

נפח הכדור ושטח הפנים שלו

מאיפה מגיעות הנוסחאות? ארכימדס, עיקרון קוואליירי ואינטגרלים

כ־20 דקות קריאה

5 הוכחות

גאומטריה במרחב ואינטגרלים

3 ו־5 יח"ל

מה כדאי לדעת קודם

- נפח גליל, $\pi R^2 h$, ונפח חרוט, $\frac{1}{3} \pi R^2 h$.
- משפט פיתגורס.
- להוכחות 2, 4 ו־5: נגזרת ואינטגרל מסוים.

מה תמצאו כאן

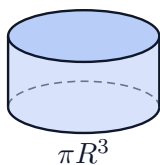
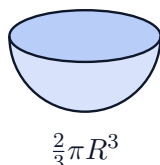
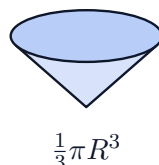
- אינטואיציה: חרוט, חצי כדור וגליל שהנפחים שלהם ביחס 3 : 2 : 1.
- הנפח, הוכחה 1: ארכימדס ועיקרון קוואליירי.
- הנפח, הוכחה 2 (להעמקה): גוף סיבוב ואינטגרל.
- שטח הפנים: פירמידות דקות, קליפות של בצל – ו"קופסת הכובע" של ארכימדס.
- דוגמאות, טעויות נפוצות ושאלות לבדיקה עצמית.

1 האינטואיציה: שלוש כוסות

האינטואיציה

ניקח שלוש "כוסות" שלכולן אותו רדיוס R ואותו גובה R : חרוט שהחוד שלו למטה, קערה בצורת חצי כדור, וגליל. נמלא את החרוט במים ונשפוך אותם לקערה: צריך בדיוק **שני** חרוטים כדי למלא את הקערה, ו**שלושה** כדי למלא את הגליל. כלומר, הנפחים מתייחסים כמו 3 : 2 : 1.

את הנפחים של הגליל ושל החרוט קל לחשב: $\pi R^3 = R \cdot \pi R^2$ ו־ $\frac{1}{3} \pi R^3$. הנפח של חצי הכדור נמצא בדיוק באמצע ביניהם: $\frac{2}{3} \pi R^3$. לכן הנפח של הכדור כולו הוא $\frac{4}{3} \pi R^3 = 2 \cdot \frac{2}{3} \pi R^3$.



סרטוט 1: חרוט, חצי כדור וגליל עם אותו רדיוס R ואותו גובה R . הנפחים: 3 : 2 : 1.

ניסוי עם תפוז

מסרטטים על דף ארבעה עיגולים ברדיוס של התפוז (אפשר לחתוך תפוז אחר לשניים ולהעתיק את החתך). מקלפים את התפוז, ומכסים בחתיכות הקליפה את העיגולים. הקליפה מכסה בערך ארבעה עיגולים – שטח הפנים של כדור הוא $4\pi R^2$, פי 4 משטח של עיגול ברדיוס R .

ובמספרים: לכדור ברדיוס 3 יש נפח $\frac{4}{3} \pi \cdot 27 = 36\pi$ ושטח פנים $4\pi \cdot 9 = 36\pi$. אותו מספר! (אבל ביחידות שונות: סמ"ק וסמ"ר).

2 המשפט

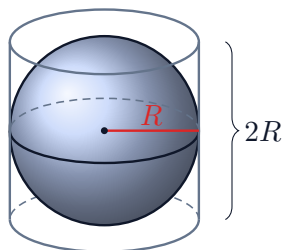
נפח הכדור ושטח הפנים שלו

לכדור שהרדיוס שלו R :

$$S = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

במילים: הנפח הוא שני שלישים מהנפח של הגליל שחוסם את הכדור. שטח הפנים שווה לשטח של ארבעה עיגולים ברדיוס R – וגם לשטח המעטפת של אותו גליל.



סרטוט 2: כדור בתוך הגליל החוסם אותו.

הגליל החוסם: רדיוס R וגובה $2R$. הנפח שלו $2\pi R^3$, $\pi R^2 \cdot 2R$, ושני שלישים ממנו הם $\frac{4}{3}\pi R^3$. שטח המעטפת שלו הוא $2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$.

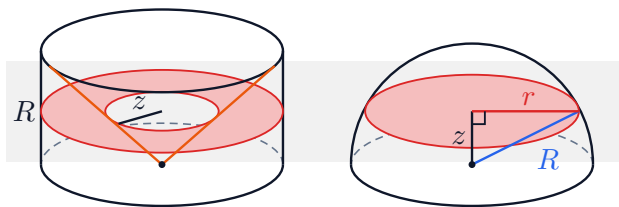
3 הנפח – הוכחה 1: ארכימדס ועיקרון קוואליירי

הרעיון נשווה את חצי הכדור לגוף שאת הנפח שלו כבר יודעים לחשב: גליל שהוציאו ממנו חרוט. נראה שבכל גובה, לשני הגופים יש חתכים יש חתכים באותו שטח.

עיקרון קוואליירי

אם לשני גופים יש אותו גובה, ובכל גובה שטחי החתכים שלהם (במישור שמקביל לבסיס) שווים – אז גם הנפחים שלהם שווים. כמו שתי ערימות של אותם מטבעות: אחת ישרה ואחת עקומה. (את העיקרון הזה מקבלים כעובדה, בלי הוכחה – ראו את המסמך "נפח פירמידה וחרוט").

ניקח חצי כדור ברדיוס R , שמונח על הבסיס השטוח שלו. לידו ניקח גליל ברדיוס R ובגובה R , ונוציא ממנו חרוט: הקודקוד של החרוט במרכז הבסיס התחתון של הגליל, והבסיס של החרוט הוא הבסיס העליון של הגליל. נחתוך את שני הגופים במישור אופקי אחד, בגובה z .



סרטוט 3: חצי כדור, וגליל שהוצא ממנו חרוט. המישור בגובה z חותך עיגול מכחי הכדור וטבעת מהגליל.

נימוק	טענה
פיתגורס במשולש ישר-זווית שקודקודו הם מרכז הכדור, מרכז החתך ונקודה על שפת החתך	1 רדיוס העיגול שבחתך של חצי הכדור: $r^2 = R^2 - z^2$
שטח עיגול	2 שטח העיגול: $\pi r^2 = \pi (R^2 - z^2)$

3 החתך של הגליל פחות החרוט הוא טבעת: רדיוס חיצוני R ורדיוס פנימי z
 החרוט מתרחב מרדיוס 0 בגובה 0 עד רדיוס R בגובה R , ולכן בגובה z הרדיוס שלו z (משולשים דומים)

4 שטח הטבעת: $\pi R^2 - \pi z^2 = \pi (R^2 - z^2)$ עיגול גדול פחות עיגול קטן

5 נפח חצי הכדור הוא $\frac{2}{3}\pi R^3$ צעדים 2 ו-4: שטחי החתכים שווים בכל גובה, ולכן לפי עיקרון קוואליירי הנפחים שווים

6 נפח הכדור הוא $\frac{4}{3}\pi R^3 = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi R^3$ כדור = שני חצאי כדור

מש"ל

✓ עצרו ובדקו

בדקו את הגבהים הקיצוניים: מה החתכים של שני הגופים בגובה $z = 0$, ומה בגובה $z = R$? האם השטחים שווים גם שם?

4 הנפח – הוכחה 2 (להעמקה): גוף סיבוב

הרעיון כדור מתקבל כשמשוברים חצי עיגול סביב ציר ה- x . את הנפח של גוף סיבוב מחשבים באינטגרל: סכום של אינסוף "מטבעות" דקים.

המשוואה של מעגל שהרדיוס שלו R והמרכז שלו בראשית הצירים היא $x^2 + y^2 = R^2$. נבודד את y , ונקבל את הפונקציה של חצי המעגל העליון:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq R.$$

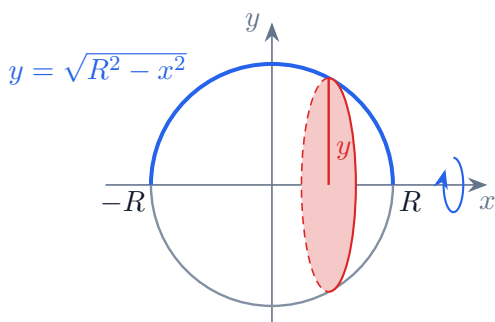
כשמשוברים סביב ציר ה- x את השטח שבין הגרף לציר, כל פרוסה דקה בעובי dx הופכת למטבע: גליל שטוח שהרדיוס שלו y , והנפח שלו $\pi y^2 dx$. לכן הנפח של גוף הסיבוב, מ- $x = a$ עד $x = b$, הוא

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx.$$

נציב את הפונקציה, ונחשב את האינטגרל מ- $-R$ עד R – לאורך כל הקוטר:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R \\ &= \pi \left[\left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) - \left(R^2 \cdot (-R) - \frac{(-R)^3}{3} \right) \right] = \pi \left[\frac{2R^3}{3} - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) \right] \\ &= \pi \left[\frac{2R^3}{3} - \left(-\frac{2R^3}{3} \right) \right] = \pi \cdot \frac{4R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

מש"ל



סרטוט 4: מסובבים חצי עיגול סביב ציר ה- x .

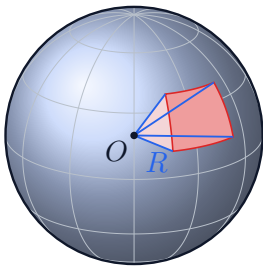
שימו לב: הביטוי $\pi(R^2 - x^2)$ שבתוך האינטגרל הוא בדיוק השטח של החתך מהוכחה 1 (עם x במקום z). שתי ההוכחות "מחברות" את אותם חתכים — ארכימדס פשוט עשה זאת בלי אינטגרלים, בעזרת גופים שאת הנפח שלהם הוא כבר הכיר.

5 שטח הפנים: שלוש דרכים

את השטח של משטח עקום קשה למדוד ישירות: אי אפשר לפרוש את קליפת התפוז על דף בלי לקרוע אותה. הטריק בשתי הדרכים הראשונות הוא להשתמש בנפח, שכבר מצאנו.

הערה כנה: מה בכלל פירוש "שטח" של משטח עקום? מגדירים אותו בעזרת גבול: מקרבים את המשטח בחתיכות שטוחות קטנות, ובודקים לאיזה מספר מתקרב סכום השטחים שלהן. כל אחת משלוש הדרכים שלפנינו נשענת על הנחה טבעית אחת, שלא נוכיח כאן: בהוכחה 3 — שגוף דק מהמרכז אל טלאי עקום מתנהג כמו פירמידה; בהוכחה 4 — שהנפח של קליפה דקה הוא בערך שטח כפול עובי; בהוכחה 5 — שפס צר של המשטח הוא בערך טבעת משופעת. העובדה ששלוש דרכים שונות כל כך נותנות אותה תשובה היא סימן טוב לכך שההנחות סבירות.

הוכחה 3: הרבה פירמידות דקות



נחלק את פני הכדור לטלאים קטנים מאוד, כמו הטלאים של כדורגל, רק הרבה יותר קטנים. נחבר כל טלאי למרכז הכדור O , וכך נחלק את הכדור לחלקים צרים. כל חלק כזה הוא כמעט פירמידה: הבסיס שלה הוא הטלאי, והגובה שלה הוא בערך R . נסמן את השטחים של הטלאים ב- $S_1, S_2, \dots, S_n$. הסכום שלהם הוא שטח הפנים S .

סרטוט 5: פירמידה דקה: מהמרכז אל טלאי קטן.

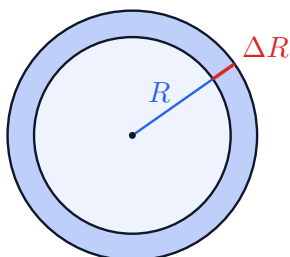
נימוק	טענה
הכדור מורכב מכל הפירמידות; נפח פירמידה הוא שליש משטח הבסיס כפול הגובה	$V \approx \frac{1}{3}S_1R + \frac{1}{3}S_2R + \dots + \frac{1}{3}S_nR$ ①
גורם משותף; סכום שטחי הטלאים הוא S	$V \approx \frac{1}{3}R(S_1 + S_2 + \dots + S_n) = \frac{1}{3}R \cdot S$ ②
ככל שהטלאים קטנים יותר, הקירוב מדויק יותר, ובגבול יש שוויון. הנפח — מהוכחות 1 ו-2	$\frac{1}{3}R \cdot S = \frac{4}{3}\pi R^3$ ③
כפל שני האגפים ב- $\frac{3}{R}$	$S = 4\pi R^2$ ④

מש"ל

ואם רוצים לדייק: אפשר לעטוף את הכדור בפאון שכל הפאות שלו **משיקות** לכדור, כמו כדורגל שתפור מטלאים שטוחים. הפירמידה מהמרכז אל כל פאה היא פירמידה אמיתית, והגובה שלה הוא **בדיוק** R , כי הרדיוס לנקודת ההשקה מאונך לפאה. לכן הנפח של הפאון שווה בדיוק ל- $\frac{1}{3}R$ כפול שטח הפנים שלו. כשהפאות נעשות קטנות, הנפח של הפאון שואף ל- V והשטח שלו שואף ל- S — וזה בדיוק צעד 3.

אותו רעיון במישור: עיגול הוא כמו פיצה שחתוכה להרבה משולשים דקים מהמרכז. הגובה של כל משולש הוא בערך R , וסכום הבסיסים הוא ההיקף $2\pi R$. לכן השטח הוא $\pi R^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R$ — במישור מופיע $\frac{1}{2}$ (שטח משולש), ובמרחב $\frac{1}{3}$ (נפח פירמידה).

הוכחה 4: קליפות של בצל (נגזרת)



סרטוט 6: חתך דרך המרכז: קליפה בעובי ΔR .

נעטוף את הכדור בשכבה דקה בעובי ΔR , כמו קליפה של בצל. מצד אחד, הנפח של הקליפה הוא ההפרש בין שני כדורים:
 $\Delta V = V(R + \Delta R) - V(R)$. מצד שני, קליפה דקה היא כמעט "דף" שהשטח שלו S והעובי שלו ΔR , ולכן $\Delta V \approx S \cdot \Delta R$. מכאן $S \approx \frac{\Delta V}{\Delta R}$, והקירוב נעשה מדויק כשהקליפה נעשית דקה יותר ויותר.

נימוק

טענה

הנפח של הקליפה

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi (R + \Delta R)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (1)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi (3R^2 \Delta R + 3R (\Delta R)^2 + (\Delta R)^3) \quad (2)$$

חילוק ב- ΔR

$$\frac{\Delta V}{\Delta R} = 4\pi R^2 + 4\pi R \Delta R + \frac{4}{3}\pi (\Delta R)^2 \quad (3)$$

שני המחזורים האחרונים שואפים ל-0

$$S = \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta R} = 4\pi R^2 \quad (4)$$

מש"ל

בשפה של נגזרות: $S = V'(R) = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)' = \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 = 4\pi R^2$. שטח הפנים הוא הנגזרת של הנפח לפי **הרדיוס**! גם במישור זה נכון: $(\pi r^2)' = 2\pi r$ – ההיקף של מעגל הוא הנגזרת של שטח העיגול.

דוגמה מספרית: כמה מדויק הקירוב?

בכדור ברדיוס $R = 1$, עם קליפה בעובי $\Delta R = 0.01$, מקבלים

$$\frac{\Delta V}{\Delta R} = 4\pi (1 + 0.01 + 0.00003) \approx 12.692,$$

ואילו $4\pi \approx 12.566$. ההפרש הוא בערך 1%, והוא הולך ונעלם כש- ΔR קטן.

הוכחה 5 (להעמקה): "קופסת הכובע" של ארכימדס

באוניברסיטה לומדים נוסחה לשטח של משטח סיבוב – המשטח שמתקבל כשמסובבים את הגרף של $y = f(x)$ סביב ציר ה- x :

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

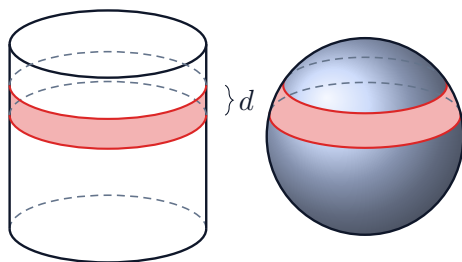
מאיפה היא באה? פס צר של המשטח, בין x ל- $x + \Delta x$, הוא כמעט טבעת משופעת. האורך שלה הוא ההיקף $2\pi y$, והרוחב שלה הוא אורך הקטע המשופע:

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x.$$

נשתמש באותה פונקציה, $y = \sqrt{R^2 - x^2}$:

נימוק	טענה
נגזרת של שורש של פונקציה	$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ ①
מכנה משותף	$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}$ ②
השורשים $\sqrt{R^2 - x^2}$ מצטמצמים	$2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} = 2\pi \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2\pi R$ ③
אינטגרל של קבוע	$S = \int_{-R}^R 2\pi R dx = 2\pi R [x]_{-R}^R = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$ ④

מש"ל



סרטוט 7: הפס של הכדור והפס של הגליל — אותו שטח.

הפתעה: הביטוי שבתוך האינטגרל יצא **קבוע**, $2\pi R$. כלומר, כל פס של הכדור שנמצא בין שני מישורים מקבילים, שמאונכים לציר הסיבוב ושהמרחק ביניהם d , הוא בשטח $2\pi R \cdot d$ — בדיוק כמו הפס של הגליל החוסם בין אותם שני מישורים! ליד הקטבים הפס של הכדור קצר יותר (ההיקף $2\pi y$ קטן), אבל הוא משופע יותר ולכן רחב יותר, ושתי ההשפעות מתקזזות בדיוק. ארכימדס גילה את זה בלי אינטגרלים. באנגלית קוראים לזה לפעמים "משפט קופסת הכובע" (hat-box theorem). כשהפסים מכסים את כל הכדור, מקבלים שוב $S = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$.

6 הדרכים זז מול זז

הוכחה	מה?	הרעיון	הכלים
1. ארכימדס	נפח	חצי כדור = גליל פחות חרוט	פיתגורס, עיקרון קוואליירי
2. גוף סיבוב	נפח	סכום של אינסוף מטבעות דקים	אינטגרל (להעמקה)
3. פירמידות דקות	שטח	הכדור = הרבה פירמידות בגובה R	נפח פירמידה, גבול
4. קליפות בצל	שטח	שכבה דקה = שטח כפול עובי	גבול או נגזרת
5. קופסת הכובע	שטח	כל פס של הכדור = פס של הגליל	שטח משטח סיבוב (להעמקה)

7 מה עושים עם הנוסחאות?

שימוש 1: כדור הארץ

הרדיוס של כדור הארץ הוא בערך 6,371 ק"מ. שטח הפנים שלו הוא בערך $4\pi \cdot 6,371^2 \approx 5.1 \cdot 10^8$ קמ"ר — כ־510 מיליון קמ"ר, והנפח שלו בערך $\frac{4}{3}\pi \cdot 6,371^3 \approx 1.08 \cdot 10^{12}$ קמ"ק — יותר מטריליון קילומטרים מעוקבים.

שימוש 2: מהנפח אל הרדיוס

הנפח של כדור הוא 288π . מה שטח הפנים שלו?
ולכן $R^3 = 216$ ו־ $R = 6$. שטח הפנים: $4\pi \cdot 36 = 144\pi$.

שימוש 3: כשהרדיוס גדל פי 2

מנפחים בלון כדורי מרדיוס 10 ס"מ לרדיוס 20 ס"מ. הנפח גדל פי $2^3 = 8$ (בערך מ־4,189 סמ"ק ל־33,510 סמ"ק), אבל שטח הגומי גדל רק פי $2^2 = 4$.

⚠ טעות נפוצה

- **קוטר במקום רדיוס.** בכדור סל שהקוטר שלו 24 ס"מ, הרדיוס הוא $R = 12$.
- **מה מעלים בחזקה?** רק את R : הנפח הוא $\frac{4}{3}\pi R^3$, ולא $(\frac{4}{3}\pi R)^3$.
- **שטח פנים מול שטח עיגול.** שטח הפנים של כדור, $4\pi R^2$, גדול פי 4 משטח של עיגול ברדיוס R .
- **חצי כדור.** השטח המעוגל של חצי כדור הוא $2\pi R^2$. אם יש לו גם מכסה שטוח, מוסיפים את שטח העיגול πR^2 , ומקבלים $3\pi R^2$.
- **יחידות.** שטח נמדד ביחידות ריבועיות (סמ"ר), ונפח — ביחידות מעוקבות (סמ"ק).

🕒 הידעתם?

ארכימדס מסירקוזה (בערך 287–212 לפני הספירה) הוכיח בחיבור "על הכדור והגליל" שגם הנפח וגם שטח הפנים של כדור הם שני שלישים מאלה של הגליל שחוסם אותו (כשסופרים בשטח של הגליל גם את שני הבסיסים: $6\pi R^2$ לעומת $4\pi R^2$). לפי פלוטרכוס, ארכימדס ביקש שעל המצבה שלו יחרטו כדור בתוך גליל. קיקרו, המדינאי הרומי, סיפר שכאשר כיהן בסיציליה (בשנת 75 לפני הספירה) מצא את הקבר המוזנח וזיהה אותו לפי הכדור והגליל שהיו חרוטים עליו.

בחיבור אחר, "השיטה", ארכימדס תיאר איך מצא את הנפח מלכתחילה: הוא "שקל" בדמיונו פרוסות של כדור, חרוט וגליל על מאזניים, ורק אחר כך הוכיח את התוצאה בהוכחה קפדנית. באותו חיבור הוא מספר גם איך ניחש את שטח הפנים: כמו שעיוגל שווה בשטחו למשולש שהבסיס שלו הוא ההיקף והגובה שלו הוא הרדיוס, כך כדור שווה בנפחו לחרוט שהבסיס שלו הוא שטח הפנים והגובה שלו הוא הרדיוס — בדיוק הרעיון של הוכחה 3 ושל "הפיצה" שאחריה. החיבור הזה התגלה מחדש רק ב־1906, בכתב יד עתיק שנמחק ונכתב עליו ספר תפילות.

גם בסין הגיעו לנוסחה בעזרת חתכים שווים: זו גנג, בנו של המתמטיקאי זו צ'ונגז', השתמש בעיקרון כזה בסביבות המאה ה־5 או ה־6 — יותר מאלף שנה לפני קוואליירי.

8 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

1. מצאו את הנפח ואת שטח הפנים של כדור ברדיוס 3.
2. שטח הפנים של כדור הוא 64π . מצאו את הרדיוס שלו ואת הנפח שלו.
3. מצאו את הנפח של חצי כדור ברדיוס 6, ואת שטח הפנים שלו, כולל הבסיס השטוח.
4. כדור חסום בגליל (רדיוס R , גובה $2R$). לחרוט יש אותו בסיס כמו לגליל, והגובה שלו $2R$. מצאו את היחס בין הנפחים של החרוט, הכדור והגליל.
5. בהוכחה 1, חשבו את השטחים של שני החתכים בגובה $z = \frac{R}{2}$.
6. הרדיוס של כדור גדל ב-1%. בכמה אחוזים, בערך, גדלים הנפח ושטח הפנים?

תשובות

1. $S = 4\pi \cdot 9 = 36\pi \approx 113.1$, $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 27 = 36\pi \approx 113.1$
2. $4\pi R^2 = 64\pi$, ולכן $R = 4$, $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 64 = \frac{256}{3}\pi \approx 268.1$
3. השטח: $V = \frac{2}{3}\pi \cdot 216 = 144\pi$. $2\pi \cdot 36 + \pi \cdot 36 = 108\pi$
4. חרוט: $\frac{2}{3}\pi R^3$; $\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 2R$; כדור: $\frac{4}{3}\pi R^3$; גליל: $2\pi R^3$. היחס הוא 3 : 2 : 1 – שוב!
5. בחצי הכדור: $r^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3}{4}R^2$, והשטח $\frac{3}{4}\pi R^2$. בטבעת: $\pi R^2 - \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi R^2$. שווים.
6. $1.01^3 \approx 1.0303$ ו- $1.01^2 = 1.0201$: הנפח גדל בכ-3%, ושטח הפנים בכ-2%.

עצרו ובדקו: בגובה $z = 0$ החתך של חצי הכדור הוא עיגול ברדיוס R , והטבעת היא עיגול שלם ברדיוס R (הרדיוס הפנימי 0) – שניהם πR^2 . בגובה $z = R$ מחצי הכדור נשארת נקודה אחת, והטבעת מצטמצמת למעגל, כלומר לקו בלי שטח (הרדיוס הפנימי שווה לחיצוני). שני השטחים 0.