המשיק לפרבולה

ארבע דרכים אל המשיק – ממיתרים שמתקצרים ועד שיקוף במראה

כיתות י'–י"ב | 5–4 יח"ל | גאומטריה אנליטית | 4 הוכחות | כ־18 דקות קריאה

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: זכוכית מגדלת על פרבולה, ומיתרים שמסתובבים אל המשיק.
- חלק א' של המשפט (4–5 יח"ל, מכיתה י'): המשיק לגרף של $y = ax^2 + bx + c$.
- חלק ב' של המשפט (5 יח"ל, כיתה י"ב): המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$.
- ארבע הוכחות: מיתרים שמתקצרים, שורש כפול, מוקד ומדריך, והחלפה בין x ל־y.
- משיקים מנקודה שמחוץ לפרבולה, בנייה בסרגל ובמחוגה, טעויות נפוצות, היסטוריה ושש שאלות לבדיקה עצמית.

מה כדאי לדעת קודם

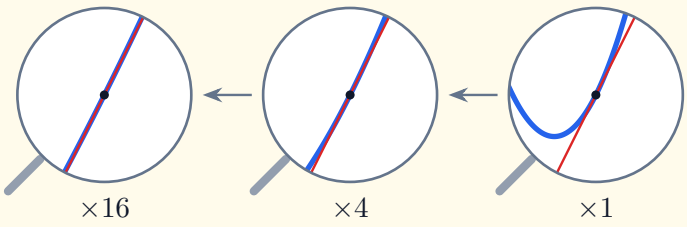
- שיפוע, ומשוואת ישר לפי נקודה ושיפוע.
- נוסחאות ויאטה: סכום הפתרונות של משוואה ריבועית.
- נוסחת המרחק בין שתי נקודות.
- לחלק ב': המוקד והמדריך של $y^2 = 2px$, מהמסמך "משוואת הפרבולה והמשיק" (מסמך 16 בסדרה).

1 האינטואיציה: זכוכית מגדלת על פרבולה

האינטואיציה

קחו זכוכית מגדלת והסתכלו דרכה על הפרבולה, סביב נקודה P שעליה. ככל שמגדילים יותר, הקשת שבתוך העדשה נראית ישרה יותר, ובסוף כמעט אי אפשר להבחין בינה לבין קו ישר. הקו הזה הוא **המשיק** לפרבולה ב־P: הישר שמתנהג כמו הפרבולה כשמסתכלים עליה מקרוב מאוד. כך גם כדור הארץ: הוא עגול, אבל מהמרפסת שלכם הוא נראה שטוח לגמרי.

יש עוד דרך לראות את המשיק. בוחרים על הפרבולה נקודה נוספת Q, ומותחים חוט מ־P אל Q — **מיתר**. עכשיו מזיזים את Q לאט לאט לעבר P: המיתר מסתובב, ולבסוף הוא "מתייצב" על ישר אחד. גם זה המשיק.



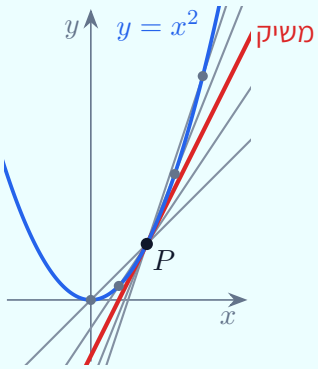
סרטוט 1: זכוכית מגדלת סביב $P(1,1)$ על הפרבולה $y = x^2$. בהגדלה פי 16, הפרבולה הכחולה והמשיק האדום כמעט מתלכדים.

דוגמה מספרית קטנה: מיתרים שמסתובבים

נבחר את הפרבולה $y = x^2$ ואת הנקודה $P(1,1)$ שעליה. לכל נקודה אחרת $Q\,(x_2, x_2^2)$ על הפרבולה, השיפוע של המיתר PQ הוא

$$m_{PQ} = \frac{x_2^2 - 1}{x_2 - 1} = \frac{(x_2-1)(x_2+1)}{x_2 - 1} = x_2 + 1.$$

בטבלה שלמטה Q מתקרבת ל־P משני הצדדים, ובסרטוט רואים את המיתרים מסתובבים אל אותו ישר.



סרטוט 2: מיתרים מ־P (באפור) "סוגרים" על המשיק (באדום).

x_2	0	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1	2
שיפוע המיתר	1	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1	3

כש־x_2 מתקרב ל־1, מלמטה ומלמעלה, שיפוע המיתר מתקרב ל־2. לכן שיפוע המשיק ב־P הוא 2, והמשיק הוא $y - 1 = 2(x-1)$, כלומר $y = 2x - 1$. בהוכחה 1 נראה שבפרבולה אפשר לחשב את הגבול הזה בדיוק, בלי טבלאות.

2 המשפט

המשיק לפרבולה

חלק א': פרבולה "עומדת". תהי $f(x) = ax^2 + bx + c$ פונקציה ריבועית ($a \neq 0$). המשיק לגרף שלה בנקודה $P\big(x_1, f(x_1)\big)$ שעליו הוא הישר

$$\boxed{y - f(x_1) = (2ax_1 + b)\,(x - x_1)}$$

כלומר שיפוע המשיק הוא $2ax_1 + b$.

חלק ב': פרבולה "שוכבת". המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$, כאשר $p > 0$, בנקודה $P(x_1, y_1)$ שעליה הוא הישר

$$\boxed{y \cdot y_1 = p\,(x + x_1)}$$

במילים: שיפוע המשיק לגרף של פונקציה ריבועית הוא $2ax_1 + b$ — הנגזרת של f ב־x_1. חלק ב' הוא אותו משפט אחרי שמחליפים את התפקידים של x ושל y.

3 מהו בדיוק משיק לפרבולה?

לפני שמוכיחים, צריך להחליט מהו בדיוק "משיק". במעגל קל להגדיר: ישר שיש לו עם המעגל נקודה משותפת אחת בלבד. בפרבולה צריך להיזהר: ישר שמקביל לציר הפרבולה פוגש אותה בנקודה אחת בלבד, ובכל זאת חוצה אותה ונכנס לתוכה (ראו את המסמך "משוואת הפרבולה והמשיק"). לכן נעבוד עם שתי הגדרות, ובהוכחות נראה ששתיהן מובילות לאותו ישר בדיוק.

- **הגדרה 1 — גבול של מיתרים.** המשיק ב־P הוא הישר שעובר דרך P ושיפועו הוא הגבול של שיפועי המיתרים PQ, כש־Q מתקרבת ל־P לאורך הפרבולה. הגבול הזה הוא בדיוק הנגזרת, לפי ההגדרה שלה.
- **הגדרה 2 — נקודה משותפת אחת.** המשיק ב־P הוא ישר שעובר דרך P, אינו מקביל לציר הפרבולה, ואין לו עם הפרבולה אף נקודה משותפת נוספת.

עצרו ובדקו

האם הישר $y=1$ משיק לפרבולה $y=x^2$ בנקודה $(1,1)$? ומה עם הישר האנכי $x=1$?

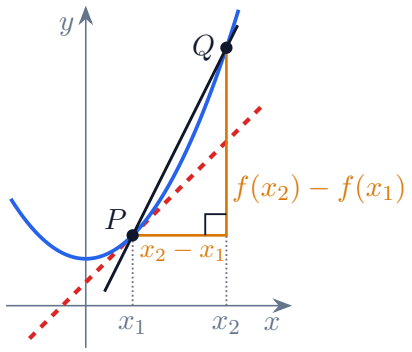
תשובה: הישר $y=1$ פוגש את הפרבולה בשתי נקודות, $(1,1)$ ו־$(-1,1)$, ולכן אינו משיק. הישר $x=1$ פוגש אותה רק ב־$(1,1)$, אבל הוא מקביל לציר הפרבולה, ולכן גם הוא אינו משיק. המשיק ב־$(1,1)$ הוא $y=2x-1$, כפי שראינו בדוגמה.

מפת ההוכחות. את חלק א׳ מוכיחות הוכחה 1 (לפי הגדרה 1) והוכחה 2 (לפי הגדרה 2). את חלק ב׳ מוכיחות הוכחות 3 ו־4. במסמך "משוואת הפרבולה והמשיק" יש עוד שתי הוכחות לחלק ב׳: בעזרת הנגזרת ובעזרת הדיסקרימיננטה.

4 הוכחה 1: מיתרים שמתקצרים

הרעיון נחשב במדויק את השיפוע של מיתר PQ, ואחר כך נקרב את Q אל P (הגדרה 1). בפרבולה מחכה לנו הפתעה נעימה: שיפוע המיתר יוצא ביטוי פשוט מאוד, והגבול מתקבל בהצבה, בלי שום ניחוש.

נסמן את נקודת ההשקה ב־$P\big(x_1, f(x_1)\big)$, ונקודה נוספת על הגרף ב־$Q\big(x_2, f(x_2)\big)$, כאשר $x_2 \neq x_1$.
השיפוע של המיתר PQ הוא "העלייה" $f(x_2)-f(x_1)$ חלקי "ההתקדמות" x_2-x_1. בפונקציה כללית קשה לפשט את המנה הזאת, אבל בפונקציה ריבועית אפשר לצמצם אותה עד הסוף.



סרטוט 3: כש־Q מתקרבת ל־P, המיתר מסתובב אל המשיק (המקווקו).

	טענה	נימוק
(1)	$f(x_2)-f(x_1)=a\,(x_2^2-x_1^2)+b\,(x_2-x_1)$	מציבים ב־f; האיבר c מתבטל
(2)	$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\big[a(x_2+x_1)+b\big]$	$x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$, ומוציאים גורם משותף

(3)	$m_{PQ}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=a(x_1+x_2)+b$	מצמצמים ב־(x_2-x_1), שאינו אפס. זה השיפוע המדויק של המיתר, בלי שום קירוב
(4)	$m=\lim\limits_{x_2\to x_1} m_{PQ}=a(x_1+x_1)+b=2ax_1+b$	כש־Q מתקרבת ל־P, גם x_2 מתקרב ל־x_1. בביטוי פשוט כזה, בלי חלוקה, הגבול מתקבל בהצבה
(5)	$y-f(x_1)=(2ax_1+b)(x-x_1)$	משוואת ישר לפי נקודה ושיפוע

מש"ל ■

בצעד 4 חישבנו בדיוק את הנגזרת לפי ההגדרה שלה:

$$f'(x_1)=\lim_{x_2\to x_1}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=2ax_1+b.$$

כך הוכחנו בדרך אגב גם את כלל הגזירה $(ax^2+bx+c)'=2ax+b$, ישירות מההגדרה.

עצרו ובדקו

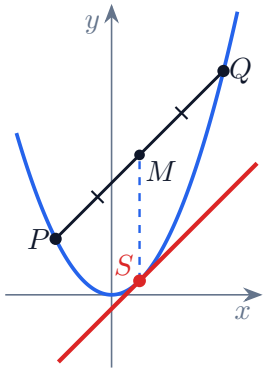
בפרבולה $y=x^2$ חשבו את שיפוע המיתר בין $x_1=1$ ל־$x_2=1.5$ פעמיים: לפי ההגדרה של שיפוע, ולפי הנוסחה מצעד 3. (**תשובה:** $\frac{2.25-1}{1.5-1}=2.5$, וגם $a(x_1+x_2)+b=2.5$.)

פנינה: המיתר מקביל למשיק שמול אמצעו

נכתוב את שיפוע המיתר מצעד 3 בצורה קצת אחרת:

$$a(x_1+x_2)+b=2a\cdot\frac{x_1+x_2}{2}+b.$$

זה בדיוק שיפוע המשיק בנקודה שבה $x=\frac{x_1+x_2}{2}$! כלומר: **כל מיתר של פרבולה "עומדת" מקביל למשיק בנקודה שנמצאת בדיוק מעל אמצע המיתר או מתחתיו.** בסרטוט, על הפרבולה $y=x^2$, שיפוע המיתר בין $P(-1,1)$ ל־$Q(2,4)$ הוא $\frac{4-1}{2+1}=1$. אמצע המיתר הוא $M\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$, ומתחתיו, על הפרבולה, נמצאת הנקודה $S\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$. גם שיפוע המשיק ב־$S$ הוא $2\cdot\frac{1}{2}=1$.



סרטוט 4: PQ מקביל למשיק ב־S, ו־S נמצאת מתחת לאמצע המיתר.

זו תכונה מיוחדת של פרבולות, ובגרפים אחרים היא לא תמיד מתקיימת. למשל, בגרף של $y=x^3$ המיתר בין $x=0$ ל־$x=2$ שיפועו $\frac{8-0}{2-0}=4$, אבל המשיק באמצע, ב־$x=1$, שיפועו 3.

ארכימדס השתמש בתכונה הזאת כדי לחשב שטחים של "קטעי פרבולה" (ראו "הידעתם?").

5 הוכחה 2: שורש כפול

הרעיון הפעם בלי גבולות ובלי נגזרות (הגדרה 2). ישר שאינו אנכי ועובר דרך P פוגש את הפרבולה ב־P, ובדרך כלל גם בעוד נקודה. בעזרת נוסחאות ויאטה נמצא אותה בלי לפתור משוואה, ונבדוק מתי היא "מתמזגת" עם P.

את המצב רואים בסרטוט 2: כל ישר אפור דרך P פוגש את הפרבולה בעוד נקודה, ובישר האדום שתי הנקודות מתמזגות. הישר האנכי $x = x_1$ עובר דרך P ופוגש את הגרף רק בה, אבל הוא מקביל לציר הפרבולה (שגם הוא אנכי), ולכן אינו משיק. כל ישר אחר דרך P הוא ישר עם שיפוע m, כלומר ישר מהצורה $y = f(x_1) + m\,(x - x_1)$. נמצא את הנקודות המשותפות שלו עם הגרף:

	טענה	נימוק
1	$ax^2 + bx + c = f(x_1) + m\,(x - x_1)$	בנקודה משותפת, ה־y של הגרף שווה ל־y של הישר
2	$ax^2 + (b - m)\,x + \big(c - f(x_1) + mx_1\big) = 0$	מעבירים אגף. זו משוואה ריבועית ב־x, כי $a \neq 0$
3	$x = x_1$ הוא אחד הפתרונות	P נמצאת גם על הגרף וגם על הישר
4	$x_2 = \dfrac{m - b}{a} - x_1$	x_2 הוא הפתרון השני. לפי ויאטה, במשוואה $Ax^2 + Bx + C = 0$ סכום הפתרונות הוא $-\frac{B}{A}$; כאן $A = a$ ו־$B = b - m$, ולכן $x_1 + x_2 = \frac{m-b}{a}$
5	$x_2 = x_1 \iff \dfrac{m - b}{a} = 2x_1 \iff m = 2ax_1 + b$	לישר ולגרף אין נקודה משותפת נוספת אם ורק אם שני הפתרונות מתלכדים
6	$y - f(x_1) = (2ax_1 + b)(x - x_1)$	זה הישר היחיד דרך P שאינו אנכי ואין לו נקודה משותפת נוספת עם הגרף

מש"ל ■

למה לא צריך כאן דיסקרימיננטה? כי פתרון אחד, $x = x_1$, ידוע מראש. במקום לשאול "כמה פתרונות יש?" מצאנו את הפתרון השני במפורש. וזה גם בונוס: צעד 4 נותן את נקודת המפגש השנייה של **כל** ישר דרך P, לא רק של המשיק.

עצרו ובדקו

הישר ששיפועו 3 ושעובר דרך הנקודה $P(1, 1)$ פוגש את הפרבולה $y = x^2$ בעוד נקודה. מצאו אותה בעזרת צעד 4, בלי לפתור משוואה ריבועית.

תשובה: $x_2 = \frac{3-0}{1} - 1 = 2$, ולכן הנקודה היא $(2, 4)$ — בדיוק הנקודה Q של המיתר בשיפוע 3 מהטבלה שבתחילת המסמך.

6 הוכחה 3: מוקד, מדריך ונוסחת המרחק

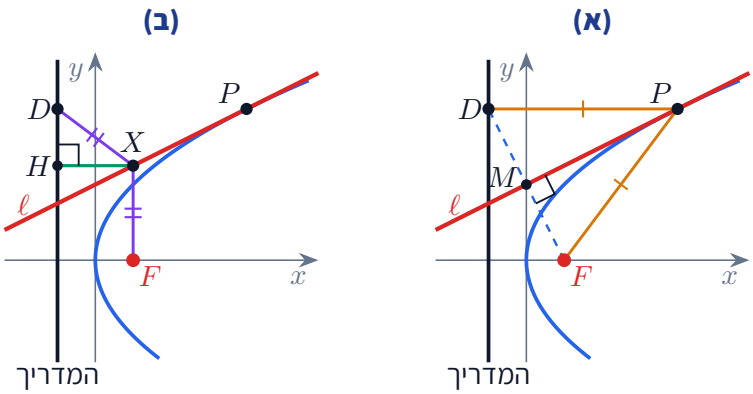
הרעיון הוכחה גאומטרית לחלק ב׳, לפי הגדרה 2. נראה שהמשיק ב־P הוא **האנך האמצעי** לקטע שמחבר את המוקד אל עקב האנך שיורד מ־P למדריך. הכלים: ההגדרה של הפרבולה, ניצב ויתר, ונוסחת המרחק.

תזכורת. הפרבולה $y^2=2px$ היא המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהמוקד $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ שווה למרחקן מהמדריך, הישר $x=-\frac{p}{2}$ (ראו את המסמך ״משוואת הפרבולה והמשיק״). לכל נקודה $X(x,y)$ במישור נסמן ב־d את המרחק שלה מהמדריך: $d=\left|x+\frac{p}{2}\right|$. נוסחת המרחק נותנת **זהות מפתח**:

$$XF^2-d^2=\left(x-\tfrac{p}{2}\right)^2+y^2-\left(x+\tfrac{p}{2}\right)^2=y^2-2px.$$

לכן X נמצאת על הפרבולה בדיוק כש־$XF=d$. ואם $XF>d$, אז $y^2>2px$, ו־X **אינה** על הפרבולה: היא מחוץ לה, רחוקה מהמוקד יותר מאשר מהמדריך.

יהי D עקב האנך מהנקודה $P(x_1,y_1)$ שעל הפרבולה אל המדריך, ו־ℓ האנך האמצעי לקטע FD. נוכיח ש־ℓ הוא המשיק ב־P.



סרטוט 5: (א) $PF=PD$, ולכן P על האנך האמצעי ℓ לקטע FD. (ב) לכל נקודה אחרת X על ℓ מתקיים $XF=XD$, אבל $XH<XD$.

בצעדים 3–5, X היא נקודה כלשהי על ℓ ששונה מ־P, ו־H הוא עקב האנך מ־X למדריך (סרטוט 5ב).

	טענה	נימוק
1	P נמצאת על ℓ	$PF=PD$ (ההגדרה של הפרבולה), ולכן P על האנך האמצעי לקטע FD
2	ℓ אינו מקביל לציר הפרבולה	ℓ ניצב ל־FD, ו־FD אינו אנכי, כי לנקודות F ו־D שיעורי x שונים
3	$H\neq D$	H בגובה של X, ו־D בגובה של P. הגבהים שונים, כי ℓ אינו אופקי
4	$XF=XD>XH=d$	X על האנך האמצעי, ו־XH הוא האנך מ־X למדריך — הקטע הקצר ביותר מ־X אל המדריך
5	ℓ הוא המשיק ב־P	לפי זהות המפתח, X אינה על הפרבולה. לכן ℓ מקיים את הגדרה 2

מש״ל ■

ועכשיו המשוואה. נקודה $X(x,y)$ נמצאת על ℓ בדיוק כשהיא רחוקה מ־F ומ־D באותה מידה. נכתוב את התנאי בעזרת נוסחת המרחק:

	טענה	נימוק
(1)	$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y_1)^2$	$XF^2=XD^2$ בעזרת נוסחת המרחק, עם $D\left(-\frac{p}{2},y_1\right)$ ועם $F\left(\frac{p}{2},0\right)$
(2)	$-px=px-2y\,y_1+y_1^2$	פותחים סוגריים. האיברים x^2 ו־y^2 מתבטלים, וכך גם $\frac{p^2}{4}$
(3)	$2y\,y_1=2px+y_1^2=2px+2px_1$	P על הפרבולה, ולכן $y_1^2=2px_1$
(4)	$y\cdot y_1=p\,(x+x_1)$	מחלקים ב־2

מש"ל ■

גם הקודקוד נכלל. לא חילקנו ב־y_1, ולכן ההוכחה תקפה גם בקודקוד $O(0,0)$. שם $D=\left(-\frac{p}{2},0\right)$, האנך האמצעי ל־$FD$ הוא ציר ה־y, והנוסחה נותנת $y\cdot 0=p\,(x+0)$, כלומר $x=0$.

ולמה אין ישר אחר כזה? כל ישר דרך P שאינו מקביל לציר הפרבולה אפשר לכתוב כ־$x-x_1=t\,(y-y_1)$. נציב $x=\frac{y^2}{2p}$ ו־$x_1=\frac{y_1^2}{2p}$, ונקבל $y^2-2pt\,y+2pt\,y_1-y_1^2=0$. פתרון אחד הוא y_1, ולפי ויאטה השני הוא $2pt-y_1$. הם מתלכדים רק כש־$t=\frac{y_1}{p}$, וזה הישר ℓ עצמו (כפלו ב־p). לכן כל ישר אחר דרך P פוגש את הפרבולה בעוד נקודה.

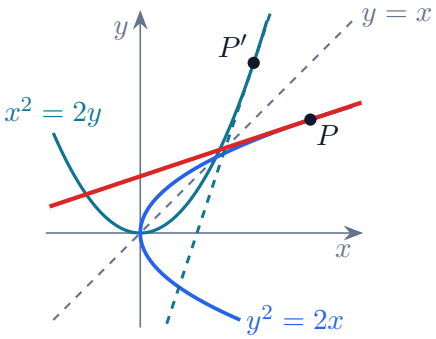
בנייה בסרגל ובמחוגה. ההוכחה נותנת דרך לבנות את המשיק בלי שום חישוב: מורידים מ־P אנך למדריך (עקב האנך הוא D), ובונים במחוגה את האנך האמצעי לקטע FD, כמו בסרטוט 5א. הישר שמתקבל הוא המשיק ב־P.

מתנה: תכונת ההחזרה. במשולש שווה־השוקיים FPD האנך האמצעי לבסיס FD הוא גם חוצה הזווית $\angle FPD$. לכן המשיק יוצר זוויות שוות עם PF ועם ההמשך של DP מעבר ל־P — ומכאן, לפי חוק ההחזרה, קרן שנעה במקביל לציר מוחזרת מהפרבולה אל המוקד. (במסמך "משוואת הפרבולה והמשיק" הגענו לתכונה הזאת בדרך אחרת.)

7 הוכחה 4: מחליפים בין x ל־y

הרעיון הפרבולה $y^2=2px$ היא פרבולה "עומדת" ששכבה על הצד. נחליף את התפקידים של x ושל y, ונקבל גרף של פונקציה ריבועית — שעבורו חלק א׳ כבר הוכח, ואפילו פעמיים.

בחלק א׳ המשתנה "החופשי" הוא x, ו־y הוא פונקציה ריבועית שלו. בפרבולה $y^2=2px$ המצב הפוך: $x=\frac{1}{2p}\,y^2$, כלומר x הוא פונקציה ריבועית של y, עם $a=\frac{1}{2p}$ ועם $b=c=0$.
גאומטרית, החלפת התפקידים היא **שיקוף בישר** $y=x$. שיקוף מעביר ישר לישר ונקודה משותפת לנקודה משותפת, וישר שמקביל לציר של פרבולה אחת עובר לישר שמקביל לציר של השנייה. לכן מותר להפעיל את חלק א׳ "במראה".



סרטוט 6: השיקוף בישר $y=x$ מעביר את P' אל P, ואת המשיק המקווקו אל המשיק האדום.

	טענה	נימוק
1	$x - x_1 = \frac{y_1}{p}(y - y_1)$	חלק א׳ כשהתפקידים של x ו־y מוחלפים. השיפוע הוא $2 \cdot \frac{1}{2p} \cdot y_1 + 0 = \frac{y_1}{p}$
2	$px - px_1 = y \cdot y_1 - y_1^2$	כפל ב־p
3	$y \cdot y_1 = px - px_1 + 2px_1 = p(x + x_1)$	$y_1^2 = 2px_1$, ומעבירים אגף

מש״ל ■

שלוש שורות של אלגברה, ובלי מקרים מיוחדים: בקודקוד $(y_1 = 0)$ צעד 1 נותן $x - 0 = 0 \cdot (y - 0)$, כלומר $x = 0$ — בלי חלוקה באפס. בהוכחה בעזרת הנגזרת שבמסמך ״משוואת הפרבולה והמשיק״, שבה השיפוע הוא $\frac{p}{y_1}$, הקודקוד דורש טיפול נפרד, כי שם המשיק אנכי ואין לו שיפוע.

8 ארבע ההוכחות זו מול זו

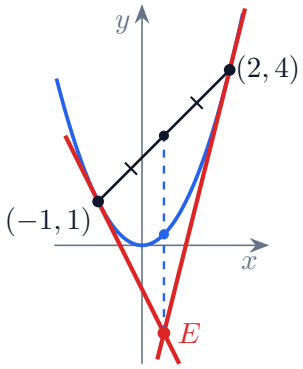
	1: מיתרים	2: שורש כפול	3: מוקד ומדריך	4: החלפת x ו־y
מה מוכיחים	חלק א׳	חלק א׳	חלק ב׳	חלק ב׳
הגדרת המשיק	הגדרה 1: גבול של מיתרים	הגדרה 2: נקודה משותפת אחת	הגדרה 2: נקודה משותפת אחת	כמו בחלק א׳
הכלים	פירוק לגורמים וגבול	נוסחאות ויאטה	אנך אמצעי ונוסחת המרחק	שיקוף וחלק א׳
היתרון	מראה איך המשיק ״נולד״; נותנת את הנגזרת	בלי גבולות; נותנת גם את החיתוך השני	גאומטרית, בלי מקרים; מסבירה את ההחזרה	שלוש שורות, כולל הקודקוד

9 שימוש: שני משיקים מנקודה שמחוץ לפרבולה

מהנקודה $E\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ מעבירים משיקים לפרבולה $y = x^2$. מהן משוואות המשיקים?
הנקודה E אינה על הפרבולה, ולכן אי אפשר להציב אותה בנוסחה. נסמן ב־(x_1, x_1^2) את נקודת ההשקה, שעוד אינה ידועה. המשיק בה הוא

$$y = x_1^2 + 2x_1(x - x_1) = 2x_1 x - x_1^2,$$

והוא עובר דרך E בדיוק כאשר $-2 = 2x_1 \cdot \frac{1}{2} - x_1^2$, כלומר $x_1^2 - x_1 - 2 = 0$. לכן $x_1 = 2$ או $x_1 = -1$: המשיק בנקודה $(2, 4)$ הוא $y = 4x - 4$, והמשיק בנקודה $(-1, 1)$ הוא $y = -2x - 1$.



סרטוט 7: שני המשיקים מ־E. הקו האנכי דרך E חוצה את המיתר בין נקודות ההשקה.

תופעה יפה. שיעור ה־x של E הוא $\frac{2+(-1)}{2}=\frac{1}{2}$ — בדיוק הממוצע של שיעורי ה־x של נקודות ההשקה. זה תמיד כך: המשיקים לפרבולה $y=x^2$ ב־$x=x_1$ וב־$x=x_2$ נפגשים בנקודה $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ x_1x_2\right)$ (שאלה 3). לכן הישר האנכי דרך E חוצה את המיתר שבין נקודות ההשקה, והמיתר מקביל למשיק ב־$x=\frac{1}{2}$: שוב הפנינה מהוכחה 1.

טעות נפוצה

- **ערך במקום שיפוע.** שיפוע המשיק ב־x_1 הוא $2ax_1+b$, ולא $f(x_1)$. למשל, שיפוע המשיק לגרף של $y=x^2$ בנקודה $(3,9)$ הוא 6 ולא 9, והמשיק הוא $y=6x-9$.
- **שוכחים את נקודת ההשקה.** לישר $y=2x$ יש השיפוע הנכון למשיק ל־$y=x^2$ בנקודה $(1,1)$, אבל הוא לא עובר דרכה. המשיק הוא $y=2x-1$.
- **נקודה שאינה על הפרבולה.** את הנקודה $E\left(\frac{1}{2},-2\right)$ אסור "להציב בנוסחה": הישר $y+2=1\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)$ אפילו לא פוגש את $y=x^2$. הדרך הנכונה מופיעה בסעיף 9.
- **חלוקה ב־y_1 בקודקוד.** בקודקוד של $y^2=2px$ אין שיפוע $\frac{p}{y_1}$, כי המשיק שם אנכי. הנוסחה $y\cdot y_1=p(x+x_1)$ עובדת גם שם ונותנת $x=0$.

הידעתם?

אפולוניוס מפרגה (בערך 200 לפני הספירה) הוכיח בספר הראשון של "חתכי חרוט" (טענה 33) בנייה של המשיק: מורידים מ־P אנך אל הציר, ומסמנים על הציר, מעבר לקודקוד, נקודה שרחוקה מהקודקוד כמו עקב האנך. הישר מ־P אליה משיק לפרבולה, כלומר המשיק חותך את הציר ב־$(-x_1,0)$.
ארכימדס (המאה ה־3 לפני הספירה) הוכיח בחיבור "תרבוע הפרבולה" ששטח "קטע פרבולה", שבין מיתר לקשת, גדול פי $\frac{4}{3}$ משטח המשולש PSQ שבסרטוט 4 (שם: 4.5 לעומת 3.375). בתחילת החיבור הוא מביא בלי הוכחה את הפנינה שלנו, ומציין שתכונות כאלה הוכחו כבר בספר קודם, שלא הגיע לידינו.
פייר דה פרמה פיתח בשנות ה־30 של המאה ה־17, עשרות שנים לפני ניוטון ולייבניץ, שיטה למציאת מקסימום, מינימום ומשיקים שקרובה מאוד להוכחה 1: נקודה "קרובה", חלוקה בהפרש הקטן ואיפוס שלו. כדוגמה הוא מצא את המשיק לפרבולה, וקיבל שוב את הנקודה $(-x_1,0)$.

10 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

1. מצאו את המשיק לגרף של $f(x)=2x^2-3x+1$ ב־$x=1$, ואת המשיק לגרף שמקביל לישר $y=5x$.
2. באיזו נקודה של הגרף של $f(x)=x^2-2x$ המשיק מקביל למיתר שבין $x=0$ ל־$x=4$?
3. הוכיחו שהמשיקים ל־$y=x^2$ ב־$x=x_1$ וב־$x=x_2$ נפגשים בנקודה $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ x_1x_2\right)$.
4. מצאו את המשיק ל־$y^2=4x$ ב־$P(9,6)$ כאנך האמצעי לקטע FD, ובדקו בעזרת הנוסחה.
5. הוכיחו בעזרת חלק א': המשיק ל־$x^2=2py$ בנקודה (x_1,y_1) שעליה הוא $x\cdot x_1=p\,(y+y_1)$.
6. (להעמקה) **מיתר מוקדי** הוא מיתר שעובר דרך המוקד. הוכיחו שהמשיקים ל־$y^2=2px$ בקצות מיתר מוקדי נפגשים על המדריך וניצבים זה לזה. רמז: $x=ty+\frac{p}{2}$.

תשובות

1. $f(1)=2-3+1=0$, ושיפוע המשיק הוא $2\cdot 2\cdot 1-3=1$. המשיק: $y=x-1$. למשיק המקביל ל־$y=5x$ יש שיפוע 5, ולכן $4x_1-3=5$, כלומר $x_1=2$ ו־$f(2)=3$. המשיק: $y-3=5(x-2)$, כלומר $y=5x-7$.
2. שיפוע המיתר הוא $a(x_1+x_2)+b=1\cdot(0+4)-2=2$. לפי הפנינה מהוכחה 1, המשיק המקביל נמצא באמצע, ב־$x=2$, כלומר בנקודה $(2,0)$. בדיקה: $f'(2)=2\cdot 2-2=2$.
3. המשיקים הם $y=2x_1x-x_1^2$ ו־$y=2x_2x-x_2^2$. נחסר ונקבל $2(x_1-x_2)\,x=x_1^2-x_2^2$, ואחרי חלוקה ב־$2(x_1-x_2)$, שאינו אפס, נקבל $x=\frac{x_1+x_2}{2}$. הצבה במשוואה הראשונה נותנת $y=x_1(x_1+x_2)-x_1^2=x_1x_2$.
4. כאן $p=2$, ולכן $F(1,0)$ ו־$D(-1,6)$. אמצע הקטע FD הוא $(0,3)$, ושיפוע FD הוא $\frac{6-0}{-1-1}=-3$. לכן שיפוע האנך האמצעי הוא $\frac{1}{3}$, והאנך האמצעי הוא $y=\frac{x}{3}+3$. הנוסחה נותנת $6y=2(x+9)$, כלומר אותו ישר.
5. כאן $y=\frac{1}{2p}x^2$, ולפי חלק א׳ שיפוע המשיק הוא $\frac{x_1}{p}$. לכן $y-y_1=\frac{x_1}{p}(x-x_1)$. נכפול ב־$p$ ונקבל $py-py_1=x\cdot x_1-x_1^2=x\cdot x_1-2py_1$, כי $x_1^2=2py_1$. לכן $x\cdot x_1=p\,(y+y_1)$.
6. נציב $x=ty+\frac{p}{2}$ במשוואת הפרבולה ונקבל $y^2-2pt\,y-p^2=0$. לפי ויאטה, שיעורי ה־y של הקצוות מקיימים $y_1y_2=-p^2$, ולכן שניהם שונים מאפס, והסימנים שלהם שונים. נחסר את משוואות המשיקים $y\cdot y_1=p(x+x_1)$ ו־$y\cdot y_2=p(x+x_2)$, ונציב $x_1-x_2=\frac{y_1^2-y_2^2}{2p}$. נקבל $y\,(y_1-y_2)=\frac{y_1^2-y_2^2}{2}$, כלומר $y=\frac{y_1+y_2}{2}$. הצבה במשוואת המשיק הראשון נותנת $px=\frac{y_1y_2}{2}$, ולכן $x=\frac{y_1y_2}{2p}=-\frac{p}{2}$: נקודת המפגש נמצאת על המדריך. מכפלת השיפועים של המשיקים היא $\frac{p}{y_1}\cdot\frac{p}{y_2}=\frac{p^2}{y_1y_2}=-1$, ולכן הם ניצבים זה לזה.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את המסמך בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנו קטעים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.