האסימפטוטות של ההיפרבולה

ישרים שההיפרבולה מתקרבת אליהם בלי סוף ולא נוגעת בהם לעולם – שלוש הוכחות וטריק אחד

כיתה י״ב | 5 יח״ל | מקומות גאומטריים | 3 הוכחות | כ־24 דקות קריאה

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: למה רחוק מהמרכז ה־1 שבמשוואה כמעט לא משנה.
- הוכחה 1: הפרש ריבועים — ״המכפלה שווה ל־1״.
- הוכחה 2: מבודדים את y וכופלים בביטוי הצמוד.
- הוכחה 3: ישירות מההגדרה — כמה רחוק צריך ללכת כדי שהפער יהיה קטן מ־0.01?
- להעמקה: אותה זהות בשפת הזוויות (הצגה פרמטרית).
- המלבן, היפרבולות אחרות, שימושים ושאלות לבדיקה עצמית.

מה כדאי לדעת קודם

- משוואת ההיפרבולה, והקשר $c^2 = a^2 + b^2$.
- הפרש ריבועים: $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$.
- שיפוע של ישר, ומרחק של נקודה מישר.
- לסעיף ההעמקה: סינוס, קוסינוס וטנגנס, והזהות $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

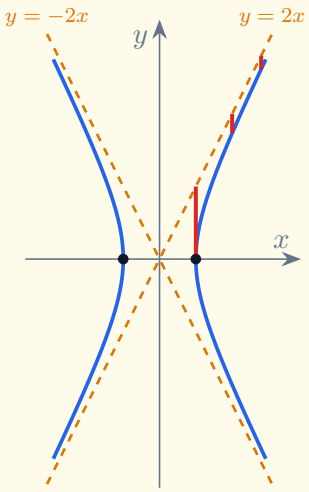
1 האינטואיציה: רחוק מהמרכז, ה־1 כמעט לא משנה

האינטואיציה

קחו את ההיפרבולה $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ ושנו בה פרט אחד קטן: במקום 1 כתבו 0. מתקבלת המשוואה $x^2 - \frac{y^2}{4} = 0$, כלומר $y^2 = 4x^2$, ולכן $y = 2x$ או $y = -2x$: שני ישרים שעוברים דרך הראשית.

ליד הראשית שתי המשוואות שונות מאוד. הנקודה $(1, 0)$, למשל, נמצאת על ההיפרבולה ולא על הישרים. אבל רחוק מהמרכז x^2 ו־$\frac{y^2}{4}$ הם מספרים ענקיים, וההפרש 1 ביניהם הוא כמו שקל אחד בחשבון של מיליון שקלים. למשל, כש־$x = 1000$ מקבלים $\frac{y^2}{4} = 999{,}999$ במקום מיליון, ולכן y קטן מ־2000 רק בכאלפית.

לכן רחוק מהמרכז ההיפרבולה **נצמדת** לשני הישרים. אבל ה־1 לא נעלם לגמרי: בגללו ההפרש אף פעם אינו 0, והעקומה לעולם לא נוגעת בישרים. הישרים האלה נקראים **האסימפטוטות** של ההיפרבולה.



סרטוט 1: $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ והאסימפטוטות שלה. באדום: הפערים האנכיים, שהולכים ומתכווצים.

דוגמה מספרית קטנה

ברביע הראשון ההיפרבולה היא הגרף של $y = 2\sqrt{x^2-1}$ (עבור $x \geq 1$). נשווה אותו לישר $y = 2x$ באותם ערכים של x:

x	1	2	10	100	1000
הישר $2x$	2	4	20	200	2000
העקומה $2\sqrt{x^2-1}$	0	≈ 3.46	≈ 19.90	≈ 199.99	≈ 1999.999
הפער	2	≈ 0.54	≈ 0.10	≈ 0.01	≈ 0.001

מ־$x = 10$ והלאה, בכל פעם ש־x גדל פי 10, הפער קטן כמעט פי 10: הוא קצת יותר מ־$\frac{1}{x}$. בהמשך נוכיח שהוא אכן שואף ל־0 — ושהוא אף פעם לא מגיע ל־0.

2 ההגדרה והמשפט

אסימפטוטה של עקומה היא ישר שהעקומה מתקרבת אליו ככל שרוצים כשמתרחקים לאורכה. במדויק: כשהנקודה P נעה לאורך **חלק מסוים** של העקומה ומתרחקת מהראשית בלי גבול, המרחק מ־P לישר שואף ל־0.

פער אנכי במקום מרחק. את המרחק מנקודה לישר מודדים לאורך האנך, וזה לא תמיד נוח. קל יותר למדוד את **הפער האנכי**: ההפרש בין ערכי ה־y של הישר ושל העקומה, באותו x. אם Q היא הנקודה של הישר שמעל P ו־H היא עקב האנך מ־P לישר, אז PQ הוא היתר במשולש ישר־הזווית PHQ, ולכן הוא גדול מ־PH (ראו סרטוט 3 בהוכחה 2). כלומר: אם הפער האנכי שואף ל־0, גם המרחק שואף ל־0.

נשתמש בסימונים של המסמך "משוואת ההיפרבולה": ההיפרבולה היא $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (כאשר a ו־b חיוביים), הקודקודים שלה הם $(\pm a, 0)$, המוקדים הם $F_1(c,0)$ ו־$F_2(-c,0)$. כזכור, $c^2 = a^2 + b^2$.

האסימפטוטות של ההיפרבולה

להיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ יש שתי אסימפטוטות:

$$\boxed{y = \pm\frac{b}{a}\,x}$$

בנוסף, ההיפרבולה **לא נוגעת** באף אחת מהן, וכל נקודה שלה מקיימת $|y| < \frac{b}{a}|x|$.

במילים: האסימפטוטות עוברות דרך מרכז ההיפרבולה, והשיפועים שלהן הם $\frac{b}{a}$ ו־$-\frac{b}{a}$.

טריק לזכירה: מחליפים את ה־1 ב־0. המשוואה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ מתפרקת ל־$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$, ונותנת בדיוק את שני הישרים $y = \frac{b}{a}x$ ו־$y = -\frac{b}{a}x$.

שתי התכונות האחרונות במשפט נובעות מיד מהמשוואה. נבודד: $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 < \frac{x^2}{a^2}$, ולכן $y^2 < \frac{b^2}{a^2}\,x^2$, כלומר $|y| < \frac{b}{a}|x|$. לעומת זאת, כל נקודה של אסימפטוטה מקיימת $|y| = \frac{b}{a}|x|$ בדיוק. לכן להיפרבולה ולאסימפטוטות אין אף נקודה משותפת.

מספיק להוכיח ברביע הראשון. במשוואה מופיעים רק x^2 ו־y^2, ולכן ההיפרבולה סימטרית ביחס לשני הצירים. לישר $y = \frac{b}{a}x$ מתקרבים החלקים שברביע הראשון ובשלישי, ולישר $y = -\frac{b}{a}x$ — החלקים שברביע השני וברביעי. בגלל

הסימטריה, מה שנוכיח לחלק שברביע הראשון ולישר $y=\frac{b}{a}x$ נכון גם לשאר החלקים. לכן בכל ההוכחות נסתכל על נקודה $P(x,y)$ של ההיפרבולה עם $x\geq a$ ו־$y\geq 0$. ברביע הזה "P מתרחקת בלי גבול" פירושו פשוט ש־x גדל בלי גבול. מצד אחד $OP\geq x$. מצד שני, בעזרת $y<\frac{b}{a}x$ מקבלים $OP^2<x^2+\frac{b^2}{a^2}x^2=\frac{c^2}{a^2}x^2$, כלומר $OP<\frac{c}{a}\,x$. לכן OP גדל בלי גבול בדיוק כש־x גדל בלי גבול.

3 הוכחה 1: הפרש ריבועים – "המכפלה שווה ל־1"

הרעיון אגף שמאל של משוואת ההיפרבולה הוא הפרש ריבועים, ולכן אפשר לכתוב אותו כמכפלה של שני גורמים:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1.$$

זה כמו מלבן ששטחו 1: אם צלע אחת ארוכה מאוד, הצלע השנייה חייבת להיות קצרה מאוד. כשמתרחקים על הענף, הגורם השני גדל בלי גבול, ולכן הגורם הראשון מתכווץ ל־0. והגורם הראשון, אחרי כפל ב־b, הוא בדיוק הפער שאנחנו מחפשים: $b\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\frac{b}{a}x-y$.

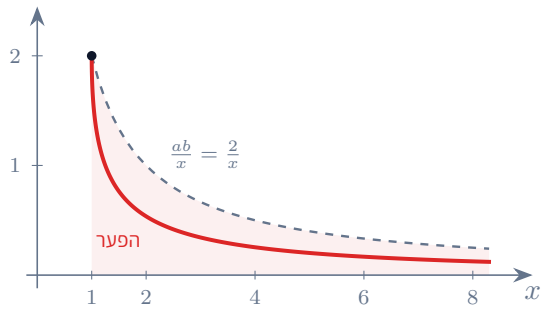
נסתכל על נקודה $P(x,y)$ של ההיפרבולה, עם $x\geq a$ ו־$y\geq 0$.

	טענה	נימוק
1	$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1$	P על ההיפרבולה, והפרש ריבועים
2	$0<\frac{x}{a}\leq\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$	כי $y\geq 0$ ו־$x\geq a>0$
3	$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$	מחלקים את צעד 1 בגורם השני. מותר, כי הוא חיובי
4	$0<\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\leq\frac{a}{x}$	המכנה בצעד 3 הוא לפחות $\frac{x}{a}$ (צעד 2), ולכן השבר חיובי ולכל היותר $\frac{a}{x}$
5	$0<\frac{b}{a}x-y\leq\frac{ab}{x}$	כופלים ב־$b>0$
6	הפער $\frac{b}{a}x-y$ שואף ל־0	הוא "כלוא" בין 0 לבין $\frac{ab}{x}$, ו־$\frac{ab}{x}$ שואף ל־0 כש־x גדל

מש"ל

מה עוד קיבלנו בדרך?

- **הפער חיובי** (צעד 5). לכן ברביע הראשון העקומה נמצאת **מתחת** לאסימפטוטה, ואף פעם לא נוגעת בה.
- **הערכה מספרית:** הפער הוא לכל היותר $\frac{ab}{x}$. למשל, בהיפרבולה מסעיף 1 ($a=1$ ו־$b=2$) ההערכה מבטיחה שב־$x=100$ הפער לכל היותר $\frac{2}{100}=0.02$. הפער האמיתי, לפי הטבלה, הוא כ־0.01.
- **במה השתמשנו?** רק בפירוק לגורמים ובאי־שוויונות פשוטים. לא היה צורך לבודד את y, ולא הופיעו שורשים בכלל.



סרטוט 2: הפער (באדום) כלוא מתחת לגרף של $\frac{ab}{x}$. כאן $a=1$ ו־$b=2$.

עצרו ובדקו

בצעד 4 מופיע הסימן $\leq$. בנקודה אחת בדיוק של הענף מתקיים שם שוויון. באיזו נקודה, ומה הפער בה?

4 הוכחה 2: מבודדים את y וכופלים בביטוי הצמוד

הרעיון ברביע הראשון ההיפרבולה היא גרף של פונקציה, ולכן לפער האנכי יש נוסחה מפורשת. אבל זה הפרש של שני מספרים גדולים וכמעט שווים, וקשה לראות כמה הוא קטן. הטריק: כפל בביטוי הצמוד הופך את ההפרש לשבר עם מונה קבוע. (החישוב הזה הופיע בקצרה במסמך "משוואת ההיפרבולה". כאן נשלים את הפרטים, ונחשב גם את המרחק האמיתי.)

	טענה	נימוק
1	$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$	מבודדים: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right)$, וברביע הראשון $y \geq 0$
2	$g(x) = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)$	הפער האנכי בין הישר לעקומה
3	$g(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$	כופלים ומחלקים בביטוי הצמוד, שהוא חיובי
4	$g(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$	הפרש ריבועים במונה, $x^2 - \left(x^2 - a^2\right) = a^2$, וצמצום
5	$g(x)$ שואף ל־0	המונה ab קבוע, והמכנה גדל בלי גבול (הוא לפחות x)

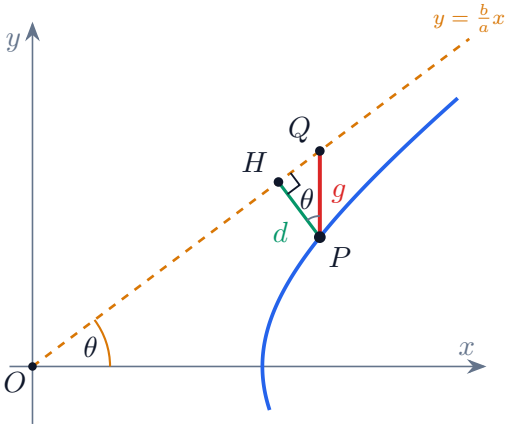
מש"ל

גם כאן הפער **חיובי**, והוא לכל היותר $\frac{ab}{x}$, כי המכנה בצעד 4 הוא לפחות x — בדיוק כמו בהוכחה 1. זה לא מקרה: לפי צעד 1, $\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{a}{b}y$, ולכן המכנה הוא $a\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$, כלומר a כפול הגורם השני של הוכחה 1. בעצם שתי ההוכחות נשענות על **אותה זהות**, "המכפלה שווה ל־1", בשתי שפות שונות. מה שהוכחה 2 מוסיפה הוא נוסחה **מדויקת** לפער, ולא רק הערכה.

מהפער האנכי אל המרחק האמיתי. נכתוב את האסימפטוטה $y = \frac{b}{a}x$ בצורה $bx - ay = 0$. לפי נוסחת המרחק של נקודה מישר, המרחק מ־$P(x, y)$ לאסימפטוטה הוא

$$d = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{a\left(\frac{b}{a}x - y\right)}{c} = \frac{a}{c} \cdot g(x).$$

את הערך המוחלט הורדנו כי $\frac{b}{a}x - y > 0$, ובמכנה $\sqrt{a^2 + b^2} = c$.



סרטוט 3: הפער $g = PQ$ והמרחק $d = PH$. כאן $a = 4$ ו־$b = 3$.

ובמבט גאומטרי: PQ מאונך לציר ה־x, ו־PH מאונך לאסימפטוטה. לכן הזווית שבין PQ ל־PH שווה לזווית θ שבין ציר ה־x לאסימפטוטה (הזווית בין שני ישרים שווה לזווית בין האנכים להם). במשולש ישר־הזווית PHQ מקבלים $d = PQ \cdot \cos\theta = g\cos\theta$, ובנוסף $\cos\theta = \frac{a}{c}$, כי האסימפטוטה עוברת דרך הנקודה (a, b), שהמרחק שלה מהראשית הוא c.

דוגמה מספרית

בהיפרבולה $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ מתקיים $a = 4$ ו־$b = 3$, ולכן $c = 5$ ו־$\frac{a}{c} = 0.8$. לפי צעד 4, $g(x) = \frac{12}{x + \sqrt{x^2 - 16}}$:

x	100	20	8	5	4
הפער האנכי g	≈ 0.060	≈ 0.30	≈ 0.80	1.5	3
המרחק $d = 0.8g$	≈ 0.048	≈ 0.24	≈ 0.64	1.2	2.4
החסם $\frac{12}{x}$	0.12	0.6	1.5	2.4	3

העמודה של $x = 5$ היא הנקודה $P\left(5, \frac{9}{4}\right)$ שבסרטוט 3: שם $g = PQ = 1.5$ ו־$d = PH = 1.2$. בכל עמודה d קטן מ־g, ושניהם שואפים ל־0 יחד.

5 להעמקה: אותה זהות, בשפת הזוויות

הרעיון באליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ נקודה כללית היא $(a\cos t,\ b\sin t)$, כי $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. בהיפרבולה יש **מינוס** בין השברים, ולכן צריך זהות עם מינוס:

$$\frac{1}{\cos^2 t} - \tan^2 t = \frac{1 - \sin^2 t}{\cos^2 t} = 1.$$

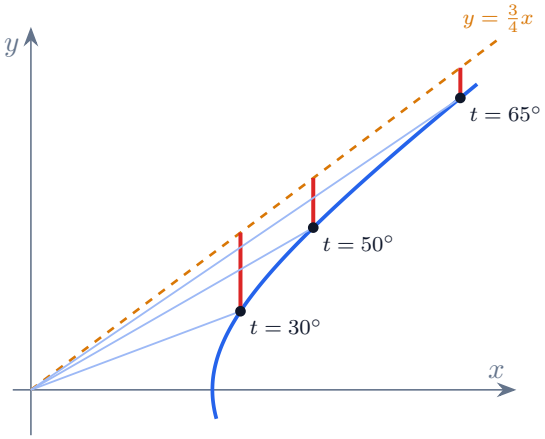
לכן לכל זווית $0° \le t < 90°$ הנקודה

$$P_t = \left(\frac{a}{\cos t},\ b\tan t\right)$$

נמצאת על ההיפרבולה. כש־t גדלה לכיוון $90°$, הקוסינוס $\cos t$ יורד מ־1 לכיוון 0, ולכן $x = \frac{a}{\cos t}$ גדל מ־a בלי גבול: הנקודות P_t עוברות על כל החלק של הענף שברביע הראשון. את הפער האנכי ב־P_t נכפול ונחלק ב־$1 + \sin t$:

$$\frac{b}{a}x - y = \frac{b\,(1 - \sin t)}{\cos t} = \frac{b\cos t}{1 + \sin t}.$$

כש־t מתקרבת ל־$90°$, המונה שואף ל־0 והמכנה ל־2, ולכן הפער שואף ל־0.



סרטוט 4: הנקודות P_t ב־$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. הקרניים OP_t מסתובבות לעבר האסימפטוטה, והפערים (באדום) מתכווצים. שימו לב: t אינה הזווית של OP_t.

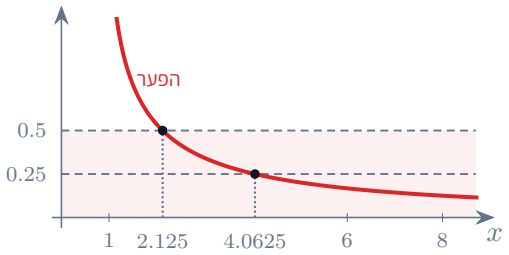
זו לא הוכחה חדשה באמת. ב־P_t מתקיים $\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b} = \frac{1 \mp \sin t}{\cos t}$, והמכפלה של שני הביטויים היא 1: שוב $\frac{1 - \sin^2 t}{\cos^2 t} = 1$. "המכפלה שווה ל־1" של הוכחה 1, והכפל ב־$1 + \sin t$ הוא הכפל בצמוד של הוכחה 2. מה שההצגה הפרמטרית מוסיפה הוא הקשר לאליפסה, ותמונה של הקרן OP_t: השיפוע שלה, $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\sin t$, שואף ל־$\frac{b}{a}$, כלומר הקרן "מסתובבת" לעבר האסימפטוטה (סרטוט 4). אבל זה לבד לא מספיק: גם על הישר $y = \frac{b}{a}x + 1$ היחס $\frac{y}{x}$ שואף ל־$\frac{b}{a}$, ובכל זאת הישר הזה נשאר כל הזמן באותו מרחק מהאסימפטוטה. מה שקובע הוא הפער עצמו.

6 הוכחה 3: ישירות מההגדרה – כמה רחוק צריך ללכת?

הרעיון הפעם בלי פירוק ובלי ביטוי צמוד: נעבוד ישירות לפי ההגדרה.

"הפער שואף ל־0" פירושו שלכל מספר חיובי ε ("אפסילון"), קטן ככל שיהיה, יש **סף** X_ε, שמעבר לו הפער קטן מ־ε. בסרטוט 5 רואים את זה בגרף של הפער: מעבר לסף, הגרף כולו מתחת לקו שבגובה ε. ככל ש־ε קטן יותר, הסף רחוק יותר — אבל הוא תמיד קיים.

כדי למצוא את הסף במפורש, נשאל את השאלה ההפוכה: איפה הפער יכול להיות ε או יותר?



סרטוט 5: הפער ב־$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$. עבור $\varepsilon = 0.5$ הסף הוא $X_\varepsilon = 2.125$, ועבור $\varepsilon = 0.25$ הוא $X_\varepsilon = 4.0625$.

נסתכל על נקודה $P(x, y)$ של ההיפרבולה, עם $x \geq a$ ו־$y \geq 0$, ונניח שהפער בה הוא לפחות ε.

	טענה	נימוק
1	$0 \leq y \leq \frac{b}{a}x - \varepsilon$	ההנחה היא $\frac{b}{a}x - y \geq \varepsilon$. בנוסף $y \geq 0$, כי אנחנו ברביע הראשון
2	$y^2 \leq \frac{b^2}{a^2}x^2 - \frac{2b\varepsilon}{a}x + \varepsilon^2$	מעלים בריבוע. מותר, כי שני האגפים אינם שליליים
3	$\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2 \leq \frac{b^2}{a^2}x^2 - \frac{2b\varepsilon}{a}x + \varepsilon^2$	P על ההיפרבולה, ולכן $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right) = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$
4	$\frac{2b\varepsilon}{a}x \leq b^2 + \varepsilon^2$	האיבר $\frac{b^2}{a^2}x^2$ מתבטל, ומעבירים אגפים
5	$x \leq \frac{a\left(b^2 + \varepsilon^2\right)}{2b\varepsilon}$	מחלקים ב־$\frac{2b\varepsilon}{a}$, שהוא חיובי. כלומר: פער של ε או יותר אפשרי רק עד x הזה
6	הפער שואף ל־0	לפי צעד 5, מעבר לסף $X_\varepsilon = \frac{a(b^2+\varepsilon^2)}{2b\varepsilon}$ הפער קטן מ־ε. סף כזה קיים לכל $\varepsilon > 0$, וזו בדיוק ההגדרה של "שואף ל־0"

מש"ל ■

בדיקה מול הטבלה שבסעיף 1. שם $a = 1$ ו־$b = 2$, כמו בסרטוט 5. עבור $\varepsilon = 0.01$ הסף הוא

$$X_{0.01} = \frac{1 \cdot (4 + 0.0001)}{2 \cdot 2 \cdot 0.01} = \frac{4.0001}{0.04} = 100.0025.$$

מעבר לסף הפער קטן מ־0.01: בטבלה, ב־$x = 1000$ הוא כ־0.001. ב־$x = 100$, מעט לפני הסף, הטבלה מראה כ־0.01, ובחישוב מדויק יותר הפער שם הוא כ־0.01000025 — עדיין קצת יותר מ־0.01. הסף אפילו מדויק: ב־$x = 100.0025$ מקבלים $y = 199.995$, ולכן הפער שם הוא 0.01 בדיוק. גם הספים שבסרטוט 5 מתקבלים מאותה נוסחה.

7 שלוש ההוכחות זו מול זו

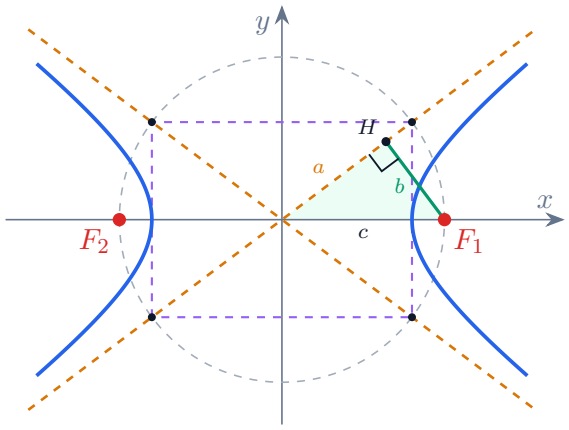
	הוכחה 1: הפרש ריבועים	הוכחה 2: ביטוי צמוד	הוכחה 3: ישירות מההגדרה
הרעיון	מכפלה שווה ל־1: גורם אחד גדל, ולכן השני קטן	נוסחה מפורשת לפער האנכי	מניחים שהפער לפחות ε, ומגלים עד איפה זה אפשרי
הכלים	פירוק לגורמים ואי־שוויונות	בידוד y וכפל בצמוד	העלאה בריבוע ואי־שוויון פשוט
על מה נשענת	המכפלה של $\frac{y}{b}-\frac{x}{a}$ ו־$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ שווה ל־1	אותה מכפלה, בתור כפל בצמוד	רק משוואת ההיפרבולה וההגדרה של "שואף ל־0"
מה מקבלים בדרך	חסם: הפער לכל היותר $\frac{ab}{x}$	נוסחה מדויקת לפער ולמרחק	הסף המדויק שממנו הפער קטן מ־ε
היתרון	בלי שורשים ובלי לבודד את y	ישירה ומדויקת	עונה ישירות על השאלה שבהגדרה

8 המלבן של האסימפטוטות – ומה אפשר ללמוד ממנו

נסרטט מלבן שקודקודיו $(\pm a,\pm b)$. הקודקוד (a,b) מקיים $b=\frac{b}{a}\cdot a$, ולכן הוא על האסימפטוטה $y=\frac{b}{a}x$, וכך גם $(-a,-b)$. כלומר האלכסונים של המלבן מונחים על האסימפטוטות — וזאת הדרך הנוחה ביותר לסרטט אותן. אבל למלבן יש עוד כמה סודות:

- **המעגל של המוקדים.** חצי האלכסון של המלבן הוא $c=\sqrt{a^2+b^2}$. לכן המעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו c עובר דרך ארבעת קודקודי המלבן **וגם** דרך שני המוקדים.
- **מהמוקד לאסימפטוטה — בדיוק b.** נציב את $F_1(c,0)$ בנוסחת המרחק מהישר $bx-ay=0$:

$$d=\frac{|b\cdot c-a\cdot 0|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{bc}{c}=b.$$



סרטוט 6: המלבן, המעגל שעובר במוקדים, והמרחק $HF_1=b$.

שוב אותו משולש. נסמן ב־H את עקב האנך מ־F_1 לאסימפטוטה. במשולש ישר־הזווית OHF_1 היתר הוא $OF_1=c$, והניצב HF_1 שווה ל־b. לפי משפט פיתגורס, הניצב השני הוא $OH=\sqrt{c^2-b^2}=a$. כלומר למשולש OHF_1 יש אותן צלעות a, b ו־c כמו למשולש שקודקודיו הם הראשית, הנקודה $(a,0)$ והקודקוד (a,b) של המלבן — רק במיקום אחר.

הזווית של האסימפטוטה והאקסצנטריות. נסמן ב־θ את הזווית שבין האסימפטוטה $y=\frac{b}{a}x$ לבין ציר ה־x. מהמשולש שבמלבן, $\tan\theta=\frac{b}{a}$ ו־$\cos\theta=\frac{a}{c}$. לכן האקסצנטריות $e=\frac{c}{a}$ (ראו את המסמך "משוואת ההיפרבולה") נקבעת כולה לפי הזווית:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\cos\theta}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}.$$

למשל, כששיפוע האסימפטוטה הוא $\frac{3}{4}$, מקבלים $e = \sqrt{1+\frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$. ככל שהאסימפטוטות תלולות יותר, הענפים "פתוחים" יותר, ו־e גדולה יותר.

9 אותו טריק, היפרבולות אחרות

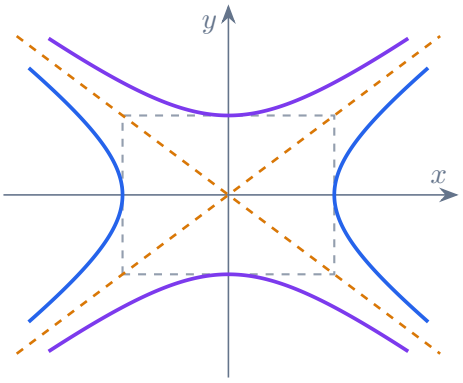
הטריק "מחליפים את ה־1 ב־0" עובד גם כשבאגף ימין אין 1. למשל, ב־$9x^2 - 16y^2 = 144$ אין צורך לחלק קודם ב־144: מחליפים את 144 ב־0, ומקבלים $9x^2 = 16y^2$, כלומר $y = \pm\frac{3}{4}x$. ואכן, אחרי חלוקה ב־144 זאת ההיפרבולה $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, שבה $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$. (אבל אם יש במשוואה איברים ממעלה ראשונה, כמו $-8x$, צריך קודם להשלים לריבוע — ראו "היפרבולה שהמרכז שלה אינו בראשית".)

הטריק מתאים גם להיפרבולות שאינן בצורה שבמשפט, כי ההוכחות שלנו נשארות נכונות גם אחרי החלפת התפקידים של x ו־y (שיקוף בישר $y = x$), וגם אחרי הזזה של כל הסרטוט.

היפרבולה "עומדת", והיפרבולות צמודות

בהיפרבולה $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ המוקדים נמצאים על ציר ה־y, והענפים נפתחים למעלה ולמטה. הטריק נותן $\frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{16}$, ולכן $y = \pm\frac{3}{4}x$.

שימו לב: אלה בדיוק האסימפטוטות של $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, ההיפרבולה "השוכבת" שליוותה אותנו לאורך המסמך. לשתי ההיפרבולות יש אותו מלבן ואותן אסימפטוטות, אבל אחת נפתחת ימינה ושמאלה, והשנייה למעלה ולמטה. שתי היפרבולות כאלה נקראות **היפרבולות צמודות** (conjugate hyperbolas).



סרטוט 7: בכחול $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, ובסגול $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$. אותו מלבן, אותן אסימפטוטות.

היפרבולה שהמרכז שלה אינו בראשית

בהיפרבולה $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ המרכז הוא $(1,-2)$: זאת ההיפרבולה $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ אחרי הזזה. הטריק נותן $\frac{(x-1)^2}{4} = \frac{(y+2)^2}{9}$, כלומר $y + 2 = \pm\frac{3}{2}(x-1)$. אלה הישרים $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$ ו־$y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$. האסימפטוטות עוברות דרך **המרכז** $(1,-2)$, ולא דרך הראשית — ההזזה מזיזה גם אותן.

זהירות: קודם משלימים לריבוע. הטריק עובד רק כשהמשוואה כתובה סביב המרכז, כמו כאן. למשל, $4x^2 - y^2 - 8x = 12$ היא $4(x-1)^2 - y^2 = 16$, ולכן האסימפטוטות שלה הן $y = \pm 2(x-1)$. "0 במקום 12" במשוואה המקורית נותן $4x^2 - y^2 - 8x = 0$, וזו בכלל לא משוואה של זוג ישרים.

היפרבולה שוות־שוקיים

כש־$b = a$ המלבן הוא ריבוע, והמשוואה היא $x^2 - y^2 = a^2$. האסימפטוטות הן $y = x$ ו־$y = -x$, והן **מאונכות** זו לזו (מכפלת השיפועים היא -1). היפרבולה כזאת נקראת **היפרבולה שוות־שוקיים**, והאקסצנטריות שלה היא $e = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

גם $y=\frac{1}{x}$ שייכת למשפחה הזאת. נכתוב $xy=1$ ונחליף את ה־1 ב־0. מקבלים $xy=0$, כלומר $x=0$ או $y=0$ — שני הצירים. ואכן, הצירים הם האסימפטוטות של $y=\frac{1}{x}$, והם מאונכים זה לזה. זה מתאים למה שראינו במסמך "משוואת ההיפרבולה": $y=\frac{1}{x}$ היא היפרבולה שוות־שוקיים שסובבה ב־ $45°$.

10 מה עושים עם האסימפטוטות?

שימוש 1: מהאסימפטוטות אל המשוואה

האסימפטוטות של היפרבולה הן $y=2x$ ו־$y=-2x$, וההיפרבולה עוברת דרך הנקודה $(3,4)$. מצאו את משוואתה.

הישרים הם הפתרונות של $(y-2x)(y+2x)=0$, כלומר של $4x^2-y^2=0$. לכן נחפש היפרבולה מהצורה $4x^2-y^2=k$, עם $k\neq 0$. (לכל $k\neq 0$ אלה אכן האסימפטוטות. כש־$k>0$ המוקדים על ציר ה־x, וכש־$k<0$ — על ציר ה־y.) נציב את הנקודה: $k=4\cdot 9-16=20$. המשוואה היא $4x^2-y^2=20$, כלומר $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$.

בדיקה: $\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{20}{5}}=2$, והנקודה מקיימת $\frac{9}{5}-\frac{16}{20}=1.8-0.8=1$. בונוס: $c^2=5+20=25$, ולכן המוקדים הם $(\pm 5,0)$.

שימוש 2 (להעמקה): מכפלת המרחקים קבועה

הוכיחו: לכל נקודה $P(x_0,y_0)$ של ההיפרבולה, מכפלת המרחקים משתי האסימפטוטות היא $\frac{a^2b^2}{c^2}$.

האסימפטוטות הן $bx-ay=0$ ו־$bx+ay=0$. לפי נוסחת המרחק,

$$d_1\cdot d_2=\frac{|bx_0-ay_0|}{c}\cdot\frac{|bx_0+ay_0|}{c}=\frac{|b^2x_0^2-a^2y_0^2|}{c^2}=\frac{a^2b^2}{c^2},$$

כי אחרי כפל של משוואת ההיפרבולה ב־ a^2b^2 מקבלים $b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2$. בדיקה עם הנקודה $P\left(5,\frac{9}{4}\right)$ שבסרטוט 3 נותנת $d_1=\frac{|15-9|}{5}=\frac{6}{5}$ ו־$d_2=\frac{15+9}{5}=\frac{24}{5}$, והמכפלה היא $\frac{16\cdot 9}{25}=\frac{144}{25}$.

ומה זה אומר? כשמתרחקים על הענף, מרחק אחד גדל בלי גבול, ולכן השני חייב לשאוף ל־0 — זאת הוכחה 1 בשפה גאומטרית. והמכפלה אינה 0, ולכן אף מרחק אינו 0: ההיפרבולה לא נוגעת באסימפטוטות.

טעות נפוצה

- **שיפוע הפוך בהיפרבולה "עומדת".** ב־$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ האסימפטוטות הן $y=\pm\frac{3}{4}x$, ולא $y=\pm\frac{4}{3}x$. בשני המקרים (היפרבולה "שוכבת" או "עומדת") השיפוע הוא השורש של המכנה שמתחת ל־ y^2 חלקי השורש של המכנה שמתחת ל־ x^2. והטריק "0 במקום 1" נותן את התשובה הנכונה בשניהם.
- **"עקומה אף פעם לא חותכת את האסימפטוטה שלה".** זה נכון להיפרבולה, אבל לא לכל עקומה. לגרף של $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, למשל, יש אסימפטוטה $y=0$, והוא חותך אותה בראשית.
- **"גם לאליפסה יש אסימפטוטות".** האליפסה חסומה: היא לא מתרחקת בלי גבול, ולכן אין לה אסימפטוטות. ואכן, הטריק נותן $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$, שמתקיים רק בראשית.
- **בלבול בין b ל־c.** השיפוע של האסימפטוטה הוא $\frac{b}{a}$. היחס $\frac{c}{a}$ הוא האקסצנטריות.

הידעתם?

המילה "אסימפטוטה" באה מיוונית, ופירושה "לא נופלים יחד" — כלומר "לא נפגשים". המונח מופיע כבר בחיבור "חתכי חרוט" של אפולוניוס מפרגה (בסביבות 200 לפני הספירה), והספר השני של החיבור עוסק בין השאר באסימפטוטות של ההיפרבולה. השם מתאר את מה שאפולוניוס מוכיח כבר בטענה הראשונה של הספר: הישרים האלה לא פוגשים את ההיפרבולה. את התכונה שמגדירה אסימפטוטה היום הוא מוכיח בטענה 14: כשממשיכים בלי סוף את ההיפרבולה ואת האסימפטוטות, המרחק ביניהן נעשה קטן מכל מרחק נתון — בדיוק הרעיון של הוכחה 3.

ההיפרבולה הייתה שימושית עוד לפני אפולוניוס. לפי מה שמסר המפרש היווני אוטוקיוס מאשקלון (המאה ה־6 לספירה), מנכמוס (המאה ה־4 לפני הספירה) פתר את בעיית הכפלת הקובייה בעזרת חיתוך של פרבולה והיפרבולה. בסימון של היום אפשר לתאר את הרעיון כך: חותכים את הפרבולה $y = x^2$ עם ההיפרבולה $xy = 2$, שהאסימפטוטות שלה הן הצירים. בנקודת החיתוך $x \cdot x^2 = 2$, כלומר $x^3 = 2$. לכן x הוא בדיוק אורך הצלע של קובייה שנפחה כפול מנפח קובייה שצלעה 1.

11 בדקו את עצמכם

שמונה שאלות קצרות

1. מצאו את האסימפטוטות ואת המוקדים של $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.
2. מצאו את האסימפטוטות של $4y^2 - 9x^2 = 36$.
3. מצאו את האסימפטוטות של $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.
4. האסימפטוטות של היפרבולה הן $y = \pm\frac{1}{2}x$, וההיפרבולה עוברת דרך הנקודה $(4, 1)$. מצאו את משוואתה.
5. המוקדים של היפרבולה נמצאים על ציר ה־x, והאקסצנטריות שלה היא 2. מה הזווית בין שתי האסימפטוטות?
6. השאלה מתיבת "עצרו ובדקו": באיזו נקודה מתקיים שוויון בצעד 4 של הוכחה 1, ומה הפער בה?
7. הוכיחו שגם המרחק מהמוקד $F_2(-c, 0)$ לאסימפטוטה $y = \frac{b}{a}x$ הוא b.
8. בהיפרבולה $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, מעבר לאיזה x הפער קטן מ־0.3? חשבו בעזרת צעד 5 של הוכחה 3, והשוו לטבלה שבהוכחה 2.

תשובות

1. $a=6$ ו־$b=8$, ולכן האסימפטוטות הן $y=\pm\frac{8}{6}x=\pm\frac{4}{3}x$. מ־$c^2=36+64=100$ מקבלים $c=10$, והמוקדים הם $(\pm 10,0)$.
2. מחליפים את 36 ב־0 ומקבלים $4y^2=9x^2$, ולכן $y=\pm\frac{3}{2}x$. (זאת היפרבולה "עומדת": $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$.)
3. $\frac{(x+2)^2}{9}=\frac{(y-1)^2}{4}$, ולכן $y-1=\pm\frac{2}{3}(x+2)$, כלומר $y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$ ו־$y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$. שתיהן עוברות דרך המרכז $(-2,1)$.
4. כמו בשימוש 1, נחפש היפרבולה מהצורה $x^2-4y^2=k$. מהנקודה: $k=16-4=12$, ולכן $x^2-4y^2=12$, כלומר $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$. בדיקה: $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=\frac{1}{2}$.
5. $\frac{b^2}{a^2}=e^2-1=3$, ולכן השיפועים הם $\pm\sqrt{3}$, וכל אסימפטוטה יוצרת זווית של 60° עם ציר ה־x. הזווית בין האסימפטוטות היא 60°, והזווית הצמודה לה, שבתוכה נמצאים הענפים, היא 120°.
6. שוויון מתקיים רק כש־$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, כלומר כש־$y=0$. זה הקודקוד $(a,0)$, והפער בו הוא $b-0=b\cdot\frac{b}{a}$ — בדיוק $x=a$ עבור $\frac{ab}{x}$.
7. $d=\frac{|b\cdot(-c)-a\cdot 0|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{bc}{c}=b$. מטעמי סימטריה, גם המרחק מכל מוקד לאסימפטוטה $y=-\frac{b}{a}x$ הוא b.
8. $X_{0.3}=\frac{4\,(9+0.09)}{2\cdot 3\cdot 0.3}=\frac{36.36}{1.8}=20.2$. ואכן, בטבלה שבהוכחה 2, ב־$x=20$, מעט לפני הסף, הפער הוא כ־0.30 (ליתר דיוק כ־0.303), וב־$x=100$ הוא כבר כ־0.06.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את המסמך בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנו קטעים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.