

המשיק למעגל

למה המשיק ניצב לרדיוס, ואיך מגיעים למשוואה שלו – בעזרת משפט פיתגורס ונוסחת המרחק

כ־18 דקות קריאה

4 הוכחות

גאומטריה אנליטית

5-4 יח"ל

כיתות י"א-י"ב

מה כדאי לדעת קודם

- משוואת המעגל.
- נוסחת המרחק בין שתי נקודות.
- משפט פיתגורס וההפוך לו.
- להוכחה 2 של משפט 2: תנאי הניצבות $m_1 \cdot m_2 = -1$.
- להוכחה 3 של משפט 2: מכפלה סקלרית (4-5 יח"ל).

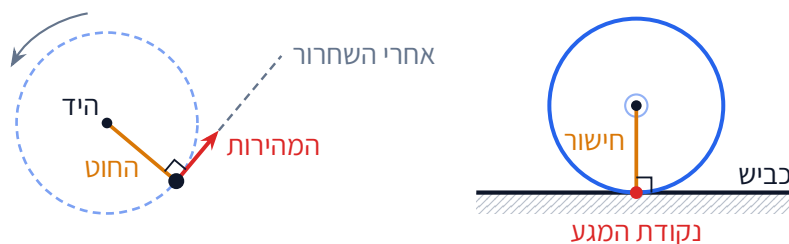
מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: גלגל על כביש ואבן בקלע.
- משפט 1: המשיק ניצב לרדיוס – הוכחה בעזרת משפט פיתגורס, בשני הכיוונים.
- משפט 2: משוואת המשיק, בשלוש הוכחות: נוסחת המרחק, שיפועים ומכפלה סקלרית.
- שימושים: משיק בנקודה נתונה, משיקים מנקודה שמחוץ למעגל ומשיקים בשיפוע נתון.
- טעויות נפוצות, היסטוריה ושאלות לבדיקה עצמית.

1 האינטואיציה: גלגל על הכביש ואבן בקלע

האינטואיציה

גלגל של אופניים נוסע על כביש ישר. בכל רגע הגלגל נוגע בכביש בנקודה אחת בלבד, והחישור שיורד מהציר אל נקודת המגע ניצב לכביש. הכביש נוגע בגלגל, אבל לא נכנס לתוכו. בגאומטריה קוראים לישר כזה **משיק**. דוגמה שנייה, מהפיזיקה: מסובבים אבן שקשורה לחוט, כמו בקלע. האבן נעה במעגל, ובכל רגע המהירות שלה מכוונת לאורך המשיק – בניצב לחוט. ברגע שמשחררים את החוט, שום כוח כבר לא מושך את האבן אל המרכז, ובמבט מלמעלה היא ממשיכה בקו ישר לאורך המשיק. היא לא ממשיכה להסתובב, וגם לא "בורחת" החוצה בכיוון החוט – שתי טעויות נפוצות. בשתי הדוגמאות מופיעה אותה תכונה: **המשיק ניצב לרדיוס בנקודת המגע**. במסמך הזה נוכיח אותה, ואחר כך נשתמש בה כדי למצוא את משוואת המשיק.



סרטוט 1: מימין: הכביש ניצב לחישור בנקודת המגע. משמאל: ברגע השחרור האבן נעה לאורך המשיק.

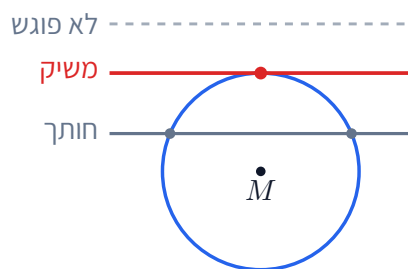
דוגמה מספרית קטנה

המעגל $x^2 + y^2 = 25$ (מרכזו בראשית הצירים O , ורדיוסו 5) והישר $3x + 4y = 25$. הנקודה $P(3, 4)$ נמצאת על שניהם: $3^2 + 4^2 = 25$, וגם $3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 25$. נבדוק עוד כמה נקודות של הישר:

הנקודה	$3x + 4y$	$x^2 + y^2$	איפה היא?
$(3, 4)$	25	25	על המעגל
$(7, 1)$	25	50	מחוץ למעגל
$(-1, 7)$	25	50	מחוץ למעגל
$(11, -2)$	25	125	מחוץ למעגל

בטבלה, כל הנקודות פרט ל- P רחוקות מהמרכז יותר מ-5. שימו לב למספרים: בכל שורה, $x^2 + y^2$ שווה ל-25 ועוד ריבוע המרחק של הנקודה מ- P . למשל, המרחק של $(11, -2)$ מ- P הוא 10, ואכן $125 = 25 + 10^2$. זה משפט פיתגורס, כי הישר ניצב לרדיוס OP . בהמשך נוכיח שכך קורה בכל נקודה של הישר, ולכן הישר נוגע במעגל רק ב- P .

2 ההגדרה והמשפטים



סרטוט 2: חותר, משיק, וישר שאין לו נקודה משותפת עם המעגל.

ישר ומעגל יכולים להיפגש בשתי נקודות או בנקודה אחת, ויכול להיות גם שאין להם נקודה משותפת (סרטוט 2). ישר שפוגש את המעגל בשתי נקודות נקרא **חותר**. ישר שיש לו עם המעגל **נקודה משותפת אחת בדיוק** נקרא **משיק** למעגל, והנקודה המשותפת נקראת **נקודת ההשקה**. נסמן את מרכז המעגל ב- $M(a, b)$, את הרדיוס ב- R ואת נקודת ההשקה ב- $P(x_1, y_1)$. במסמך יש שני משפטים: הראשון גאומטרי, והשני נותן את משוואת המשיק.

משפט 1: המשיק והרדיוס

תהי P נקודה על מעגל שמרכזו M . ישר שעובר דרך P משיק למעגל **אם ורק אם** הוא ניצב לרדיוס MP .

משפט 2: משוואת המשיק

המשיק למעגל $x^2 + y^2 = R^2$ בנקודה $P(x_1, y_1)$ שעל המעגל הוא

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = R^2$$

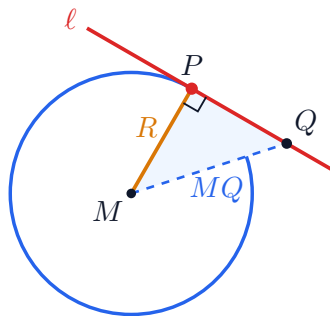
ובמעגל שמרכזו בראשית הצירים, המשיק הוא $x_1x + y_1y = R^2$.

במילים: כותבים את משוואת המעגל, ובכל ריבוע מציבים את נקודת ההשקה רק באחד הגורמים: הריבוע $(x - a)^2 = (x - a)(x - a)$ הופך ל- $(x_1 - a)(x - a)$, והריבוע $(y - b)^2$ הופך ל- $(y_1 - b)(y - b)$.

3 הוכחת משפט 1: משפט פיתגורס, בשני הכיוונים

הרעיון נקודה נמצאת על המעגל כשהמרחק שלה מהמרכז שווה ל- R , בתוכו כשהמרחק קטן מ- R , ומחוצה לו כשהוא גדול מ- R . משפט 1 הוא משפט "אם ורק אם", ולכן נוכיח שני כיוונים. בשניהם נחשב מרחקים מהמרכז בעזרת משפט פיתגורס.

כיוון א': ישר שניצב לרדיוס הוא משיק



נניח שהישר ℓ עובר דרך P וניצב ל- MP . ניקח על ℓ נקודה כלשהי Q , שונה מ- P , ונראה ש- Q נמצאת מחוץ למעגל. המשולש MPQ ישר-זווית ב- P , ולכן היתר שלו, MQ , ארוך מכל אחד מהניצבים – ובפרט ארוך מהרדיוס MP . זה כל הרעיון. בטבלה נכתוב אותו בעזרת משפט פיתגורס.

סרטוט 3: כל נקודה $Q \neq P$ על ℓ רחוקה מהמרכז יותר מ- R .

טענה	נימוק
① $\angle MPQ = 90^\circ$	$\ell \perp MP$, ו- Q נמצאת על ℓ
② $MQ^2 = MP^2 + PQ^2$	משפט פיתגורס ב- $\triangle MPQ$
③ $MQ^2 = R^2 + PQ^2$	$MP = R$, כי P על המעגל
④ $MQ^2 > R^2$	$PQ > 0$, כי $Q \neq P$
⑤ $MQ > R$	שני המרחקים חיוביים

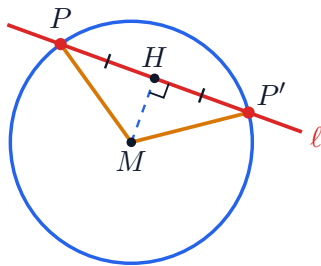
לכן כל נקודה של ℓ פרט ל- P נמצאת מחוץ למעגל, ו- P היא הנקודה המשותפת היחידה של ℓ ושל המעגל: ℓ משיק.

■ מש"ל

✓ עצרו ובדקו

בצעד 4 השתמשנו בכך ש- $Q \neq P$. מה מקבלים בצעד הזה כש- $Q = P$, ומה זה אומר?

כיוון ב': המשיק ניצב לרדיוס



סרטוט 4: אם ℓ אינו ניצב ל- MP , גם P' נמצאת על המעגל.

נניח עכשיו ש- ℓ משיק למעגל ב- P , ונוכיח שהוא ניצב ל- MP . ההוכחה היא **בדרך השלילה**: נניח ש- ℓ אינו ניצב ל- MP , ונגיע לסתירה. נוריד מ- M אנך לישר ℓ , ונסמן את עקב האנך ב- H . כיוון ש- ℓ אינו ניצב ל- MP , הנקודה H שונה מ- P . על ℓ , מהצד השני של H , נסמן את הנקודה P' שמקיימת $HP' = HP$.

טענה	נימוק
① $\angle MHP = \angle MHP' = 90^\circ$	$MH \perp \ell$
② $MP'^2 = MH^2 + HP'^2$	משפט פיתגורס ב- $\triangle MHP'$
③ $MP'^2 = MH^2 + HP^2$	$HP' = HP$ (כך בחרנו את P')
④ $MP'^2 = MP^2 = R^2$	משפט פיתגורס ב- $\triangle MHP$, ו- $MP = R$
⑤ $P' \neq P$ על המעגל, ו- $P' \neq P$	$MP' = R$ וגם $P' \neq P$ כי H היא אמצע הקטע PP' ו- $H \neq P$

קיבלנו שהישר ℓ פוגש את המעגל בשתי נקודות, P ו- P' , בסתירה לכך ש- ℓ משיק. לכן ההנחה שגויה, ו- ℓ ניצב ל- MP . (ואם ℓ עובר דרך המרכז? אז $H = M$, והחישוב נשאר נכון עם $MH = 0$: הנקודה P' היא הקצה השני של הקוטר.)

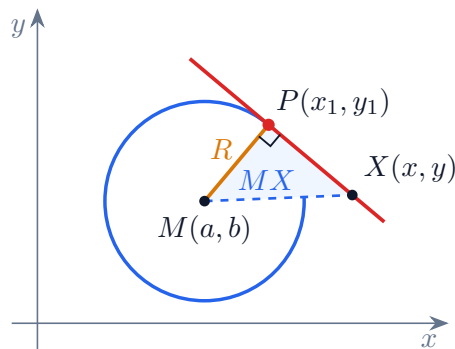
מש"ל

מה למדנו ממשפט 1

המשיק בנקודה P הוא **הישר היחיד** שעובר דרך P וניצב לרדיוס MP . לכן כדי לכתוב את משוואת המשיק מספיק לתרגם "ניצב לרדיוס" לשפה של x ו- y – וזה בדיוק מה ששלוש ההוכחות הבאות עושות, כל אחת בכלי אחר.

4 משפט 2, הוכחה 1: ההפוך למשפט פיתגורס ונוסחת המרחק

הרעיון לפי משפט 1, נקודה X ששונה מ- P נמצאת על המשיק בדיוק כשהזווית MPX ישרה. לפי משפט פיתגורס וההפוך לו, הזווית הזאת ישרה בדיוק כש- $MX^2 = MP^2 + PX^2$. את שלושת המרחקים נכתוב בנוסחת המרחק, ונקבל את המשוואה.



תהי $X(x, y)$ נקודה במישור, שונה מ- P . לפי נוסחת המרחק:

$$MX^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

$$PX^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

וכיון ש- P על המעגל, $MP^2 = R^2$. נציב את שלושת הביטויים בתנאי $MX^2 = MP^2 + PX^2$, ונפשט.

סרטוט 5: X על המשיק בדיוק כשהזווית MPX ישרה.

נימוק	טענה
התנאי $MX^2 = MP^2 + PX^2$ בנוסחת המרחק	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 + (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$ (1)
פתיחת סוגריים: x^2 ו- y^2 מתבטלים	$-2ax + a^2 - 2by + b^2 = R^2 - 2x_1x + x_1^2 - 2y_1y + y_1^2$ (2)
העברת אגפים	$2(x_1 - a)x + 2(y_1 - b)y = R^2 + x_1^2 + y_1^2 - a^2 - b^2$ (3)
P על המעגל: פותחים סוגריים ב- $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2$	$x_1^2 + y_1^2 = R^2 + 2ax_1 + 2by_1 - a^2 - b^2$ (4)
הצבה של צעד 4 בצעד 3, וחילוק ב-2	$(x_1 - a)x + (y_1 - b)y = R^2 + ax_1 + by_1 - a^2 - b^2$ (5)
מחסירים משני האגפים $a(x_1 - a) + b(y_1 - b)$	$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = R^2$ (6)

כל צעד בטבלה הפיך, ולכן לכל נקודה X השוויון $MX^2 = MP^2 + PX^2$ שקול למשוואה שקיבלנו. נשארו שני מקרים שבהם אין משולש MPX :

• $X = P$. הנקודה על המשיק, והיא גם מקיימת את המשוואה: אם מציבים $x = x_1$ ו- $y = y_1$, מקבלים $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2$, וזה נכון כי P על המעגל.

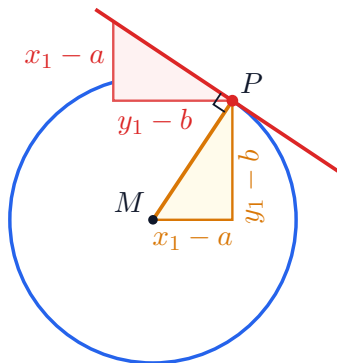
• X על הישר MP , ושונה מ- P . אז $MX = R + PX$ או $MX = |R - PX|$, ולכן $MX^2 = R^2 \pm 2R \cdot PX + PX^2 \neq R^2 + PX^2$. כלומר X לא מקיימת את המשוואה – וכך צריך להיות, כי המשיק פוגש את הישר MP רק ב- P .

בכל שאר הנקודות יש משולש MPX , ושם השוויון מתקיים בדיוק כשהזווית ב- P ישרה. לכן המשוואה מתארת בדיוק את המשיק.

■ מש"ל

5 משפט 2, הוכחה 2: שיפועים ותנאי הניצבות

הרעיון נכתוב את המשיק כישר שעובר דרך P , ואת השיפוע שלו נקבע לפי תנאי הניצבות עם הרדיוס MP .



סרטוט 6: משולש השיפוע של המשיק הוא המשולש של הרדיוס, מסובב ב- 90° .

נניח קודם ש- $x_1 \neq a$ וגם $y_1 \neq b$, כלומר הרדיוס MP אינו מקביל לאף אחד מהצירים. השיפוע של MP הוא היחס בין הניצבים של המשולש הכתום: $\frac{y_1 - b}{x_1 - a}$. כשמסובבים את המשולש הזה ב- 90° , מקבלים את משולש השיפוע של המשיק (באדום): הניצבים מתחלפים, ואחד מהם מחליף כיוון. לכן השיפוע של המשיק הוא $-\frac{x_1 - a}{y_1 - b}$, כלומר ההופכי והנגדי.

טענה	נימוק
1 $m_{MP} = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}$	השיפוע בין $M(a, b)$ ל- $P(x_1, y_1)$
2 $m = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}$	המשיק ניצב ל- MP (משפט 1), ולכן $m \cdot m_{MP} = -1$
3 $y - y_1 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b} (x - x_1)$	משוואת ישר לפי נקודה ושיפוע
4 $(x_1 - a)(x - x_1) + (y_1 - b)(y - y_1) = 0$	כפל ב- $(y_1 - b)$, והעברת אגפים
5 $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2$	כותבים $x - x_1 = (x - a) - (x_1 - a)$ $y - y_1 = (y - b) - (y_1 - b)$ ופותרים סוגריים
6 $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = R^2$	P על המעגל

ומה כשהרדיוס מקביל לציר? אם $y_1 = b$, הרדיוס אופקי והמשיק אנכי: הישר $x = x_1$. לישר כזה אין שיפוע (בצעד 2 היינו מחלקים באפס), ולכן בודקים את הנוסחה ישירות. כאן $(x_1 - a)^2 = R^2 > 0$, ולכן מותר לחלק ב- $x_1 - a$ את שני האגפים:

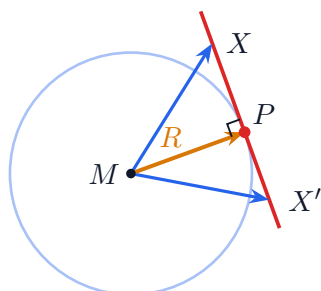
$$(x_1 - a)(x - a) = R^2 = (x_1 - a)^2 \implies x - a = x_1 - a \implies x = x_1.$$

זה בדיוק המשיק האנכי. באותו אופן, אם $x_1 = a$ הנוסחה נותנת את המשיק האופקי $y = y_1$.

■ מש"ל

6 משפט 2, הוכחה 3 (להעמקה): וקטורים

הרעיון בשפת הווקטורים "ניצב" פירושו מכפלה סקלרית ששווה לאפס. נשתמש בזה ובחוק הפילוג.



סרטוט 7: לכל נקודה על המשיק, ההיטל של $\underline{MX}$ על הישר MP הוא בדיוק $\underline{MP}$.

לכל נקודה $X(x, y)$ נסמן

$$\underline{MP} = (x_1 - a, y_1 - b), \quad \underline{MX} = (x - a, y - b),$$

ואז $\underline{PX} = \underline{MX} - \underline{MP}$. לפי משפט 1, נקודה $X \neq P$ נמצאת על המשיק בדיוק כאשר $\underline{PX} \perp \underline{MP}$, כלומר כאשר

$$\underline{PX} \cdot \underline{MP} = 0. \text{ גם } X = P \text{ מקיימת את השוויון הזה, כי אז}$$

$$\underline{PX} \text{ הוא וקטור האפס. לכן } X \text{ על המשיק אם ורק אם } \underline{PX} \cdot \underline{MP} = 0$$

נימוק	טענה
X על המשיק	$\underline{PX} \cdot \underline{MP} = 0$ ①
$\underline{PX} = \underline{MX} - \underline{MP}$	$(\underline{MX} - \underline{MP}) \cdot \underline{MP} = 0$ ②
חוק הפילוג, והעברת אגפים	$\underline{MX} \cdot \underline{MP} = \underline{MP} \cdot \underline{MP}$ ③
$\underline{MP} \cdot \underline{MP} = \underline{MP} ^2 = R^2$	$\underline{MX} \cdot \underline{MP} = R^2$ ④
מכפלה סקלרית לפי הרכיבים	$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = R^2$ ⑤

כל הצעדים הפיכים, ולכן קיבלנו את שני הכיוונים בבת אחת: X על המשיק אם ורק אם היא מקיימת את המשוואה.

מש"ל

ומה רואים כאן? אם θ היא הזווית שבין $\underline{MP}$ ל- $\underline{MX}$, אז $\underline{MX} \cdot \underline{MP} = |\underline{MX}| \cdot R \cdot \cos \theta$, וצעד 4 אומר ש- $|\underline{MX}| \cos \theta = R$. במילים: ההיטל ("צל") של $\underline{MX}$ על הישר MP אורכו בדיוק R , והוא נגמר ב- P – לכל נקודה של המשיק (סרטוט 7).

7 שלוש ההוכחות של משפט 2 זו מול זו

הוכחה 1: פיתגורס ומרחקים	הוכחה 2: שיפועים	הוכחה 3: וקטורים	הרעיון
זווית ישרה ב- P שקולה לשוויון $MX^2 = MP^2 + PX^2$ (ההפוך למשפט פיתגורס)	שיפוע המשיק הוא ההופכי והנגדי של שיפוע הרדיוס	מכפלה סקלרית ששווה לאפס, וחוק הפילוג	
$X = P$ ונקודות על הישר MP (שם אין משולש)	משיק אנכי או אופקי – בנפרד	רק $X = P$ (וקטור האפס)	מקרים מיוחדים
נשענת רק על פיתגורס ועל מרחקים	הדרך המוכרת מהכיתה	הקצרה ביותר, ורואים בה היטל באורך R	היתרון

8 מה עושים עם המשפטים?

שימוש 1: משיק בנקודה נתונה

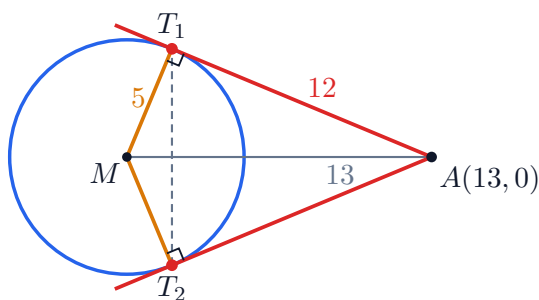
דוגמה מספרית

מצאו את משוואת המשיק למעגל $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ בנקודה $P(5, 3)$.
קודם בודקים ש- P על המעגל: $(5-2)^2 + (3+1)^2 = 9 + 16 = 25$. המרכז הוא $M(2, -1)$, כלומר $b = -1$ ו- $a = 2$ לפי משפט 2:

$$(5-2)(x-2) + (3+1)(y+1) = 25 \implies 3x - 6 + 4y + 4 = 25 \implies 3x + 4y = 27.$$

בדיקה: P על הישר, כי $3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 27$. השיפוע של המשיק הוא $-\frac{3}{4}$, ושל הרדיוס MP הוא $\frac{4}{3}$. המכפלה שלהם היא -1 , כמו שצריך.

שימוש 2: משיקים מנקודה שמחוץ למעגל



סרטוט 8: שני קטעי משיק מ- A , כל אחד באורך 12.

מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שני משיקים. תהי T נקודת ההשקה של אחד מהם. לפי משפט 1, $MT \perp AT$, ולכן המשולש MTA ישר-זווית ב- T . נסמן $d = MA$ לפי משפט פיתגורס, אורך קטע המשיק הוא

$$AT = \sqrt{d^2 - R^2}.$$

הנוסחה תלויה רק ב- d וב- R , ולכן **שני קטעי המשיקים שיוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.**

דוגמה מספרית

המעגל $x^2 + y^2 = 25$ והנקודה $A(13, 0)$. כאן $d = 13$ ו- $R = 5$, ולכן $AT = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ (משולש 5-12-13).

כדי למצוא את נקודות ההשקה, נסמן $T(x_T, y_T)$. לפי משפט 2, המשיק ב- T הוא $x_T x + y_T y = 25$, והוא עובר דרך $A(13, 0)$:

$$13x_T + 0 \cdot y_T = 25 \implies x_T = \frac{25}{13}.$$

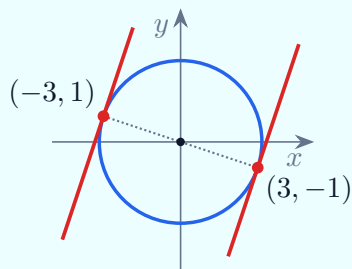
T על המעגל, ולכן $y_T^2 = 25 - \frac{625}{169} = \frac{3600}{169}$, כלומר $y_T = \pm \frac{60}{13}$. נקודות ההשקה הן $T_{1,2}(\frac{25}{13}, \pm \frac{60}{13})$. והמשיקים הם $5x \pm 12y = 65$.

להעמקה: מיתר ההשקה. הקטע שמחבר את שתי נקודות ההשקה נקרא **מיתר ההשקה**, והוא מונח על הישר $13x = 25$ (המקווקו בסרטוט). זו הנוסחה של משפט 2 כשמציבים בה את A במקום נקודת ההשקה, וכך זה תמיד: אם $A(x_A, y_A)$ מחוץ למעגל $x^2 + y^2 = R^2$, הישר $x_A x + y_A y = R^2$ עובר דרך שתי נקודות ההשקה. למה? אם $T(x_T, y_T)$ היא נקודת ההשקה, המשיק בה עובר דרך A , ולכן $-x_T x_A + y_T y_A = R^2$ וזה בדיוק אומר ש- T נמצאת על הישר $x_A x + y_A y = R^2$.

שימוש 3: משיקים בשיפוע נתון

לפי משפט 1, ישר משיק למעגל בדיוק כשהמרחק שלו מהמרכז שווה ל- R . המשיק ניצב לרדיוס, ולכן המרחק שלו מהמרכז הוא הרדיוס. ולהפך: אם המרחק הוא R , עקב האנך מהמרכז אל הישר נמצא על המעגל, והישר ניצב שם לרדיוס – ולכן הוא משיק. דרך נוספת, בלי מרחקים: ישר משיק בדיוק כשלמשוואת החיתוך שלו עם המעגל יש פתרון אחד.

דוגמה מספרית



סרטוט 9: שני משיקים מקבילים, בקצות קוטר.

מצאו את המשיקים למעגל $x^2 + y^2 = 10$ שהשיפוע שלהם 3.

נחפש ישר מהצורה $y = 3x + n$, ונציב במשוואת המעגל:

$$x^2 + (3x + n)^2 = 10 \implies 10x^2 + 6nx + n^2 - 10 = 0.$$

לישר יש עם המעגל נקודה משותפת אחת בדיוק כשהדיסקרימיננטה מתאפסת:

$$\Delta = 36n^2 - 40(n^2 - 10) = 400 - 4n^2 = 0 \implies n = \pm 10.$$

המשיקים הם $y = 3x + 10$ ו- $y = 3x - 10$. נקודות ההשקה שלהם, $(-3, 1)$ ו- $(3, -1)$, הן שני הקצוות של אותו קוטר.

בדיקה בדרך אחרת: לפי נוסחת המרחק של נקודה מישור, המרחק של הישר $3x - y + n = 0$ מהראשית הוא $\frac{|n|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$ בדיוק הרדיוס.

הידעתם?

שני הכיוונים של משפט 1 מופיעים כבר ב"יסודות" של אוקלידס (בערך 300 לפני הספירה), בספר השלישי: טענה 16 היא כיוון א' שלנו (הישר שניצב לקוטר בקצהו נמצא מחוץ למעגל), וטענה 18 היא כיוון ב'. בטענה 36 באותו ספר מופיע המשפט שנקרא היום **משפט חותך ומשיק**: ריבוע קטע המשיק שווה למכפלת החותך כולו בחלקו החיצוני. כשהחותך עובר דרך המרכז, זו בדיוק הנוסחה משימוש 2: $(d+R)(d-R) = d^2 - R^2$. בטענה 16 אוקלידס מוסיף שבין המשיק לקשת אי אפשר להכניס אף ישר נוסף, ושה"זווית" שבין המשיק לקשת קטנה מכל זווית חדה. לזווית המוזרה הזאת קוראים **זווית קרן** (horn angle), ומתמטיקאים התווכחו עד המאה ה-17 אם היא בכלל זווית.

במאה ה-17 השתמש רנה דקארט במשפט 1 כדי למצוא משיקים לעקומות אחרות ("הגאומטריה", 1637). הוא חיפש מעגל שנוגע בעקומה בנקודה הרצויה, כלומר מעגל שמשוואת החיתוך שלו עם העקומה מקבלת שם שורש כפול. הרדיוס של המעגל הזה ניצב לעקומה, והמשיק ניצב לרדיוס.

⚠ טעות נפוצה

- **הנקודה חייבת להיות על המעגל.** נקודה שמחוץ למעגל נותנת בנוסחה ישר אחר, שאינו משיק: הישר של מיתר ההשקה משימוש 2.
- **סימני המרכז.** במעגל $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$ המרכז הוא $(2, -1)$, ולכן בנוסחה מופיע $(y_1 + 1)(y + 1)$, ולא $(y_1 - 1)(y - 1)$.
- **R^2 ולא R .** באגף ימין של משוואת המשיק נשאר R^2 , כמו במשוואת המעגל: 25 ולא 5.
- **"נקודה משותפת אחת" עובד במעגל, לא בכל עקומה.** הישר האנכי $x = 1$ פוגש את הפרבולה $y = x^2$ בנקודה אחת, אבל אינו משיק לה (ראו את המסמך "המשיק לפרבולה").
- **ניצב לרדיוס – אבל באיזו נקודה?** ישר שניצב לרדיוס באמצעו חותך את המעגל. המשיק עובר דרך **קצה הרדיוס**.

9 בדקו את עצמכם

✓ שש שאלות קצרות

1. מצאו את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$ בנקודה $(-4, 3)$.
2. מצאו את משוואת המשיק למעגל $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$ בנקודה $(4, 3)$.
3. מהנקודה $A(6, 8)$ מעבירים משיק למעגל $x^2 + y^2 = 36$. מה אורך קטע המשיק?
4. מצאו את המשיקים למעגל $x^2 + y^2 = 20$ שהשיפוע שלהם 2, ואת נקודות ההשקה.
5. האם הישר $x + y = 4$ משיק למעגל $x^2 + y^2 = 8$? אם כן, באיזו נקודה?
6. השאלה מתיבת "עצרו ובדקו": מה מקבלים בצעד 4 של כיון א' כש $Q = P$, ומה זה אומר?

תשובות

1. לפי משפט 2: $-4x + 3y = 25$. בדיקה: $(-4) \cdot (-4) + 3 \cdot 3 = 25$.
2. הנקודה על המעגל, כי $3^2 + 1^2 = 10$. המשיק: $(4 - 1)(x - 1) + (3 - 2)(y - 2) = 10$, כלומר $3x + y = 15$.
3. $d^2 = 6^2 + 8^2 = 100$, ולכן אורך קטע המשיק הוא $\sqrt{100 - 36} = 8$.
4. נציב $y = 2x + n$ ונקבל $5x^2 + 4nx + n^2 - 20 = 0$, ו- $400 - 4n^2 = 0$ (כי $\Delta = 0$). $\Delta = 16n^2 - 20(n^2 - 20) = 400 - 4n^2$. נציב $n = \pm 10$: המשיק $y = 2x + 10$ נוגע במעגל בנקודה $(-4, 2)$, והמשיק $y = 2x - 10$ בנקודה $(4, -2)$.
5. כן. נציב $y = 4 - x$ ונקבל $2x^2 - 8x + 8 = 0$, כלומר $(x - 2)^2 = 0$: נקודה משותפת אחת, $(2, 2)$. ובדרך אחרת: $(2, 2)$ על המעגל, והמשיק בה לפי משפט 2 הוא $2x + 2y = 8$, כלומר $x + y = 4$.
6. בצעד 4 מקבלים $PQ = 0$ ו- $R^2 = MQ^2$, כלומר Q על המעגל – אבל זו נקודת ההשקה P עצמה.