

הנגזרות של סינוס וקוסינוס

למה הנגזרת של $\sin x$ היא $\cos x$ – ולמה זה נכון רק כשמודדים ברדיאנים

כ-25 דקות קריאה

7 הוכחות

חשבון דיפרנציאלי

5 יח"ל

כיתה י"א

מה כדאי לדעת קודם

- הגדרת הנגזרת וכללי הגזירה ("הנגזרת וכללי הגזירה").
- $\sin$ ו- $\cos$ במעגל היחידה, ורדיאנים ("מעגל היחידה").
- הזהות $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- להוכחה 1 של הנגזרת: הנוסחה ל- $\sin(\alpha + \beta)$ ("נוסחאות סכום והפרש זוויות").

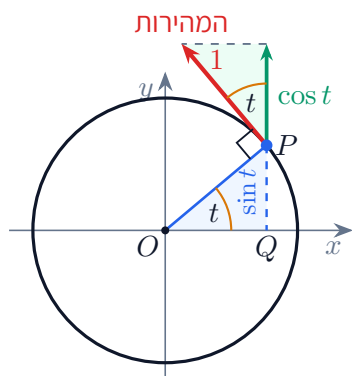
מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: נקודה שרצה על מעגל.
- הגבול $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$ בשתי הוכחות: בשטחים ובאורכים.
- $(\sin x)' = \cos x$ ו- $(\cos x)' = -\sin x$, כל נוסחה בשתי הוכחות.
- הנגזרת של $\tan x$, ולמה כל זה נכון רק ברדיאנים.
- דוגמאות, טעויות נפוצות ושאלות לבדיקה עצמית.

1 האינטואיציה: נקודה שרצה על מעגל

האינטואיציה

דמיינו נקודה P שנעה על מעגל היחידה נגד כיוון השעון, במהירות קבועה של יחידת אורך אחת בשנייה. היא יוצאת מהנקודה $(1, 0)$, ואחרי t שניות היא עוברת קשת שאורכה t – כלומר מסתובבת בזווית של t רדיאנים. לכן $P = (\cos t, \sin t)$, והגובה של P הוא $\sin t$. באיזה קצב הגובה הזה משתנה? המהירות של P היא חץ שמשיק למעגל (כלומר ניצב לרדיוס OP), ואורכו 1. בסרטוט רואים שהמשולש הירוק, שהחץ האדום הוא היתר שלו, הוא המשולש הכחול OQP אחרי רבע סיבוב. לכן הרכיב האנכי של המהירות – קצב העלייה של P – הוא $\cos t$. כלומר: **קצב השינוי של $\sin t$ הוא $\cos t$** .



סרטוט 1: החץ האדום הוא המהירות של P , והחץ הירוק הוא הרכיב האנכי שלה.

זאת עדיין **לא הוכחה**: הנחנו שהמהירות משיקה למעגל ושאורכה 1, וכדי להוכיח זאת צריך בדיוק את הנגזרות שאנחנו מחפשים. אבל התמונה מנבאת נכון את התוצאה, וגם את הנגזרת של $\cos t$: הרכיב האופקי של המהירות פונה שמאלה ואורכו $\sin t$, ולכן $\cos t$ משתנה בקצב $-\sin t$.

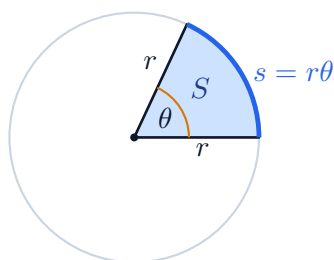
בדיקה מספרית

נבחר $t = 0.5$ ופרק זמן קצר של 0.001 שנייה. קצב העלייה הממוצע בפרק הזמן הזה הוא

$$\frac{\sin 0.501 - \sin 0.5}{0.001} \approx 0.8773,$$

וזה כמעט בדיוק $\cos 0.5 \approx 0.8776$. ככל שפרק הזמן קצר יותר, ההתאמה טובה יותר.

2 רדיאנים בקצרה



סרטוט 2: גזרה של זווית θ .

בחשבון דיפרנציאלי מודדים זוויות ברדיאנים. ההגדרה מופיעה במסמך "מעגל היחידה" בסדרה, וכאן נזכיר אותה ונוסיף את מה שנצטרך:

- גודלה של זווית מרכזית ברדיאנים הוא אורך הקשת שהיא נשענת עליה, חלקי הרדיוס: $\theta = \frac{s}{r}$. לכן אורך הקשת הוא $s = r\theta$.
- סיבוב שלם הוא 2π רדיאנים. לכן π רדיאנים הם 180° , ורדיאן אחד הוא בערך 57.3° .
- שטח הגזרה S יחסי לזווית שלה, והעיגול כולו הוא "גזרה" של 2π רדיאנים ששטחה πr^2 (נוסחה שנקבל בלי הוכחה). לכן $\frac{S}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}$, כלומר $S = \frac{1}{2}r^2\theta$.

במעגל היחידה ($r = 1$) אורך הקשת הוא θ , ושטח הגזרה הוא $\frac{\theta}{2}$. על שתי העובדות האלה נשענות שתי ההוכחות שבסעיף הבא.

3 הגבול החשוב: $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$

כשנגזור את $\sin x$ לפי ההגדרה, נגיע למנה $\frac{\sin h}{h}$. אי אפשר להציב בה $h = 0$ (מקבלים $\frac{0}{0}$), ולכן צריך לברר לאיזה מספר היא מתקרבת כש- h מתקרב ל-0.

הגבול החשוב

כאשר h נמדד ברדיאנים:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

במילים: לזווית קטנה, הסינוס כמעט שווה לזווית עצמה. היחס $\frac{\sin h}{h}$ מתקרב ל-1 ככל ש- h מתקרב ל-0, מימין ומשמאל.

$\frac{\sin h}{h}$	$\cos h$	h
≈ 0.9589	≈ 0.8776	0.5
≈ 0.99833	≈ 0.99500	0.1
≈ 0.9999833	≈ 0.9999500	0.01

בתוכנית הלימודים של יח"ל מוצאים בעזרת הגבול הזה את הנגזרת של הסינוס. נוכיח אותו בשתי דרכים, אבל קודם נראה מה אומרים המספרים. בכל שורה בטבלה $\frac{\sin h}{h}$ כלוא בין $\cos h$ לבין 1, ו- $\cos h$ מתקרב ל-1 – וזה בדיוק מה שנוכיח. (טבלה אינה הוכחה: היא בודקת רק כמה ערכים של h).

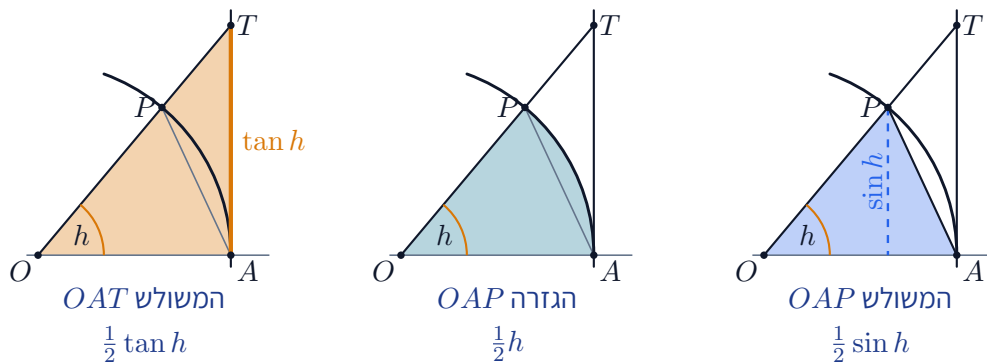
מספיק לבדוק h חיובי, כי לכל $h \neq 0$ מתקיים $\frac{\sin(-h)}{-h} = \frac{-\sin h}{-h} = \frac{\sin h}{h}$. כלומר הפונקציה $\frac{\sin h}{h}$ זוגית, והגרף שלה סימטרי ביחס לציר ה- y : מה שקורה כש- h מתקרב ל-0 מימין קורה גם משמאל. לכן נניח מעכשיו ש- $0 < h < \frac{\pi}{2}$.

התוכנית. שתי ההוכחות הבאות מגיעות, כל אחת בדרך אחרת, לאותו אי-שוויון כפול, $\sin h < h < \tan h$. אחר כך נראה, בצעד משותף לשתיהן, שממנו נובע הגבול.

הוכחה 1: משווים שטחים

הרעיון נמצא שלוש צורות שמוכלות זו בזו: משולש בתוך גזרה, וגזרה בתוך משולש גדול יותר. את השטחים של שלושתן קל לחשב, וצורה שמוכלת בצורה אחרת קטנה ממנה בשטח.

נסמן במעגל היחידה: O היא הראשית, $A = (1, 0)$, ו- $P = (\cos h, \sin h)$ היא הנקודה על המעגל בזווית h . המשיק למעגל ב- A הוא הישר האנכי $x = 1$, והקרן OP חותכת אותו בנקודה T . במשולש ישר-הזווית OAT מתקיים $AT = OA \cdot \tan h = \tan h$, ולכן $T = (1, \tan h)$.



סרטוט 3: מימין לשמאל: המשולש OAP , הגזרה OAP והמשולש OAT . כל צורה מוכלת בזו שמשמאלה.

נימוק	טענה
הבסיס $OA = 1$, והגובה אליו הוא שיעור ה- y של P	$S_{\triangle OAP} = \frac{1}{2} \sin h$ ①
שטח גזרה $\frac{1}{2}r^2\theta$ עם $r = 1$ ו- $\theta = h$	שטח הגזרה OAP הוא $\frac{1}{2}h$ ②
הבסיס $OA = 1$, והגובה $AT = \tan h$	$S_{\triangle OAT} = \frac{1}{2} \tan h$ ③
המשולש OAP מוכל בגזרה, והגזרה מוכלת במשולש OAT	$\frac{1}{2} \sin h < \frac{1}{2}h < \frac{1}{2} \tan h$ ולכן $\sin h < h < \tan h$ ④

מש"ל

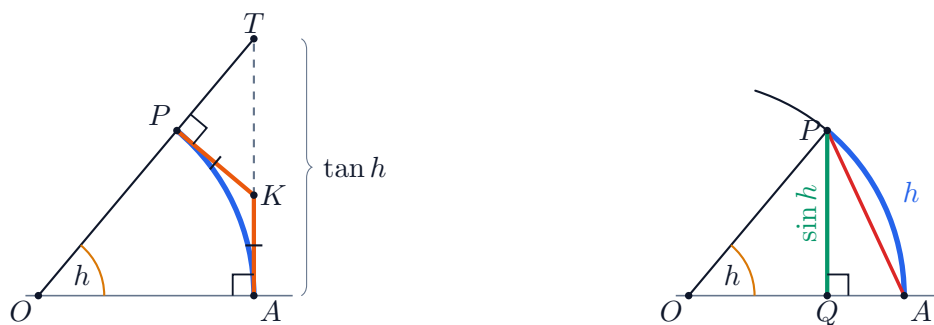
עצרו ובדקו ✓

באיזה צעד של ההוכחה השתמשנו בכך ש- h נמדד ברדיאנים? מה היה משתנה אילו מדדנו במעלות? (התשובה בסוף המסמך.)

הוכחה 2: משווים אורכים

הרעיון במקום שטחים נשווה אורכים. את הקשת $\widehat{AP}$, שאורכה h , "נלכוד" בין קטעים ישרים שאת אורכם קל לחשב.

נוריד מ- P אנך לציר ה- x , ונסמן את עקבו ב- Q . נעביר משיקים למעגל ב- A וב- P , ונסמן ב- K את נקודת החיתוך שלהם. נשתמש בשתי הנחות על אורכים, שנקבל בלי הוכחה: **הקו הישר הוא הקצר ביותר** מבין כל הקווים שמחברים שתי נקודות, ו**קשת קמורה מקו שבור שעוטף אותה ויש לו אותם קצוות**.



סרטוט 4: מימין: $\sin h = PQ < AP < \widehat{AP}$. משמאל: הקשת כלואה בקו השבור AKP , שאורכו קטן מ- $AT = \tan h$.

טענה	נימוק
① $\sin h = PQ < AP$	במשולש ישר-הזווית PQA הניצב PQ קצר מהיתר AP
② $AP < \widehat{AP} = h$	הקו הישר הוא הקצר ביותר (ההנחה הראשונה)
③ $h < AK + KP$	הקשת כלואה בקו השבור AKP (ההנחה השנייה)
④ $AK = KP = \tan \frac{h}{2}$	$\triangle OAK \cong \triangle OPK$ (ז.צ.ז: יתר משותף, $OA = OP$, זווית ישרה). לכן $\angle AOK = \frac{h}{2}$, $AK = OA \cdot \tan \frac{h}{2}$
⑤ $KP < KT$	המשיק ב- P ניצב לרדיוס, ולכן במשולש KPT הזווית P ישרה, ו- KT הוא היתר
⑥ $h < AK + KP < AK + KT = AT = \tan h$	צעדים 3 ו-5. K נמצאת על הקטע AT , כי $\tan \frac{h}{2} < \tan h$

מש"ל

מצעדים 1-2 ו-6 קיבלנו שוב $\sin h < h < \tan h$, ובדרך גם אי-שוויון חזק יותר, $h < 2 \tan \frac{h}{2}$ (צעדים 3 ו-4).

מאי־השוויון אל הגבול: כלל הסנדוויץ'

נחלק את אי־השוויון הכפול ב־ h , ונראה שהמנה $\frac{\sin h}{h}$ "כלואה" בין שני ביטויים ששואפים ל־1.

טענה	נימוק
① $\cos h < \frac{\sin h}{h} < 1$	מ־ $\sin h < h$: חילוק ב־ h . מ־ $\frac{\sin h}{\cos h} < h$: כפל ב־ $\cos h > 0$ וחילוק ב־ h
② $1 - \cos h = \frac{(1 - \cos h)(1 + \cos h)}{1 + \cos h} = \frac{\sin^2 h}{1 + \cos h}$	כפל וחילוק ב־ $1 + \cos h$, ו־ $1 - \cos^2 h = \sin^2 h$
③ $0 < 1 - \cos h < \sin^2 h < h^2$	המכנה $1 + \cos h$ גדול מ־1, ו־ $0 < \sin h < h$
④ $1 - h^2 < \frac{\sin h}{h} < 1$	צעד 1, ומצעד 3: $1 - h^2 < \cos h$

כש־ $h \rightarrow 0$, שני הצדדים שואפים ל־1, ולכן גם $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$. זה **כלל הסנדוויץ'**: פונקציה שכלואה בין שתי פונקציות ששואפות לאותו מספר שואפת גם היא אליו — אין לה לאן לברוח. את הכלל עצמו נקבל בלי הוכחה פורמלית. שימו לב שלא הנחנו ש־ $\cos h \rightarrow 1$: הוכחנו זאת בצעד 3.

מש"ל ■

שתי ההוכחות זו מול זו

הוכחה 1: שטחים	הוכחה 2: אורכים	
הרעיון	משולש בתוך גזרה, וגזרה בתוך משולש גדול יותר	אנך, מיתר, קשת וקו שבור של משיקים
איפה הרדיאנים	שטח הגזרה הוא $\frac{h}{2}$	אורך הקשת הוא h
מה מקבלים בלי הוכחה	את שטח העיגול πr^2 , ושצורה שמוכלת בצורה אחרת קטנה ממנה בשטח	שהקו הישר הוא הקצר ביותר, ושקשת קמורה קצרה מקו שבור שעוטף אותה

כל הוכחה נשענת על עובדה "מובנת מאליה": הראשונה על מושג השטח, והשנייה על מושג האורך של קו עקום. הגדרה מדויקת של המושגים האלה היא כבר חומר לאוניברסיטה.

מסקנה: $\frac{1 - \cos h}{h} \rightarrow 0$

בנגזרת של $\sin x$ יופיע גם הביטוי $\frac{\cos h - 1}{h}$, הנגדי של $\frac{1 - \cos h}{h}$. לפי צעד 2 שלמעלה, לכל $h \neq 0$ קטן:

$$\frac{1 - \cos h}{h} = \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{1 + \cos h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0,$$

כי $\sin h \rightarrow 0$ (הרי $|\sin h| < |h|$) ו־ $\cos h \rightarrow 1$. במילים: כשהזווית קטנה, $1 - \cos h$ קטן הרבה יותר מ־ h — הוא קטן כמו h^2 .

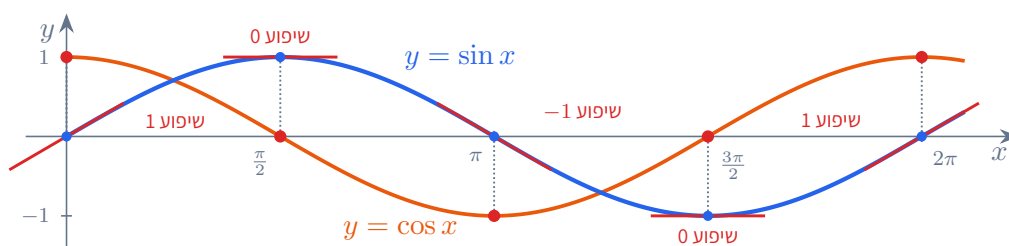
4 הנגזרת של $\sin x$

הנגזרות של סינוס וקוסינוס

כאשר x נמדד ברדיאנים, לכל x :

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

במילים: השיפוע של הגרף של $\sin x$ בכל נקודה שווה לגובה של הגרף של $\cos x$ באותה נקודה. והשיפוע של $\cos x$ הוא הנגדי של הגובה של $\sin x$.



סרטוט 5: משיקים לגרף של $\sin x$ (כחול). השיפוע של כל משיק שווה לגובה של הנקודה האדומה שעל הגרף של $\cos x$ (כתום).

הוכחה 1: ההגדרה ונוסחת הסכום

הרעיון נכתוב את מנת ההפרשים, נפרק את $\sin(x+h)$ בנוסחה לסינוס של סכום, ונקבל בדיוק את שני הגבולות שכבר הוכחנו.

נשתמש בנוסחה לסינוס של סכום זוויות (ראו את המסמך "נוסחאות סכום והפרש זוויות" בסדרה):

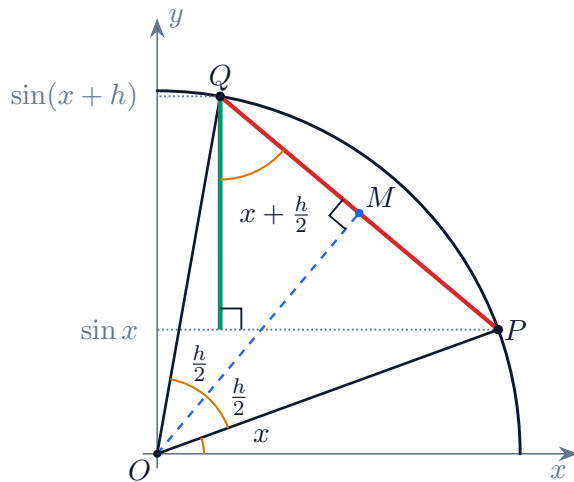
$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x. \end{aligned}$$

בשורה הראשונה פירקנו את $\sin(x+h)$ לפי הנוסחה. בשורה השנייה הוצאנו את $\sin x$ כגורם משותף, ופיצלנו את השבר לשניים. כש $h \rightarrow 0$, הערך של x קבוע, ושתי המנות שואפות ל-0 ול-1, בהתאמה. לכן $(\sin x)' = \cos x$.

■ מש"ל

הוכחה 2: מיתר במעגל, בלי נוסחת הסכום

הרעיון המונה $\sin(x+h) - \sin x$ הוא ההפרש בין הגבהים של שתי נקודות על מעגל היחידה. נחשב אותו ישירות מהמיתר שמחבר אותן.



סרטוט 6: המיתר PQ ניצב ל- OM . הקטע הירוק הוא העלייה $\sin(x+h) - \sin x$, והזווית בינו לבין המיתר היא $x + \frac{h}{2}$.

נניח קודם ש- $0 < h < \pi$ (בגבול חשובים רק ערכים קטנים של h), ונסמן על מעגל היחידה את הנקודות P ו- Q שבזוויות x ו- $x+h$. הגבהים שלהן הם $\sin x$ ו- $\sin(x+h)$, ולכן ההפרש בין הגבהים הוא בדיוק המונה של מנת ההפרשים. נסמן ב- M את אמצע המיתר PQ . נשתמש בעובדה אחת מההגדרה של $\sin$: אם הולכים לאורך קטע שאורכו L , בכיוון שיוצר זווית φ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , **עולים ב-** $L \sin \varphi$ (בדיוק כמו לאורך רדיוס באורך L במעגל שמרכזו בראשית).

נימוק	טענה
במשולש שווה-השוקיים OPQ התיכון לבסיס הוא גם גובה וגם חוצה זווית	① $\angle POM = \angle MOQ = \frac{h}{2}$ ו- $OM \perp PQ$
במשולש ישר-הזווית OMP היתר הוא $OP = 1$, ו- PM ניצב מול הזווית $\frac{h}{2}$	② $PQ = 2 \cdot PM = 2 \sin \frac{h}{2}$
הקו OM יוצרת זווית $x + \frac{h}{2}$, והמיתר ניצב לה ופונה נגד כיוון השעון	③ המיתר מ- P ל- Q יוצר עם ציר ה- x זווית $x + \frac{h}{2} + \frac{\pi}{2}$
העלייה היא $PQ \cdot \sin(x + \frac{h}{2} + \frac{\pi}{2})$, ו- $\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos \varphi$	④ $\sin(x+h) - \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cdot \cos(x + \frac{h}{2})$

בסרטוט רואים את צעדים 3-4 גם ישירות: העלייה היא הקטע הירוק האנכי, הזווית בינו לבין המיתר היא $x + \frac{h}{2}$, והוא הניצב שליד הזווית הזאת. **ואם $h < 0$?** אז מחליפים בין התפקידים של P ושל Q : מתחילים מהזווית $x+h$ ומסתובבים בזווית החיובית $-h$. אותו חישוב נותן אותה זהות (בדקו!). לכן לכל h שמקיים $0 < |h| < \pi$:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

כש- $h \rightarrow 0$ גם $\frac{h}{2} \rightarrow 0$, ולכן לפי הגבול החשוב הגורם השני שואף ל-1. נראה שהגורם הראשון שואף ל- $\cos x$, ונקבל $(\sin x)' = \cos x \cdot 1 = \cos x$.

למה $\cos(x + \frac{h}{2}) \rightarrow \cos x$? ההפרש $\cos(x+k) - \cos x$ הוא ההפרש בין שיעורי ה- x של הנקודות שבזוויות $x+k$ ו- x על מעגל היחידה, ולפי צעד 2 המרחק בין שתי הנקודות האלה הוא $2 \sin \frac{|k|}{2}$. הפרש אופקי בין שתי נקודות אינו גדול מהמרחק ביניהן (ניצב לעומת יתר). לכן, בעזרת $\sin t < t$:

$$|\cos(x+k) - \cos x| \leq 2 \sin \frac{|k|}{2} < |k|.$$

עם $k = \frac{h}{2}$: כש- $h \rightarrow 0$, ההפרש שואף ל-0.

מש"ל

נוסחה במתנה. עם $\beta = x + h$ ו $\alpha = x$, הזהות שבצעד 4 היא אחת מנוסחאות "סכום למכפלה" – וכאן קיבלנו אותה ישירות מהסרטוט, בלי נוסחאות הסכום:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

שתי ההוכחות זו מול זו

הוכחה 1: נוסחת הסכום	הוכחה 2: מיתר במעגל	
הנוסחה ל- $\sin(x + h)$, והגבולות של $\frac{\sin h}{h}$ ושל $\frac{1 - \cos h}{h}$	משולש שווה-שוקיים, והגבול של $\frac{\sin h}{h}$ בלבד	הכלים
קצרה, ואלגברית לגמרי	נותנת זהות מדויקת לעלייה, ו"רואים" אותה בסרטוט	היתרון

5 הנגזרות של $\cos x$ ושל $\tan x$

הוכחה 1: שוב נוסחת הסכום

הרעיון בדיוק כמו בסינוס, עם הנוסחה $\cos(x + h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$:

$$\frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} = \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x.$$

■ מש"ל

הוכחה 2: קוסינוס הוא סינוס של הזווית המשלימה

הרעיון נכתוב את $\cos x$ בעזרת סינוס, ונגזור לפי כלל השרשרת.

לכל x מתקיים $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ וגם $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ (שיקוף בישר $y = x$; ראו את המסמך "מעגל היחידה"). הנגזרת של הפונקציה הפנימית $\frac{\pi}{2} - x$ היא -1 , ולכן לפי כלל השרשרת:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x.$$

■ מש"ל

הנגזרת של $\tan x$

בכל נקודה שבה $\cos x \neq 0$ נכתוב $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, ונגזור לפי כלל המנה:

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

המונה שווה ל-1, ואם מפצלים את השבר לשני שברים מקבלים $1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$. לכן יש לנגזרת שתי צורות:

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

הנגזרת חיובית בכל נקודה, ולכן $\tan x$ עולה בכל קטע שבו היא מוגדרת, למשל ב- $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

מש"ל

6 למה דווקא רדיאנים?

נניח שמודדים את x במעלות, ונסמן ב- $s(x) = \sin(x^\circ)$ את הסינוס של x מעלות. כיוון ש- x מעלות הן $\frac{\pi}{180} x$ רדיאנים, $s(x) = \sin\left(\frac{\pi}{180} x\right)$, ולפי כלל השרשרת:

$$s'(x) = \frac{\pi}{180} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{180} x\right) = \frac{\pi}{180} \cdot \cos(x^\circ) \approx 0.01745 \cos(x^\circ).$$

כלומר במעלות הנגזרת של סינוס אינה קוסינוס, אלא קוסינוס כפול קבוע לא נוח – ובכל גזירה נוסף עוד קבוע כזה. רק ברדיאנים הקבוע הוא 1. בדיקה מספרית: $\sin 1^\circ \approx 0.017452$, כלומר בצעד של מעלה אחת מ-0 הגרף של s עולה בכ-0.01745 – כמעט בדיוק $\frac{\pi}{180} \approx 0.017453$, ולא 1.

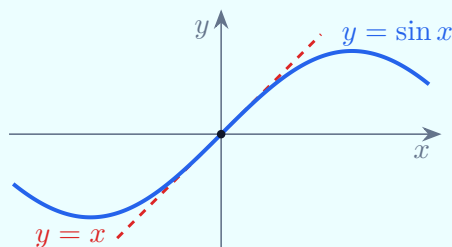
ומאיפה בא הקבוע? מהגבול החשוב. בהוכחה 1 של הגבול, שטח הגזרה של זווית h רדיאנים היה $\frac{h}{2}$. בזווית h מעלות הגזרה היא $\frac{h}{360}$ מהעיגול, ושטחה $\frac{\pi h}{360}$. לכן במקום $\sin h < h < \tan h$ היינו מקבלים את אי-השוויון $\sin(h^\circ) < \frac{\pi h}{180} < \tan(h^\circ)$, ובסוף את הגבול $\frac{\sin(h^\circ)}{h} \rightarrow \frac{\pi}{180}$. הרדיאן הוא היחידה "הטבעית": בה, ורק בה, אורך הקשת במעגל היחידה שווה לגודל הזווית.

7 מה עושים עם הנגזרות?

כל הנגזרות שהוכחנו במבט אחד, יחד עם הצורה שנותן כלל השרשרת כשבתוך הסינוס או הקוסינוס יש ביטוי ליניארי:

הפונקציה	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
הנגזרת	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$a \cos(ax+b)$	$-a \sin(ax+b)$

וכל השורה השנייה נכונה רק כש- x נמדד ברדיאנים.



סרטוט 7: ליד הראשית הגרף של $\sin x$ כמעט צמוד למשיק $y = x$.

דוגמה 1: המשיק בראשית, ו- $\sin x \approx x$

הגרף של $y = \sin x$ עובר בראשית, והשיפוע שלו שם הוא $\cos 0 = 1$. לכן המשיק בראשית הוא הישר $y = x$. ליד הראשית הגרף כמעט צמוד למשיק, ולכן לזוויות קטנות, **ברדיאנים**, $\sin x \approx x$. למשל $\sin 0.1 = 0.0998 \dots$, והשגיאה קטנה מ-0.2%. בפזיקה זה "קירוב הזווית הקטנה": כשמטוטלת מתנדנדת בזוויות קטנות, מחליפים את $\sin \theta$ ב- θ , ומשוואת התנועה נעשית פשוטה הרבה יותר.

דוגמה 2: כלל השרשרת ונגזרת שנייה

א. $u = 3x$ והפנימית היא $\sin u$, הפונקציה החיצונית היא $\sin u$, $(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot 3 = 3 \cos 3x$.
ב. $(\sin^2 x)' = ((\sin x)^2)' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$. כאן הפונקציה החיצונית היא u^2 , והפנימית היא $u = \sin x$. בשוויון האחרון השתמשנו בזהות $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.
ג. $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$, וגם $(\cos x)'' = -\cos x$. כלומר, הנגזרת השנייה של כל אחת משתי הפונקציות היא הנגזרת שלה. בפיזיקה זאת התכונה של **תנועה הרמונית**: לגוף שתלוי על קפיץ יש תאוצה שכייונה הפוך להעתק שלו וגודלה פרופורציוני לו. הפונקציה $y(t) = A \sin(\omega t)$ מקיימת בדיוק את זה: לפי כלל השרשרת $y''(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 y(t)$. לכן תנודות של קפיץ מתוארות בעזרת סינוס.

דוגמה 3: הערך הגדול ביותר של $\sin x + \cos x$

נמצא את הערך הגדול ביותר של $f(x) = \sin x + \cos x$. הפונקציה מחזורית, $f(x + 2\pi) = f(x)$, ולכן מספיק לבדוק את התחום $0 \leq x \leq 2\pi$. הנגזרת היא $f'(x) = \cos x - \sin x$, והיא מתאפסת כאשר $\sin x = \cos x$, כלומר $\tan x = 1$ (אם $\cos x = 0$ אז $\sin x = \pm 1$, והנגזרת אינה 0). בתחום יש שני פתרונות: $x = \frac{\pi}{4}$ ו- $x = \frac{5\pi}{4}$. נשווה את הערכים: $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ ו- $f(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$. ובקצוות התחום $f(0) = f(2\pi) = 1$. לכן הערך הגדול ביותר הוא $\sqrt{2} \approx 1.41$, והוא מתקבל ב- $x = \frac{\pi}{4}$ (והערך הקטן ביותר הוא $-\sqrt{2}$).

טעויות נפוצות

- מעלות בחשבון דיפרנציאלי.** הנוסחה $(\sin x)' = \cos x$ נכונה רק כש- x נמדד ברדיאנים. במחשבון – מצב RAD.
- שכחת הנגזרת הפנימית.** $(\sin 2x)' \neq \cos 2x$. לפי כלל השרשרת $(\sin 2x)' = 2 \cos 2x$.
- הגבול במעלות.** $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$ רק ברדיאנים. אם h נמדד במעלות, $\frac{\sin(h^\circ)}{h} \rightarrow \frac{\pi}{180} \approx 0.01745$.
- הסימן של $(\cos x)'$.** הנגזרת היא $-\sin x$, ולא $\sin x$. בדיקה מהירה: ב- $x = \frac{\pi}{2}$ הגרף של $\cos x$ יורד, ואכן $-\sin \frac{\pi}{2} = -1$.
- לעומת $\sin^2 x$.** לפי כלל השרשרת $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$, אבל $(\sin(x^2))' = 2x \cos(x^2)$.

הידעתם?

את ההנחות שהוכחה 2 של הגבול נשענת עליהן ניסח כבר ארכימדס (המאה ה-3 לפני הספירה), בפתח ספרו "על הכדור והגליל": מכל הקווים שיש להם אותם קצוות, הקו הישר הוא הקצר ביותר; ומבין שני קווים שמתעקמים לאותו צד ויש להם אותם קצוות, הקו הפנימי קצר יותר. בעזרת שתי ההנחות האלה הראה ארכימדס שהיקף המעגל גדול מההיקף של מצולע חסום בו, וקטן מההיקף של מצולע חוסם אותו. את הרדיאן כיחידת מידה לזוויות מייחסים בדרך כלל לרוג'ר קוטס (1682–1716), מתמטיקאי אנגלי שערך את המהדורה השנייה של ה"פרינקיפיה" של ניוטון. בספרו של לאונרד אוילר "מבוא לאנליזה של האינסוף" (1748) הסינוס והקוסינוס כבר מופיעים כפונקציות שנובעות ממעגל היחידה. אבל השם "רדיאן" הופיע בדפוס לראשונה רק ב-1873, בשאלות בחינה שחיבר ג'יימס תומסון, אחיו של הפיזיקאי לורד קלווין, בקווינס קולג' שבבלפסט. לפני שהשם התפשט, קראו ליחידה הזאת בדרך כלל "המידה המעגלית" של הזווית.

8 בדקו את עצמכם

שש שאלות ✓

1. חשבו את $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 3h}{h}$.
2. גזרו את $f(x) = \sin x \cos x$ בשתי דרכים: בכלל המכפלה, ובעזרת הזהות $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$. האם התשובות שוות?
3. מה השיפוע של המשיק לגרף של $y = \tan x$ בנקודה $x = 0$? ונקודה $x = \frac{\pi}{4}$?
4. גזרו את $\cos^2 x$, והראו שהנגזרת של $\sin^2 x + \cos^2 x$ היא 0. למה זה לא מפתיע?
5. בעזרת הסרטוט של הוכחה 2 לנגזרת של $\sin x$ (המיתר במעגל), הראו ש- $\cos(x + h) - \cos x = -2 \sin \frac{h}{2} \sin(x + \frac{h}{2})$. והסיקו ש- $(\cos x)' = -\sin x$.
6. שאלת "עצרו ובדקו": באיזה צעד של הוכחה 1 של הגבול השתמשנו ברדיאנים, ומה היה משתנה במעלות?

תשובות

1. $\frac{\sin 3h}{h} = 3 \cdot \frac{\sin 3h}{3h}$. כש- $h \rightarrow 0$ גם $3h \rightarrow 0$, ולכן השבר $\frac{\sin 3h}{3h}$ שואף ל-1, והגבול הוא 3.
2. בכלל המכפלה: $(\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)' = \cos^2 x - \sin^2 x$. בדרך השנייה: $(\frac{1}{2} \sin 2x)' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 2x = \cos 2x$. כי $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. התשובות שוות.
3. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. ב- $x = 0$ השיפוע הוא $\frac{1}{1} = 1$, והמשיק הוא $y = x$, כמו אצל $\sin x$. ב- $x = \frac{\pi}{4}$ מתקיים $\cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$, ולכן השיפוע הוא 2.
4. $(\cos^2 x)' = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x$, ומדוגמה 2 ידוע ש- $(\sin^2 x)' = \sin 2x$. לכן הנגזרת של הסכום היא 0. זה לא מפתיע: $\sin^2 x + \cos^2 x$ היא הפונקציה הקבועה 1, והנגזרת של פונקציה קבועה היא 0.
5. לאורך קטע שאורכו L בזווית φ זזים ימינה $L \cos \varphi$. לכן ההפרש בשיעורי ה- x הוא $PQ \cdot \cos(x + \frac{h}{2} + \frac{\pi}{2}) = 2 \sin \frac{h}{2} \cdot (-\sin(x + \frac{h}{2}))$. לפי הזהות $\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\sin \varphi$. נחלק ב- h ונקבל $-\sin(x + \frac{h}{2}) \cdot \frac{\sin(h/2)}{h/2}$. כש- $h \rightarrow 0$ הגורם השני שואף ל-1, והראשון ל- $-\sin x$ (מאותה סיבה כמו בקוסינוס: הפרש אנכי אינו גדול מהמרחק). לכן $(\cos x)' = -\sin x$.
6. בצעד 2: שטח הגזרה הוא $\frac{h}{2}$ רק כש- h ברדיאנים. במעלות הוא $\frac{\pi h}{360}$, ובסוף היינו מקבלים $\frac{\pi}{180} \rightarrow \frac{\sin(h^\circ)}{h}$ במקום 1.