסימן לא נכון.

למה זה קורה? דמיינו קרוסלה, ועליה סוס במרחק של מטר אחד מהמרכז. את המקום של הסוס מתארים שני מספרים: כמה מטרים הוא נמצא מזרחה מהמרכז, וכמה צפונה. אם הקו מהמרכז אל הסוס יוצר זווית α עם הכיוון מזרחה, שני המספרים האלה הם בדיוק $\cos \alpha$ ו- $\sin \alpha$.

עכשיו הקרוסלה מסתובבת נגד כיוון השעון בעוד זווית β . כמה מזרחה נמצא הסוס עכשיו? זה תלוי לא רק במרחק מזרחה שהיה לו קודם: בזמן הסיבוב חלק מהמרחק מזרחה הופך למרחק צפונה, וחלק מהמרחק צפונה הופך למרחק מערבה. כל שיעור חדש הוא **תערובת** של שני השיעורים הישנים. לכן בנוסחה של $\cos(\alpha + \beta)$ חייב להופיע גם $\sin \alpha$, ולא רק $\cos \alpha$.



בסרטוט 1 הזוויות הן $\alpha = 35^\circ$ ו- $\beta = 65^\circ$. שתיהן חדות, ולשתיהן קוסינוס חיובי. אבל אחרי הסיבוב הנקודה עוברת לרביע השני, ושיעור ה- x שלה, $\cos 100^\circ$, שלילי. מחיבור של שני מספרים חיוביים אי אפשר לקבל מספר שלילי. הסיבוב מזיז את P שמאלה, והתזוזה הזאת תלויה גם בגובה של P , כלומר ב- $\sin \alpha$.

סרטוט 1: P מסתובבת בעוד β ועוברת ל- P' . הקוסינוס הופך לשלילי.

דוגמה מספרית קטנה

נשווה את $\cos(\alpha + \beta)$ לשני "מועמדים": לסכום $\cos \alpha + \cos \beta$, ולביטוי המוזר $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

$\cos(\alpha + \beta)$	$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$	$\cos \alpha + \cos \beta$	β	α
1	$1 - 0 = 1$	2	0°	0°
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$	1	60°	60°
0	$\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$	≈ 1.37	60°	30°
-1	$0 - 1 = -1$	0	90°	90°

הסכום טועה בכל השורות, ובשתיים מהן הוא אפילו גדול מ-1 – ערך שקוסינוס לא יכול לקבל. הביטוי המוזר צודק בכולן. זאת בדיוק הנוסחה שנוכית.

2 המשפט

נוסחאות הסכום וההפרש

לכל שתי זוויות α ו- β :

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

ומאותה משפחה:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

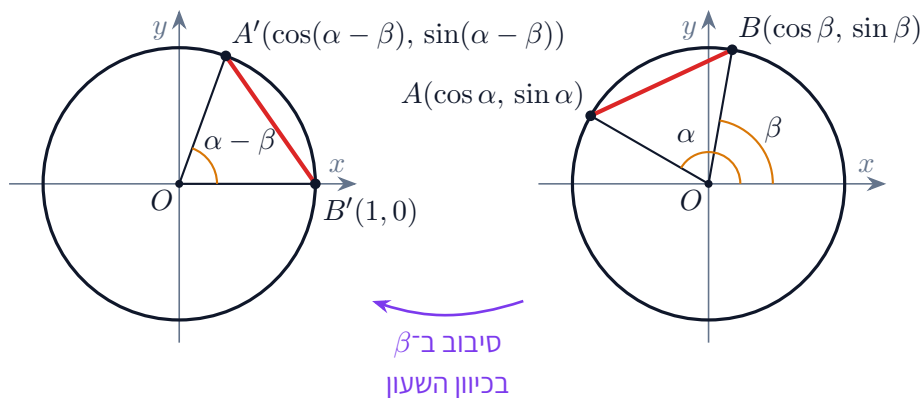
במילים: בקוסינוס של סכום או של הפרש מופיעות מכפלות של "בני זוג" – קוסינוס בקוסינוס וסינוס בסינוס – והסימן ביניהן **הפוך** לסימן שבתוך הסוגריים. בסינוס מופיעות מכפלות "מעורבות" – סינוס בקוסינוס – והסימן **זהה** לסימן שבתוך הסוגריים.

"לכל שתי זוויות" פירושו באמת לכל הזוויות: חדות או קהות, גדולות מ- 360° או שליליות, במעלות או ברדיאנים.

התוכנית. מספיק להוכיח אחת מארבע הנוסחאות, כי בסעיף 7 נראה איך כל השאר, ועוד כמה נוסחאות שימושיות, נובעות ממנה בשורה או שתיים. גם בתוכנית הלימודים של 5 יח"ל מוכיחים אחת מהן, ומראים איך שלוש האחרות נובעות ממנה. הוכחה 1 מוכיחה את הנוסחה שבמסגרת לכל הזוויות בבת אחת, ועליה נשען כל המשך המסמך. הוכחות 2 ו-3 גאומטריות: רואים בהן את נוסחאות הסכום ממש בסרטוט, אבל רק לזוויות חדות.

3 הוכחה 1: מיתר במעגל היחידה – לכל הזוויות בבת אחת

הרעיון נסמן על מעגל היחידה את הנקודות של הזוויות α ו- β , ונחשב את אורך המיתר שביניהן פעמיים: פעם מתוך השיעורים שלהן, ופעם אחרי שנסובב את כל הסרטוט כך שאחת מהן תגיע לנקודה $(1, 0)$. סיבוב לא משנה אורכים, ולכן שתי התוצאות שוות.



סרטוט 2: מימין: המיתר AB . משמאל: אותו מיתר אחרי סיבוב סביב O ב- β בכיוון השעון. האורך לא השתנה.

לפי ההגדרה של $\sin$ ושל $\cos$ במעגל היחידה, הנקודה של הזווית α היא $A(\cos \alpha, \sin \alpha)$, והנקודה של הזווית β היא $B(\cos \beta, \sin \beta)$. עכשיו נסובב את המישור סביב הראשית O בזווית β בכיוון השעון. הסיבוב מקטין ב- β את הזווית של כל נקודה על המעגל. לכן עוברת לנקודה של הזווית 0° , שהיא $B'(1, 0)$, ו- A עוברת לנקודה של הזווית $\alpha - \beta$, שהיא $A'(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$.

נימוק	טענה
נוסחת המרחק בין A ל- B	$AB^2 = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2$ ①
פתיחת סוגריים לפי $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, וסידור מחדש	$AB^2 = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$ ②
זהות פיתגורס, פעמיים	$AB^2 = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$ ③
נוסחת המרחק בין A' ל- B'	$A'B'^2 = (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2$ ④
פתיחת סוגריים, וזהות פיתגורס לזווית $\alpha - \beta$	$A'B'^2 = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$ ⑤

משה מרחקים; וצעים 3 ו-5
 $A'B' = AB$, כי סיבוב סביב O לא

$$2 - 2 \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \quad (6)$$

מחסירים 2 משני האגפים, ומחלקים ב-(-2)

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (7)$$

מש"ל

ואיפה המקרים? אין כאן מקרים. לא הנחנו שהזוויות חדות, ש- α גדולה מ- β או שהנקודות נמצאות ברביע מסוים: נוסחת המרחק נכונה לכל שתי נקודות, וזהות פיתגורס – לכל זווית. ההוכחה עובדת גם כש- A ו- B מתלכדות (אז אורך המיתר 0), וגם כשהן קצות של קוטר (אז אין בכלל משולש OAB). את "העבודה השחורה" עשה בשבילנו מעגל היחידה, שמגדיר $\sin$ ו- $\cos$ לכל זווית.

✓ עצרו ובדקו

מה מקבלים כשמציבים בנוסחה שהוכחנו $\beta = \alpha$? ומה כשמציבים $\alpha = 90^\circ$? אילו זהויות מוכרות יוצאות, ומה קורה בסרטוט 2 במקרה הראשון?

🔗 הנוסחה בשפת הווקטורים (למי שכבר למד וקטורים)

נסמן $\underline{u} = \underline{OA}$ ו- $\underline{v} = \underline{OB}$. לפי הרכיבים, $\underline{u} \cdot \underline{v} = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$. לפי ההגדרה הגאומטרית, $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \theta$, כאשר θ היא הזווית בין הווקטורים (שניהם באורך 1). ההפרש $\alpha - \beta$ שווה ל- $\pm \theta$, אולי בתוספת כפולה של 360° , ולכן $-\cos \theta = \cos(\alpha - \beta)$ והנה הנוסחה. **האם זאת הוכחה חדשה?** תלוי איך מוכיחים ששתי הדרכים לחשב את $\underline{u} \cdot \underline{v}$ נותנות אותו מספר. בהוכחה 1 במסמך "המכפלה הסקלרית" עושים זאת בעזרת משפט הקוסינוסים, כלומר בעזרת האורך של AB – בדיוק כמו כאן, ולכן זה אותו רעיון בשפה אחרת. הוכחה 2 שם, בעזרת היטלים, היא כבר דרך שונה באמת.

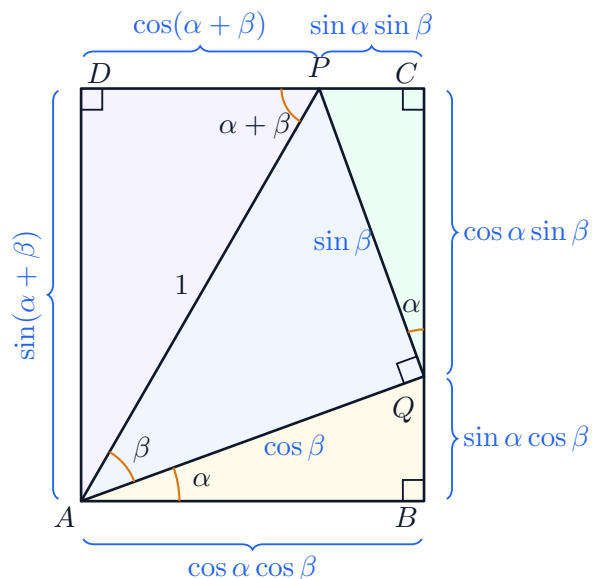
4 הוכחה 2: מלבן אחד, שתי נוסחאות

הרעיון נבנה מלבן שמורכב מארבעה משולשים ישרי-זווית, ונחשב את האורך של כל קטע על ההיקף שלו. במלבן הצלעות הנגדיות שוות – ושני השוויונות האלה הם בדיוק הנוסחאות של $\sin(\alpha + \beta)$ ושל $\cos(\alpha + \beta)$.

כאן נניח ש- α ו- β חדות ו- $\alpha + \beta < 90^\circ$. נבנה (סרטוט 3):

- משולש AQP שהזווית שלו ב- Q ישרה, היתר שלו $AP = 1$, והזווית שלו ב- A היא β ;
- מתחתיו, על הצלע AQ , משולש ABQ שהזווית שלו ב- B ישרה, והזווית שלו ב- A היא α ;
- מסביב: מלבן $ABCD$ שהצלע BC שלו עוברת דרך Q , והצלע DC שלו עוברת דרך P .

כך הקטע AP יוצר עם AB זווית $\alpha + \beta$, ובשתי הפינות העליונות נוצרים עוד שני משולשים ישרי-זווית: QCP ו- ADP .



סרטוט 3: המלבן ABCD וארבעת המשולשים ישרי-הזווית שבתוכו. ליד כל קטע – האורך שלו.

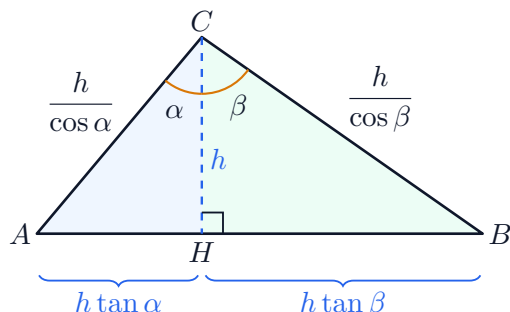
נימוק	טענה
ב- $\triangle AQP$: היתר $AP = 1$, והזווית ב- A היא β	$QP = \sin \beta$ ו- $AQ = \cos \beta$ (1)
ב- $\triangle ABQ$: היתר $AQ = \cos \beta$, והזווית ב- A היא α	$BQ = \sin \alpha \cos \beta$ ו- $AB = \cos \alpha \cos \beta$ (2)
סכום שלוש הזוויות שליד Q על הישר BC הוא 180° , ומהן α ו- $\angle BQA = 90^\circ$ ו- $\angle AQP = 90^\circ$	$\angle CQP = \alpha$ (3)
ב- $\triangle QCP$: היתר $QP = \sin \beta$, והזווית ב- Q היא α	$CP = \sin \alpha \sin \beta$ ו- $QC = \cos \alpha \sin \beta$ (4)
זוויות מתחלפות בין המקבילים AB ו- DC	$\angle DPA = \alpha + \beta$ (5)
ב- $\triangle ADP$: היתר $AP = 1$, והזווית ב- P היא $\alpha + \beta$	$DP = \cos(\alpha + \beta)$ ו- $AD = \sin(\alpha + \beta)$ (6)
צלעות נגדיות במלבן: $AD = BC = BQ + QC$	$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ (7)
צלעות נגדיות במלבן: $DP = DC - PC = AB - PC$	$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ (8)

מש"ל

והמחיר? הסרטוט הזה עובד רק כש- α ו- β חדות ו- $\alpha + \beta < 90^\circ$, אחרת הנקודה P "בורחת" מהמלבן. אין צורך לסרטט גרסאות אחרות למקרים אחרים: בסעיף 7 נקבל את שתי הנוסחאות האלה מהוכחה 1, לכל הזוויות. ההוכחה הזאת מראה **למה** הנוסחאות נראות כך, והוכחה 1 מבטיחה שהן נכונות תמיד.

5 הוכחה 3: אותו שטח, שני חישובים

הרעיון נחשב את השטח של משולש פעמיים: פעם כמשולש אחד, לפי "חצי מכפלת שתי צלעות בסינוס הזווית שביניהן" (ראו את המסמך "נוסחאות לשטח משולש"), ופעם כסכום של שני משולשים ישרי-זווית. השוויון בין שתי התוצאות הוא הנוסחה של $\sin(\alpha + \beta)$.



סרטוט 4: הגובה CH מחלק את הזווית שבקודקוד C ל- α ול- β .

נניח ש- α ו- β חדות. נסרטט קטע CH באורך h , ומהנקודה C נעביר שתי קרניים, אחת מכל צד של CH , שיוצרות איתו זוויות α ו- β . הישר שעובר דרך H וניצב ל- CH חותך את שתי הקרניים בנקודות A ו- B (כי α ו- β קטנות מ- 90°). נוצר משולש ABC שהגובה שלו הוא CH , והזווית שלו בקודקוד C היא $\alpha + \beta$. הגובה מחלק אותו לשני משולשים ישרי-זווית: AHC ו- BHC .

נימוק	טענה
ב- $\triangle AHC$ מתקיים $\cos \alpha = \frac{CH}{CA}$ ו- $\tan \alpha = \frac{AH}{CH}$	① $AH = h \tan \alpha$ ו- $CA = \frac{h}{\cos \alpha}$
אותו נימוק ב- $\triangle BHC$	② $HB = h \tan \beta$ ו- $CB = \frac{h}{\cos \beta}$
שטח לפי שתי צלעות והזווית שביניהן, וצעדים 1-2	③ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB \cdot \sin(\alpha + \beta) = \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{2 \cos \alpha \cos \beta}$
סכום השטחים של $\triangle AHC$ ושל $\triangle BHC$	④ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} h \cdot AH + \frac{1}{2} h \cdot HB = \frac{1}{2} h^2 (\tan \alpha + \tan \beta)$
משווים בין צעדים 3 ו-4, ומחלקים ב- $\frac{1}{2} h^2$	⑤ $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \tan \alpha + \tan \beta$
כופלים ב- $\cos \alpha \cos \beta$, ו- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	⑥ $\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \cos \alpha \cos \beta \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$
צמצום	⑦ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

מש"ל

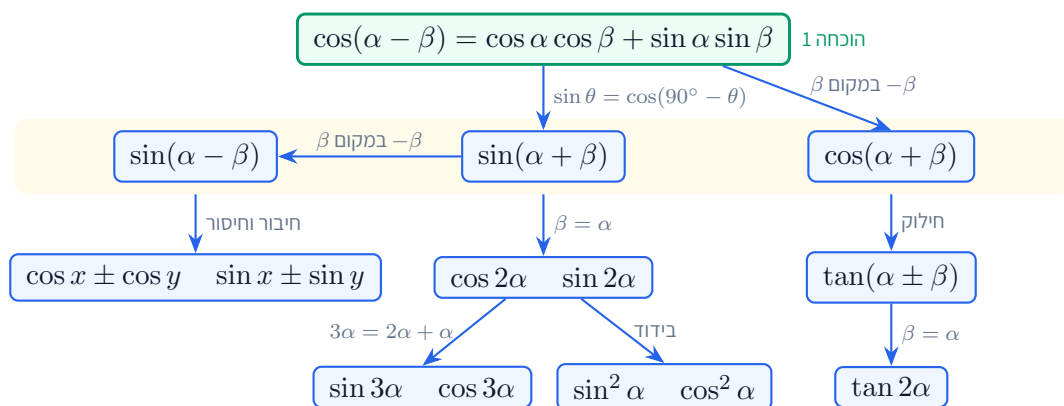
בנוסף. כאן $\alpha + \beta$ יכולה להיות גם קהה, כמו בסרטוט 4, כי הנוסחה $\frac{1}{2} ab \sin \gamma$ נכונה גם לזווית קהה. ובצעד 5 קיבלנו עוד זהות שימושית: $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$.

6 שלוש הדרכים זו מול זו

מה מוכיחים	הוכחה 1: מיתר במעגל	הוכחה 2: מלבן	הוכחה 3: שטחים
הכלים	מעגל היחידה, נוסחת המרחק וסיבוב	$\sin$ ו- $\cos$ במשולש ישר-זווית, וזוויות מתחלפות	שטח משולש לפי $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$, וטנגנס
אילו זוויות	כל הזוויות	α ו- β חדות, ו- $\alpha + \beta < 90^\circ$	α ו- β חדות ($\alpha + \beta$ יכולה להיות קהה)
מה רואים	שני מיתרים שווים	כל איבר בנוסחה הוא קטע על היקף המלבן	כל איבר בנוסחה בא משטח

7 עץ המשפחה: מנוסחה אחת לכל השאר

הוכחה 1 נתנה לנו נוסחה אחת, לכל הזוויות. עכשיו נגזור ממנה את כל השאר (סרטוט 5). נשתמש רק בזהויות מוכרות ממעגל היחידה: $\cos(-\beta) = \cos \beta$ ו- $\sin(-\beta) = -\sin \beta$ (שיקוף בציר ה- x), וזהויות הזוויות המשלימה $\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$ ו- $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$. גם את האחרונות אפשר לקבל מהנוסחה עצמה, כמו בתיבת "עצרו ובדקו" שבהוכחה 1.



סרטוט 5: עץ המשפחה. ברצועה הצהובה: שלוש הנוסחאות האחרות של המשפט. מהן נובע כל השאר.

שלוש הנוסחאות האחרות של המשפט

נימוק	טענה
$\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$, ולכן זו הנוסחה עם $-\beta$ במקום β	$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta)$ (1)
$\cos(-\beta) = \cos \beta$ $\sin(-\beta) = -\sin \beta$	$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ (2)

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \cos((90^\circ - \alpha) - \beta) \quad (3)$$

עם $\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$, $\alpha + \beta$ במקום θ

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(90^\circ - \alpha) \cos \beta + \sin(90^\circ - \alpha) \sin \beta \quad (4)$$

הנוסחה, עם $90^\circ - \alpha$ במקום α

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (5)$$

זהויות הזווית המשלימה

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (6)$$

צעד 5, עם $-\beta$ במקום β (כמו בצעד 2)

מש"ל

טנגנס של סכום ושל הפרש

נחלק את הנוסחה של הסינוס בנוסחה של הקוסינוס, ואחר כך נחלק את המונה ואת המכנה ב- $\cos \alpha \cos \beta$. כך כל מנה של סינוס בקוסינוס הופכת לטנגנס:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

מתי מותר? חילקנו ב- $\cos \alpha \cos \beta$, ולכן $\tan \alpha$ ו- $\tan \beta$ חייבים להיות מוגדרים. המכנה $1 - \tan \alpha \tan \beta$ הוא המכנה המקורי $\cos(\alpha + \beta)$ אחרי החילוק, ולכן הוא מתאפס בדיוק כש- $\cos(\alpha + \beta) = 0$, כלומר כש- $\tan(\alpha + \beta)$ אינו מוגדר. למשל, $\tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 1$, ובאמת $\tan(30^\circ + 60^\circ) = \tan 90^\circ$ אינו מוגדר. בנוסחה של $\tan(\alpha - \beta)$ התנאי הוא $\tan \alpha \tan \beta \neq -1$.

זווית כפולה

נציב $\beta = \alpha$ בנוסחאות הסכום:

טענה	נימוק
$\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (1)$	$\sin(\alpha + \beta)$ עם $\beta = \alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (2)$	$\cos(\alpha + \beta)$ עם $\beta = \alpha$
$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad (3)$	מציבים $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, ו- $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$
$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (4)$	$\tan(\alpha + \beta)$ עם $\beta = \alpha$, בתנאי ש- $\tan^2 \alpha \neq 1$ ו- $\cos \alpha \neq 0$

מש"ל

משתי הצורות האחרונות של $\cos 2\alpha$ מבודדים את הריבועים, ומקבלים נוסחאות ש"מורידות חזקה": במקום ריבוע מופיעה זווית כפולה. הן שימושיות למשל כשמחפשים פונקציה קדומה ל- $\sin^2 x$:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

מסכום למכפלה

נחבר ונחסיר את הנוסחאות של $\alpha + \beta$ ושל $\alpha - \beta$. בכל פעם זוג אחד של איברים מתבטל, ונשארת מכפלה (העמודה השמאלית). כדי להפוך למכפלה סכום כלשהו, כמו $\sin x + \sin y$, נסמן $x = \alpha + \beta$ ו- $y = \alpha - \beta$. כלומר $\alpha = \frac{x+y}{2}$ ו- $\beta = \frac{x-y}{2}$, ונקבל את העמודה הימנית.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2 \sin \alpha \cos \beta & \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \sin \beta & \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta & \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) &= -2 \sin \alpha \sin \beta & \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

את ארבע הנוסחאות שבעמודה הימנית תמצאו בדף הנוסחאות של 5 יח"ל, לצד נוסחאות הסכום, ההפרש והזווית הכפולה של $\sin$ ושל $\cos$. הנוסחאות של $\tan$ אינן בדף, ולכן כדאי לדעת לגזור אותן כמו כאן.

8 מה עושים עם הנוסחאות?

ערכים מדויקים בלי מחשבון

דוגמה 1: הערכים של 15°

$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, ואת הערכים של 45° ושל 30° אנחנו מכירים:

$$\cos 15^\circ = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx 0.966$$

$$\sin 15^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0.259$$

$$\begin{aligned} \tan 15^\circ &= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} \\ &= 2 - \sqrt{3} \approx 0.268 \end{aligned}$$

ובאותה דרך $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\sin 15^\circ$ בדיוק $-\cos 75^\circ$, כמו שצריך, כי $75^\circ = 90^\circ - 15^\circ$.

בדיקה: זהויות מוכרות בשורה אחת

במסמך "מעגל היחידה" מקבלים זהויות כמו אלה בעזרת שיקופים. נוסחאות הסכום נותנות אותן בשורה אחת:

$$\begin{aligned} \sin(x + 90^\circ) &= \sin x \cos 90^\circ + \cos x \sin 90^\circ = \cos x \\ \cos(180^\circ - x) &= \cos 180^\circ \cos x + \sin 180^\circ \sin x = -\cos x \end{aligned}$$

וזו גם בדיקה לנוסחאות עצמן: סימן שגוי בהן היה מתגלה כאן מייד.

פתרון משוואה: $\sin 2x = \sin x$

דוגמה 2: פתרו את המשוואה $\sin 2x = \sin x$ בתחום $0^\circ \leq x < 360^\circ$ 

לפי נוסחת הזווית הכפולה, המשוואה היא $2 \sin x \cos x = \sin x$. **אסור לחלק ב-** $\sin x$: הוא עלול להיות 0, ואז נאבד פתרונות. במקום זה נעביר אגף ונוציא גורם משותף:

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \implies \sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

מכפלה שווה ל-0 אם ורק אם אחד הגורמים שווה ל-0:

• אם $\sin x = 0$, אז $x = 0^\circ$ או $x = 180^\circ$.

• אם $\cos x = \frac{1}{2}$, אז $x = 60^\circ$ או $x = 300^\circ$.

לכן יש ארבעה פתרונות: $x = 0^\circ$ או $x = 60^\circ$ או $x = 180^\circ$ או $x = 300^\circ$. ואם לא מגבילים את התחום:

$x = 180^\circ k$ או $x = \pm 60^\circ + 360^\circ k$, כאשר k מספר שלם.

בדיקה בדרך אחרת: $\sin 2x = \sin x$ אם ורק אם $2x = x + 360^\circ k$ או $2x = 180^\circ - x + 360^\circ k$, כלומר $x = 360^\circ k$ או $x = 60^\circ + 120^\circ k$ ושוב אותם ארבעה פתרונות.

בנוס: זווית משולשת

נכתוב $3\alpha = 2\alpha + \alpha$, ונשתמש בנוסחת הסכום ובנוסחאות הזווית הכפולה:

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = (2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{aligned}$$

בדיקה: כש $\alpha = 60^\circ$, אגף שמאל הוא $\cos 180^\circ = -1$, ואגף ימין הוא $4 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{2} = -1$.

ומה הלאה? במסמך "הנגזרות של סינוס וקוסינוס" מפרקים בעזרת נוסחת הסכום את $\sin(x+h)$, ובמסמך "כפל מרוכבים ומשפט דה מואבר" היא מסבירה למה בכפל של מספרים מרוכבים הזווית מתחברות.

טעויות נפוצות

• **"הקוסינוס מתפרק".** $\cos(\alpha + \beta) \neq \cos \alpha + \cos \beta$. למשל, $\cos(60^\circ + 60^\circ) = -\frac{1}{2}$, אבל $\cos 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$.

• **"ה-2 יוצא החוצה".** $\sin 2\alpha \neq 2 \sin \alpha$. למשל, $\sin 180^\circ = 0$, אבל $2 \sin 90^\circ = 2$. הנכון: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

• **סימנים וסדר.** ב- $\cos(\alpha + \beta)$ יש **מינוס**, וב- $\cos(\alpha - \beta)$ יש **פלוס**. ב- $\sin(\alpha - \beta)$ חשוב הסדר: $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$, ולא להפך – אחרת מקבלים $\sin(\beta - \alpha)$, שהוא $-\sin(\alpha - \beta)$.

• **טנגנס לא מוגדר.** כש $\tan \alpha \tan \beta = 1$ המכנה מתאפס, ו- $\tan(\alpha + \beta)$ אינו מוגדר (למשל $\alpha = 30^\circ$ ו- $\beta = 60^\circ$). וכש $\alpha = 90^\circ$ אי אפשר להשתמש בנוסחה בכלל, גם אם $\tan(\alpha + \beta)$ מוגדר. למשל, $\tan(90^\circ + 45^\circ) = \tan 135^\circ = -1$, במקרים כאלה חוזרים לסינוס ולקוסינוס.

הידעתם?

תלמי (המאה ה-2 לספירה) בנה בספר הראשון של "אלמגסט" טבלה של אורכי **מיתרים** במעגל שרדיוסו 60. כדי לחשב אותה השתמש במשפט שנקרא היום "משפט תלמי": במרובע החסום במעגל, מכפלת האלכסונים שווה לסכום המכפלות של הצלעות הנגדיות. מהמשפט הזה קיבל נוסחאות למיתר של סכום שתי קשתות ולמיתר של הפרשן – כלומר את נוסחאות הסכום וההפרש שלנו. אבו אל-זופא, שעבד בבגדאד במאה ה-10, ניסח והוכיח את נוסחאות הסינוס של סכום ושל הפרש בצורה שבה אנחנו כותבים אותן היום, ובנה טבלאות סינוסים מדויקות מאוד.

ובשנות ה-80 של המאה ה-16, עוד לפני שג'ון נייפייר פרסם את הלוגריתמים (1614), אסטרונומים כמו טיכו ברהה כפלו מספרים ארוכים בעזרת הזהות $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ במקום כפל קשה עשו חיבור, חיסור וחיפוש בטבלת קוסינוסים. השיטה נקראה "פרוסתאפרזיס" (prosthaphaeresis).

9 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

1. חשבו בלי מחשבון את $\sin 105^\circ$.
2. נתון ש- $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ו- α זווית חדה. חשבו את $\cos 2\alpha$ ואת $\sin 2\alpha$.
3. הוכיחו שלכל α ו- β מתקיים $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$.
4. מצאו נוסחה ל- $\sin 3\alpha$ שבה מופיע רק $\sin \alpha$.
5. נתון ש- α ו- β זוויות חדות, ש- $\tan \alpha = 2$ וש- $\tan \beta = 3$. מצאו את $\alpha + \beta$ בלי מחשבון.
6. מה נותנת הנוסחה של $\cos(\alpha - \beta)$ כש- $\beta = \alpha$, וכש- $\alpha = 90^\circ$? (מתיבת "עצרו ובדקו").

תשובות

1. $(\cos 15^\circ) \sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx 0.966$
2. α חדה, ולכן $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. מכאן $\cos 2\alpha = 1 - 2 \cdot \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$ ו- $\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.
3. המכפלה היא $\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$ (הפרש ריבועים). נציב $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$ ונקבל $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$.
4. $\sin 3\alpha = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha$ ונקבל $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$. בדיקה: כש- $\alpha = 30^\circ$ שני האגפים שווים ל-1.
5. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{2+3}{1-2 \cdot 3} = -1$. הזוויות חדות, ולכן $0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ$, ומכאן $\alpha + \beta = 135^\circ$.
6. כש- $\beta = \alpha$ מקבלים $\cos 0^\circ = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ – זהות פיתגורס (בסרטוט 2 הנקודות A ו-B מתלכדות, והמיתר מתכווץ לנקודה). כש- $\alpha = 90^\circ$ מקבלים $\cos(90^\circ - \beta) = \sin \beta$ – זהות הזווית המשלימה.