נפח פירמידה וחרוט

למה דווקא שליש? קובייה, פרוסות דקות ועיקרון קוואליירי

חטיבת ביניים ותיכון | גאומטריה במרחב | 2 הוכחות | כ־15 דקות קריאה

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: למה הנפח הוא שליש מהמנסרה — ולא חצי.
- הוכחה 1: קובייה שמתפרקת לשלוש פירמידות זהות, ועיקרון קוואליירי.
- הוכחה 2: פרוסות דקות — מסכום של ריבועים ועד אינטגרל.
- החרוט: למה גם לו מתאימה אותה נוסחה.
- דוגמאות, טעויות נפוצות ושאלות לבדיקה עצמית.

מה כדאי לדעת קודם

- נפח מנסרה וגליל: שטח הבסיס כפול הגובה.
- צורות דומות: יחס השטחים שווה לריבוע של יחס הדמיון.
- משפט תאלס.
- להעמקה: גבולות ואינטגרלים.

1 האינטואיציה: למה שליש, ולא חצי?

האינטואיציה

את הנפח של מנסרה או של גליל מחשבים בקלות: שטח הבסיס כפול הגובה. אפשר לחשוב עליהם כעל ערימה של דפים זהים: כל דף הוא עותק של הבסיס, והערימה מגיעה עד הגובה h.
גם פירמידה וחרוט בנויים מ״דפים״, אבל הדפים שלהם הולכים וקטנים בדרך אל הקודקוד, ולכן הנפח קטן יותר. בכמה? במישור יש לנו רמז: משולש שנמצא בתוך מלבן עם אותו בסיס ואותו גובה תופס בדיוק **חצי** מהמלבן. אבל במרחב הדפים קטנים מהר יותר: כשהרוחב קטן פי 2, השטח קטן פי 4. לכן הפירמידה תופסת פחות מחצי מהמנסרה — ובהמשך נוכיח שבדיוק **שליש**.

סרטוט 1: משולש תופס חצי מהמלבן שיש לו אותו בסיס ואותו גובה. חרוט תופס רק שליש מהגליל.

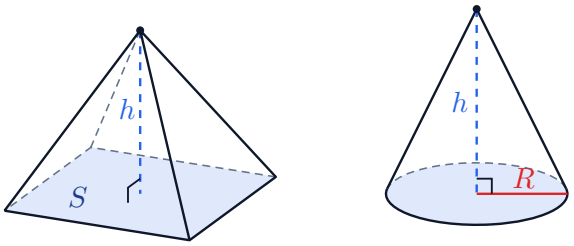
© אור בן שטרית · אינסוף

ניסוי שאפשר לעשות במטבח

ממלאים חרוט חלול באורז, ושופכים את האורז לכלי בצורת גליל שיש לו אותו בסיס ואותו גובה. אחרי שלושה חרוטים בדיוק — הגליל מלא.
במספרים: לפירמידה שהבסיס שלה ריבוע 6×6 והגובה שלה 10 יש נפח $\frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 10 = 120$. למנסרה עם אותו בסיס ואותו גובה יש נפח $36 \cdot 10 = 360$ — פי 3 בדיוק.

2 המשפט

פירמידה היא גוף שהבסיס שלו מצולע, וכל קודקודי הבסיס מחוברים לנקודה אחת שמחוץ למישור הבסיס — **הקודקוד** (ראש הפירמידה). ב**חרוט** הבסיס הוא עיגול. **הגובה** h הוא המרחק מהקודקוד אל מישור הבסיס: אורך האנך שיורד מהקודקוד אל המישור. זה לא אורך של מקצוע צדדי, ולא אורך של קו יוצר.



סרטוט 2: הגובה h מאונך למישור הבסיס.

נפח פירמידה וחרוט

לכל פירמידה ולכל חרוט ששטח הבסיס שלהם S והגובה שלהם h:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h}$$

ובחרוט, שהבסיס שלו עיגול ברדיוס R, הנוסחה היא $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

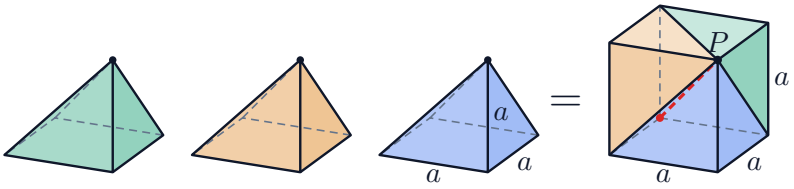
במילים: הנפח הוא שליש משטח הבסיס כפול הגובה. הנוסחה נכונה לכל צורה של בסיס, וגם לפירמידה ולחרוט "משופעים", שהקודקוד שלהם לא נמצא מעל מרכז הבסיס.

3 הוכחה 1: קובייה, מתיחה ועיקרון קוואליירי

הרעיון נמצא פירמידה אחת שאת הנפח שלה אפשר ממש "לראות" — בתוך קובייה. אחר כך נראה שכל פירמידה אחרת עם אותו שטח בסיס ואותו גובה מתנהגת בדיוק כמוה.

שלב א': שלוש פירמידות בתוך קובייה

ניקח קובייה שאורך המקצוע שלה a, ונבחר אחד מקודקודיה, P. שלוש מהפאות של הקובייה נוגעות ב־P, ושלוש לא נוגעות בו. נחבר את P לקודקודים של שלוש הפאות ה"רחוקות". מתקבלות שלוש פירמידות: לכולן אותו קודקוד, P, והבסיס של כל אחת מהן הוא אחת מהפאות הרחוקות.



סרטוט 3: קובייה = שלוש פירמידות זהות. בכל צבע — פירמידה אחת. הקו האדום (המוסתר) משותף לשלושתן.

	טענה	נימוק
1	שלוש הפירמידות ממלאות יחד את כל הקובייה, בלי חפיפות	ראו את ההסבר שמתחת לטבלה
2	בכל אחת: הבסיס ריבוע $a \times a$, והקודקוד P נמצא בדיוק מעל פינה של הבסיס, בגובה a	המקצוע של הקובייה שיוצא מ־P מאונך לפאה הרחוקה
3	שלוש הפירמידות חופפות, ולכן הנפחים שלהן שווים	סיבוב ב־ $120°$ סביב האלכסון האדום מחזיר את הקובייה למקומה, ומעביר כל פירמידה לבאה אחריה
4	הנפח של כל אחת: $\frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}\cdot a^2 \cdot a = \frac{1}{3}\cdot S \cdot h$	שליש מנפח הקובייה, עם $S = a^2$ ו־$h = a$

למה אין חורים ואין חפיפות? נשים את P בראשית הצירים. כך הקובייה היא אוסף כל הנקודות (x, y, z) שבהן $0 \le x, y, z \le a$, והפירמידה שהבסיס שלה בפאה $x = a$ היא בדיוק אוסף הנקודות של הקובייה שבהן x הוא הגדול מבין שלושת השיעורים — ובאותו אופן ל־y ול־z. לכל נקודה יש שיעור גדול ביותר, ולכן כל נקודה נמצאת באחת הפירמידות. נקודות שבהן יש "תיקו" נמצאות על פאה משותפת לשתי פירמידות, ולפאה אין נפח.

עצרו ובדקו

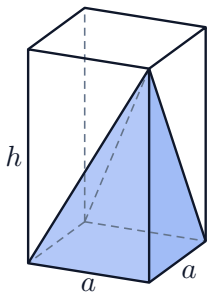
בסרטוט 3, איפה בדיוק נמצא הגובה של הפירמידה הכחולה? ואם אורך המקצוע של הקובייה הוא 6 ס"מ — מה הנפח של כל אחת משלוש הפירמידות?

שלב ב': מתיחה — לכל גובה

נמתח את הקובייה כלפי מעלה פי k, ונקבל תיבה $a \times a \times h$, כאשר $h = ka$. כל חלק של הקובייה נמתח יחד איתה, ולכן הנפח של כל חלק גדל פי k: כל קובייה קטנטנה שבתוכה הופכת לתיבה גבוהה ממנה פי k. (את זה נקבל בלי הוכחה: הנחנו שאפשר למלא כל גוף בקוביות קטנטנות כמעט בלי שארית — זו בעצם המשמעות של "נפח" — וגם בהנחה הזאת מסתתר צעד של גבול.)

שלוש הפירמידות הופכות לשלוש פירמידות שממלאות את התיבה, ולכולן נפח שווה: $\frac{1}{3}ka^3$. לאחת מהן (הכחולה) הבסיס הוא הפאה התחתונה של התיבה. שטח הבסיס שלה $S = a^2$, הגובה שלה $h = ka$, ולכן

$$V = \frac{1}{3}ka^3 = \frac{1}{3}\cdot a^2 \cdot ka = \frac{1}{3}\cdot S \cdot h.$$



סרטוט 4: הקובייה אחרי מתיחה.

שלב ג׳: עיקרון קוואליירי – לכל בסיס

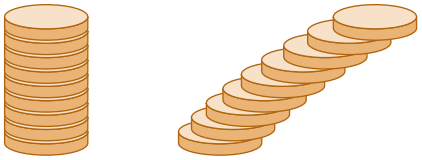
עיקרון קוואליירי

אם לשני גופים יש אותו גובה, ובכל גובה שטחי החתכים שלהם (במישור שמקביל לבסיס) שווים — אז גם הנפחים שלהם שווים.

את העיקרון הזה **לא נוכיח**: מקבלים אותו כעובדה יסודית על נפח (הוכחה מלאה שלו דורשת חשבון אינטגרלי).

אפשר לראות את זה בעזרת ערימה של מטבעות: אם מזיזים את המטבעות הצידה, הערימה משנה צורה, אבל הנפח שלה לא משתנה — כל מטבע נשאר אותו מטבע.

כך גם בגופים: נפרוס כל גוף ל״מטבעות״ דקים מאוד. אם בכל גובה שני ה״מטבעות״ שווים בשטח, אז הם שווים גם בנפח — וכך גם הסכום של כולם. אבל ״מטבע״ דק של פירמידה הוא רק **כמעט** מנסרה, ולכן מאחורי ההסבר הזה מסתתר צעד של גבול. בתיבת ״הידעתם?״ נראה שבלי צעד ״אינסופי״ כזה אי אפשר להוכיח את השליש.



סרטוט 5: אותם מטבעות — אותו נפח.

עכשיו ניקח פירמידה כלשהי, ששטח הבסיס שלה S והגובה שלה h, ונשווה אותה לפירמידה הכחולה משלב ב׳, שהבסיס שלה ריבוע ששטחו $a^2 = S$ ושגם הגובה שלה הוא h.

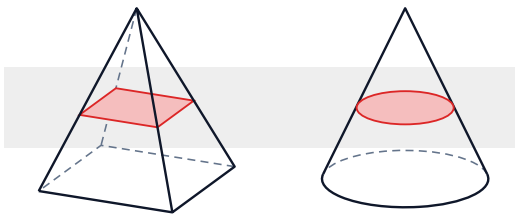
	טענה	נימוק
1	החתך במרחק z מהקודקוד דומה לבסיס, ביחס דמיון $\frac{z}{h}$	המישור המקביל לבסיס חותך מכל מקצוע צדדי, מהקודקוד, קטע שאורכו $\frac{z}{h}$ מאורך המקצוע (משפט תאלס)
2	$S(z) = S \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2$	יחס השטחים של צורות דומות שווה לריבוע של יחס הדמיון
3	לשתי הפירמידות יש אותו שטח חתך בכל גובה	השטח $S(z)$ תלוי רק ב־S וב־h — לא בצורת הבסיס ולא במקום של הקודקוד
4	$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$	לפי עיקרון קוואליירי ולפי שלב ב׳

מש״ל ■

והחרוט? גם בחרוט החתך במרחק z מהקודקוד הוא עיגול שדומה לבסיס ביחס $\frac{z}{h}$, ולכן השטח שלו הוא

$$\pi R^2 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2 = S \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2$$

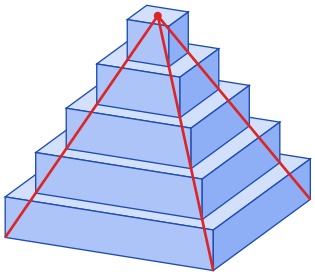
— בדיוק כמו בפירמידה. לפי עיקרון קוואליירי, לחרוט ולפירמידה עם אותו S ואותו h יש אותו נפח: $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.



סרטוט 6: אותו S, אותו h: החתכים שווים בכל גובה.

4 הוכחה 2: פרוסות דקות

הרעיון נפרוס את הפירמידה לשכבות דקות. כל שכבה היא כמעט מנסרה, ואת הנפח של מנסרה אנחנו יודעים לחשב. ככל שהשכבות דקות יותר, הקירוב מדויק יותר, ובגבול מקבלים את הנפח המדויק.



סרטוט 7: $n=5$ שכבות. בקווים אדומים — הפירמידה.

נחלק את הגובה h ל־n חלקים שווים, ונחתוך את הפירמידה במישורים שמקבילים לבסיס. בכל שכבה נבנה מנסרה שגובהה $\frac{h}{n}$, והבסיס שלה הוא החתך התחתון (הגדול) של השכבה. בשכבה מספר k (סופרים מהקודקוד) החתך הזה נמצא במרחק $\frac{kh}{n}$ מהקודקוד, ולכן השטח שלו הוא $S\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2$ (ראו את צעדים 1–2 בשלב ג׳). יחד, המנסרות יוצרות ״פירמידת מדרגות״ שבולטת קצת מחוץ לפירמידה.

נחשב את סכום הנפחים של כל המנסרות, V_n:

	טענה	נימוק
1	$V_n=\frac{h}{n}\left[S\left(\frac{1}{n}\right)^2+S\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+S\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$	סכום הנפחים של n המנסרות
2	$V_n=\frac{Sh}{n^3}\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)$	הוצאת גורם משותף
3	$V_n=\frac{Sh}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	נוסחת סכום הריבועים (ראו למטה)
4	$V_n=\frac{Sh}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$	חילקנו את כל אחד משלושת הגורמים ב־n
5	$V_n\to\frac{Sh}{6}\cdot1\cdot2=\frac{1}{3}Sh$	כאשר $n\to\infty$, $\frac{1}{n}\to0$

נוסחת סכום הריבועים היא $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ואפשר להוכיח אותה באינדוקציה. בדיקה קטנה: $1+4+9=14$, וגם $\frac{3\cdot4\cdot7}{6}=14$.

רגע — המדרגות גדולות מהפירמידה! נכון. לכן נבנה גם מדרגות ״מבפנים״: בכל שכבה נשים מנסרה שהבסיס שלה הוא החתך **העליון** (הקטן) של השכבה. באותו חישוב בדיוק מקבלים שסכום הנפחים שלהן הוא $V'_n=\frac{Sh}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$. הנפח האמיתי ״כלוא״ בין שני הקירובים: $V'_n<V<V_n$. שני הקירובים שואפים ל־$\frac{1}{3}Sh$, ולכן לנפח אין ברירה: $V=\frac{1}{3}Sh$.

n	1	5	10	100	1000
$V'_n\div(Sh)$ (מבפנים)	0	0.24	0.285	0.32835	0.3328335
$V_n\div(Sh)$ (מבחוץ)	1	0.44	0.385	0.33835	0.3338335

מש״ל ■

עצרו ובדקו

מה ההפרש $V_n - V'_n$? הראו שהוא שווה לנפח של המדרגה התחתונה בלבד, $\frac{Sh}{n}$, ולכן הוא שואף ל־0.

אותה הוכחה בשפת האינטגרלים (להעמקה)

כש־$n \to \infty$, הסכום "שטח חתך כפול עובי" הופך לאינטגרל. נמקם את הקודקוד בנקודה $z = 0$ על ציר שמאונך לבסיס, ואת הבסיס במישור $z = h$. כך z הוא בדיוק המרחק מהקודקוד, והשטח של החתך במרחק z מהקודקוד הוא $S(z) = \frac{S}{h^2} z^2$:

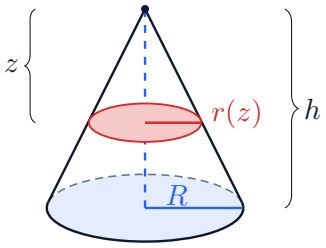
$$V = \int_0^h S(z)\,dz = \int_0^h \frac{S}{h^2}\,z^2\,dz = \frac{S}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h = \frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\,S\,h.$$

הסכום V_n מהסעיף הקודם הוא קירוב של האינטגרל הזה במלבנים (סכום רימן).

החרוט: אותו חישוב עם עיגולים

בחרוט שרדיוס הבסיס שלו R והגובה שלו h, החתך במרחק z מהקודקוד הוא עיגול. נסמן את הרדיוס שלו ב־$r(z)$. בחתך הצירי של החרוט (החתך האנכי שעובר דרך הציר) רואים שני משולשים ישרי־זווית דומים (משפט תאלס), ולכן

$$\frac{r(z)}{R} = \frac{z}{h} \quad\Longrightarrow\quad r(z) = \frac{R}{h}\cdot z.$$



סרטוט 8: החתך במרחק z מהקודקוד.

השטח של החתך:

$$S(z) = \pi\,r(z)^2 = \pi\,\frac{R^2}{h^2}\,z^2.$$

$$V = \int_0^h \pi\,\frac{R^2}{h^2}\,z^2\,dz = \pi\,\frac{R^2}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h = \pi\,\frac{R^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\,\pi R^2 h.$$

ומכיוון ש־πR^2 הוא שטח הבסיס S, קיבלנו שוב $V = \frac{1}{3}Sh$. שימו לב: החרוט אינו פירמידה (הבסיס שלו אינו מצולע), אבל החתכים שלו מתנהגים בדיוק כמו החתכים של פירמידה — וזה כל מה שההוכחה צריכה.

מש"ל ■

5 שתי הדרכים זו מול זו

	הוכחה 1: קובייה וקוואליירי	הוכחה 2: פרוסות דקות
הרעיון	פירוק קובייה לשלוש פירמידות זהות	קירוב במדרגות של מנסרות
הכלים	חפיפה, מתיחה, דמיון, עיקרון קוואליירי	דמיון, סכום ריבועים, גבול או אינטגרל
מאיפה השליש?	שלושה חלקים זהים בקובייה	הגבול של $\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$
היתרון	רואים את השליש בעיניים	מתאימה לכל גוף שיודעים את שטחי החתכים שלו

6 מה עושים עם הנוסחה?

שימושים 1–2: מגביע גלידה ועד גיזה

גביע גלידה (רדיוס 3 ס״מ, גובה 12 ס״מ): $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 36\pi \approx 113.1$ סמ״ק.
הפירמידה הגדולה בגיזה: צלע הבסיס כ־230 מטר, והגובה המקורי כ־146 מטר.
הנפח: $V \approx \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 146 \approx 2{,}574{,}000$ מ״ק — כ־2.6 מיליון מטרים מעוקבים.

שימוש 3: כשנתון קו יוצר ולא גובה

בחרוט, אורך הקו היוצר (הקטע מהקודקוד לשפת הבסיס) הוא 13, ורדיוס הבסיס 5. מצאו את הנפח.

הגובה, הרדיוס והקו היוצר יוצרים משולש ישר־זווית, והקו היוצר הוא היתר שלו. לכן $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, ו־$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 25 \cdot 12 = 100\pi \approx 314.2$.

שימוש 4: חרוט קטום

חרוט שרדיוס הבסיס שלו 6 והגובה שלו 12 נחתך באמצע הגובה, במקביל לבסיס. מה הנפח של החלק התחתון (״חרוט קטום״)?

החלק העליון הוא חרוט קטן: רדיוס 3 וגובה 6. לכן

$$V = \tfrac{1}{3}\pi \cdot 36 \cdot 12 - \tfrac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 6 = 144\pi - 18\pi = 126\pi.$$

שימו לב: החרוט הקטן הוא בדיוק $\frac{1}{8}$ מהגדול, כי כשמקטינים גוף פי 2 בכל הכיוונים, הנפח קטן פי $2^3 = 8$.

טעות נפוצה

- **שוכחים את השליש.** $V = S \cdot h$ הוא הנפח של מנסרה או של גליל, לא של פירמידה או של חרוט.
- **גובה ולא קו יוצר.** h הוא אורך האנך מהקודקוד אל מישור הבסיס. אם נתון קו יוצר (בחרוט) או גובה של פאה (בפירמידה), מוצאים את h בעזרת משפט פיתגורס.
- **קוטר במקום רדיוס.** בחרוט שקוטר הבסיס שלו 10, הרדיוס הוא $R = 5$.
- **יחידות.** נפח נמדד ביחידות מעוקבות: סמ״ק, מ״ק.

הידעתם?

בפפירוס מוסקבה המצרי (בערך 1850 לפני הספירה) כבר מופיע חישוב נכון של נפח פירמידה קטומה. לפי ארכימדס, דמוקריטוס (המאה ה־5 לפני הספירה) היה הראשון שטען שחרוט הוא שליש מהגליל, ואודוקסוס (המאה ה־4 לפני הספירה) היה הראשון שהוכיח זאת. קוואליירי, תלמיד של גלילאו, פרסם את העיקרון שלו ב־1635 (ובסין השתמשו בעיקרון דומה כבר במאה ה־5 או ה־6).
ב־1900 שאל דויד הילברט אם תמיד אפשר לחתוך פירמידה לחלקים ולהרכיב מהם פירמידה אחרת עם אותו בסיס ואותו גובה, כמו שעושים בשטחים במישור. התלמיד שלו, מקס דן, הוכיח עוד באותה שנה שלא. לכן בכל הוכחה של השליש מסתתר צעד ״אינסופי״: גבול, אינטגרל או עיקרון קוואליירי.

7 בדקו את עצמכם

חמש שאלות קצרות

1. מצאו את הנפח של חרוט שרדיוס הבסיס שלו 6 והגובה שלו 10.
2. לפירמידה ישרה שהבסיס שלה ריבוע שצלעו 6 יש נפח 48. מצאו את הגובה שלה, ואת הגובה של כל פאה (המרחק מהקודקוד לאמצע של צלע הבסיס).
3. באיזה מרחק מהקודקוד צריך לחתוך פירמידה, במקביל לבסיס, כדי ששטח החתך יהיה חצי משטח הבסיס?
4. חותכים חרוט באמצע הגובה, במקביל לבסיס. איזה חלק מהנפח נמצא בחרוט הקטן שלמעלה, ואיזה חלק — בחרוט הקטום שלמטה?
5. חשבו את V_4 — הקירוב במדרגות "מבחוץ" עם 4 שכבות — כחלק מ־Sh.

תשובות

1. $V=\frac{1}{3}\pi\cdot 36\cdot 10=120\pi\approx 377$.
2. $h=\frac{3V}{S}=\frac{3\cdot 48}{36}=4$.
גובה הפאה הוא היתר במשולש ישר־זווית שניצביו הם $h=4$ וחצי צלע הבסיס, 3: $\sqrt{4^2+3^2}=5$.
3. צריך $\left(\frac{z}{h}\right)^2=\frac{1}{2}$, כלומר $\frac{z}{h}=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.71$. חותכים במרחק של כ־$0.71h$ מהקודקוד — לא באמצע!
4. החרוט הקטן דומה לגדול ביחס $\frac{1}{2}$, ולכן הנפח שלו הוא $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ מהנפח של החרוט כולו. בחלק התחתון נמצאים $\frac{7}{8}$ מהנפח.
5. $V_4=\frac{Sh}{4^3}\left(1+4+9+16\right)=\frac{30}{64}Sh\approx 0.469\,Sh$.

עצרו ובדקו (שלב א'): הגובה של הפירמידה הכחולה הוא המקצוע האנכי של הקובייה שיורד מ־P (הקודקוד נמצא בדיוק מעל פינת הבסיס). לכל פירמידה נפח $\frac{6^3}{3}=72$ סמ"ק.

עצרו ובדקו (הוכחה 2): ב־V_n יש המחוברים $k=1,\dots,n$ וב־V'_n יש המחוברים $k=0,\dots,n-1$. כל המחוברים המשותפים מתבטלים, ונשאר $V_n-V'_n=\frac{h}{n}\cdot S\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2-0=\frac{Sh}{n}\to 0$.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את המסמך בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנו קטעים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.