האינטגרל המסוים

ממלבנים וטרפזים, דרך השאיפה לאפס, ועד נוסחה בת שורה אחת

כיתות י״א–י״ב | 4–5 יח״ל | חשבון אינטגרלי | 2 הוכחות | כ־15 דקות קריאה

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: פורסים צורה עקומה לפרוסות דקות, כמו לחם.
- מלבנים וטרפזים, ומה פירוש ״השאיפה לאפס״.
- הוכחה 1: כולאים את השטח שמתחת ל־ $y = x^2$ בין שני סכומים — ומקבלים בדיוק $\frac{1}{3}$.
- הוכחה 2: פונקציית השטח, ולמה הנגזרת שלה היא $f(x)$.
- הסימנים $\int$ ו־dx, דוגמאות, טעויות נפוצות ושאלות לבדיקה עצמית.

מה כדאי לדעת קודם

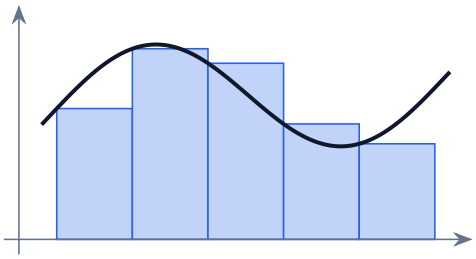
- שטח של מלבן ושל טרפז.
- נגזרת, ונגזרת של חזקה.
- פונקציה קדומה (להוכחה 2).
- הסימן Σ — מוסבר בדרך.

1 האינטואיציה: פורסים את השטח

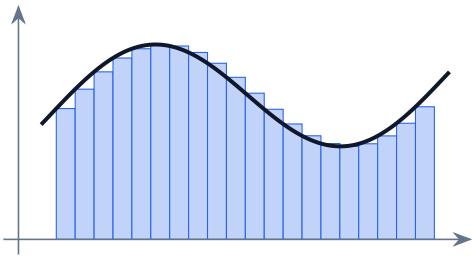
האינטואיציה

את השטח של מלבן, של משולש ושל טרפז אנחנו יודעים לחשב. אבל מה עם צורה שאחד הצדדים שלה הוא קו עקום — למשל התחום שמתחת לגרף של פונקציה? לצורה כזאת אין נוסחה מוכנה.

הרעיון הגדול: לפרוס את הצורה לפרוסות צרות, כמו פרוסות לחם. כל פרוסה היא **כמעט** מלבן, ושטח של מלבן קל לחשב: רוחב כפול גובה. מחליפים כל פרוסה במלבן, מחברים את שטחי המלבנים ומקבלים קירוב לשטח. הקירוב לא מושלם: בכל פרוסה נשארת ״שארית״ קטנה בין המלבן לעקומה. אבל ככל שהפרוסות צרות יותר, השאריות קטנות יותר. **האינטגרל** הוא מה שמקבלים ״בסוף הדרך״, כשהפרוסות צרות לאין שיעור.



5 פרוסות: הרבה ״מדרגות״



20 פרוסות: המדרגות כמעט נעלמות

סרטוט 1: אותו שטח, שתי פריסות. ככל שהפרוסות צרות יותר, המלבנים צמודים יותר לעקומה.

© אור בן שטרית · אינסוף

דוגמה מספרית קטנה

נמדוד את השטח שמתחת לגרף $y = x^2$, מ־$x = 0$ עד $x = 1$. נחלק את הקטע ל־n פרוסות שוות, ובכל פרוסה נבנה שני מלבנים: אחד **נמוך**, שכולו מתחת לעקומה, ואחד **גבוה**, שמכסה את כל הפרוסה. השטח האמיתי נמצא תמיד בין שני הסכומים:

מספר הפרוסות n	מלבנים נמוכים	מלבנים גבוהים	ההפרש
2	0.125	0.625	0.5
4	0.21875	0.46875	0.25
10	0.285	0.385	0.1
100	0.32835	0.33835	0.01
1000	0.3328335	0.3338335	0.001

החלון שבו השטח "כלוא" הולך ונסגר סביב המספר $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$. בהמשך נוכיח, בשתי דרכים, שהשטח הוא **בדיוק** $\frac{1}{3}$.

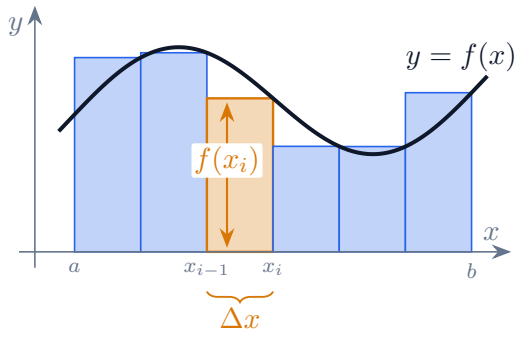
2 מסכום של מלבנים אל האינטגרל

נניח ש־f פונקציה רציפה וחיובית בקטע $a \le x \le b$. נרצה למצוא את השטח שבין הגרף שלה, ציר ה־x והישרים $x = a$ ו־$x = b$.

נחלק את הקטע ל־n פרוסות שוות. הרוחב של כל פרוסה הוא $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (קוראים: "דלתא איקס"), ונקודות החלוקה הן

$$x_0 = a,\ \ x_1 = a + \Delta x,\ \ \ldots,\ \ x_n = b.$$

על כל פרוסה נבנה מלבן. בפרוסה מספר i, מ־x_{i-1} עד x_i, הגובה הוא $f(x_i)$ — ערך הפונקציה בקצה הימני — ולכן שטח המלבן הוא $f(x_i)\cdot\Delta x$.



סרטוט 2: המלבן מספר i — רוחב Δx וגובה $f(x_i)$.

סכום השטחים של כל המלבנים הוא

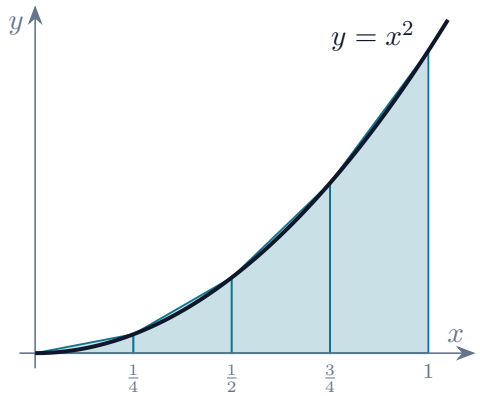
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x.$$

הסימן Σ (סיגמה, האות היוונית שמקבילה ל־S) פירושו "סכום": מציבים $i = 1, 2, \ldots, n$ ומחברים את כל האיברים.

שיפור: טרפזים במקום מלבנים

במקום "גג" שטוח, נמתח קטע ישר בין שתי הנקודות של הגרף שבקצות הפרוסה. מתקבל טרפז ש"שוכב על הצד": אורכי הבסיסים שלו הם $f(x_{i-1})$ ו־$f(x_i)$, והגובה שלו הוא Δx. לכן השטח שלו הוא

$$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\cdot\Delta x.$$



סרטוט 3: ארבעה טרפזים לאורך $y = x^2$. הגג הישר של כל טרפז עובר מעט מעל העקומה, ולכן הסכום גדול מעט מ־$\frac{1}{3}$.

הטרפזים צמודים לעקומה הרבה יותר מהמלבנים. עבור $y = x^2$ עם 4 פרוסות בלבד, סכום הטרפזים הוא 0.34375 — שגיאה של כ־0.01, לעומת יותר מ־0.11 במלבנים. לכן כשמחשבים אינטגרלים במחשב, משתמשים בטרפזים (או בשיטות משוכללות עוד יותר): הם נותנים דיוק טוב בפחות חישובים.

שימו לב: סכום הטרפזים הוא בדיוק הממוצע של שני סכומי המלבנים מהטבלה:

$$\frac{0.21875 + 0.46875}{2} = 0.34375.$$

הצעד המכריע: השאיפה לאפס

גם הטרפזים לא מושלמים: הגג שלהם ישר, והעקומה עקומה. עכשיו נעשה את הצעד שהופך קירוב לתשובה מדויקת: נקטין את רוחב הפרוסות עוד ועוד. כש־Δx שואף לאפס, ומספר הפרוסות n שואף לאינסוף, כל פרוסה צרה כל כך שכמעט אין הבדל בין מלבן לטרפז, והשגיאה הולכת ונעלמת. המספר שאליו מתקרבים הסכומים הוא **האינטגרל המסוים**.

ההגדרה: האינטגרל המסוים

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

כאשר $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, ו־$\lim_{n\to\infty}$ פירושו "המספר שאליו מתקרבים כש־n גדל בלי גבול".

במילים: האינטגרל של f מ־a עד b הוא המספר שאליו מתקרב סכום המלבנים כשהפרוסות נעשות צרות לאין שיעור. כש־f רציפה, לא משנה אם קובעים את גובה המלבן לפי הקצה הימני של הפרוסה או לפי הקצה השמאלי, או משתמשים בטרפזים: כל הסכומים מתקרבים לאותו מספר. (את העובדה הזאת נקבל כאן בלי הוכחה מלאה. לפונקציה עולה נראה את הסיבה בהוכחה 1, בטיעון ה"מדרגות"; ההוכחה לכל פונקציה רציפה נלמדת באוניברסיטה.) וכש־$f \geq 0$, המספר הזה הוא השטח שמתחת לגרף.

מילון קטן: מסכום לאינטגרל

בסכום — מספר סופי של פרוסות	באינטגרל — פרוסות צרות לאין שיעור
Σ — סיגמה, "סכום"	$\int$ — S מוארכת, האות הראשונה של המילה הלטינית summa, "סכום"
Δx — רוחב של פרוסה, למשל 0.1	dx — רוחב של פרוסה "צרה לאין שיעור"
$f(x_i)$ — הגובה בנקודה x_i	$f(x)$ — הגובה בנקודה x
$i = 1$ עד n	מ־a עד b — גבולות האינטגרציה

כך קוראים את $\int_a^b f(x)\,dx$: "חברו את השטחים $f(x)\,dx$ — גובה כפול רוחב צר — של כל הפרוסות, מ־a עד b".

3 המשפט: שליש בדיוק

שתי עובדות שנוכיח

1. השטח מתחת לפרבולה. השטח שמתחת לגרף $y = x^2$, בין $x = 0$ ל־$x = 1$, הוא בדיוק שליש:

$$\boxed{\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}}$$

2. המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי. אם f רציפה בקטע $a \le x \le b$, ו־F היא פונקציה קדומה שלה (כלומר $F'(x) = f(x)$), אז

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

בהוכחה 1 נחשב את השטח "בכוח", מסכומי מלבנים. בהוכחה 2 נוכיח את המשפט היסודי, ונקבל ממנו את אותו שליש בשורה אחת. שתי דרכים שונות לגמרי — ואותה תשובה.

4 הוכחה 1: כולאים את השטח בין שני סכומים

הרעיון נכלא את השטח S בין סכום של מלבנים נמוכים לסכום של מלבנים גבוהים, נחשב את שני הסכומים במדויק, ונראה שהחלון שביניהם נסגר סביב $\frac{1}{3}$. (ההוכחה הזאת היא להעמקה: היא משתמשת בנוסחה לסכום ריבועים, שאינה בתוכנית הלימודים — אבל היא מראה מהו האינטגרל **באמת**.)

כלי עזר: סכום הריבועים

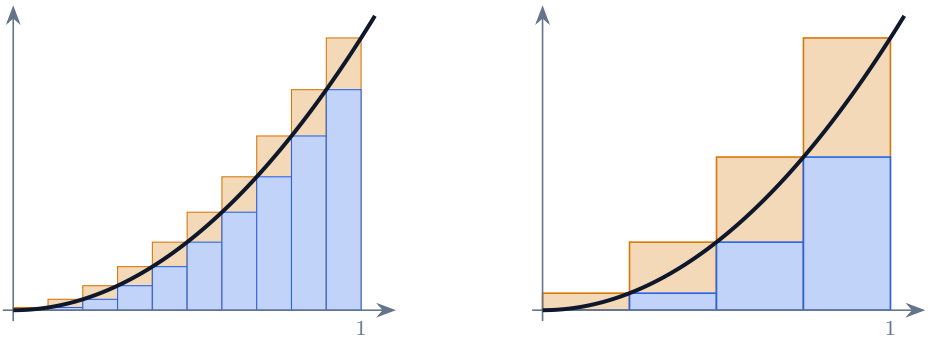
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

למה? לכל k מתקיים $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. נכתוב את השוויון הזה עבור $k = 1, 2, \ldots, n$ ונחבר את כל השורות. באגף שמאל כמעט כל האיברים מתבטלים זה עם זה, ונשאר רק $(n+1)^3 - 1$. באגף ימין מתקבל $3\left(1^2 + \cdots + n^2\right) + 3\left(1 + \cdots + n\right) + n$. מכאן, בעזרת $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, נבודד את סכום הריבועים:

$$3\left(1^2 + \cdots + n^2\right) = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

ונחלק ב־3. בדיקה: עבור $n = 3$ מקבלים $1 + 4 + 9 = 14$, וגם $\frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} = 14$.

נחלק את הקטע $0 \le x \le 1$ ל־n פרוסות שוות: $\Delta x = \frac{1}{n}$, ונקודות החלוקה הן $x_i = \frac{i}{n}$. בקטע הזה $y = x^2$ עולה, ולכן בכל פרוסה הערך הקטן ביותר נמצא בקצה השמאלי, והגדול ביותר — בקצה הימני.



$n=4$: $0.21875 < S < 0.46875$ $\qquad$ $n=10$: $0.285 < S < 0.385$

סרטוט 4: כחול: המלבנים הנמוכים. כתום: מה שהמלבנים הגבוהים מוסיפים מעליהם.

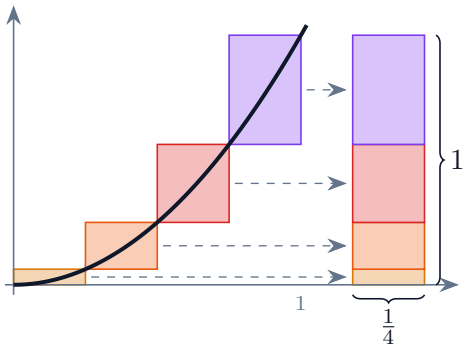
	טענה	נימוק
1	$L_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{0}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$	מלבנים נמוכים: הגובה בקצה השמאלי
2	$L_n = \frac{1}{n^3}\left[1^2 + \cdots + (n-1)^2\right] = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$	סכום הריבועים, עם $n-1$ במקום n
3	$L_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$	$(n-1)(2n-1) = 2n^2 - 3n + 1$, וחילוק ב־ $6n^2$
4	$U_n = \frac{1}{n^3}\left[1^2 + \cdots + n^2\right] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$	מלבנים גבוהים: הגובה בקצה הימני
5	$U_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$	$(n+1)(2n+1) = 2n^2 + 3n + 1$
6	$L_n < S < U_n$	הנמוכים מוכלים בשטח, והגבוהים מכסים אותו
7	$L_n < \frac{1}{3} < U_n$	צעדים 3 ו־5: $\frac{1}{2n} > \frac{1}{6n^2}$ לכל $n \geq 1$
8	$\left\lvert S - \frac{1}{3}\right\rvert < U_n - L_n = \frac{1}{n}$	שני המספרים באותו חלון, שרוחבו $\frac{1}{n}$

אי־השוויון האחרון נכון **לכל** n: המרחק בין S ל־$\frac{1}{3}$ קטן מ־$\frac{1}{10}$, מ־$\frac{1}{1000}$, ממיליונית — מכל שבר מהצורה $\frac{1}{n}$. המספר האי־שלילי היחיד שקטן מכל השברים האלה הוא אפס. לכן $S = \frac{1}{3}$.

מש״ל ■

למה ההפרש הוא בדיוק $\frac{1}{n}$? ההפרש $U_n - L_n$ הוא סכום ה"מדרגות": החלקים (הכתומים בסרטוט 4) שהמלבנים הגבוהים מוסיפים מעל הנמוכים. נזיז את כל המדרגות ימינה, במאוזן. הן נערמות זו על זו לעמודה אחת, בלי חורים ובלי חפיפות: הרוחב שלה $\frac{1}{n}$, והגובה שלה $f(1) - f(0) = 1$. (הטיעון תקף לכל פונקציה עולה: תמיד $U_n - L_n = (f(b) - f(a))\,\Delta x$, וההפרש הזה שואף לאפס — אף שמספר הפרוסות גדל.) לכן

$$U_n - L_n = \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n}.$$



סרטוט 5: המדרגות נערמות לעמודה אחת ($n = 4$).

עצרו ובדקו

בצעד 8 קיבלנו $\left|S - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{n}$ לכל n. נניח לרגע ש־$S = 0.334$. איזה n מראה שזה בלתי אפשרי?

5 הוכחה 2: פונקציית השטח

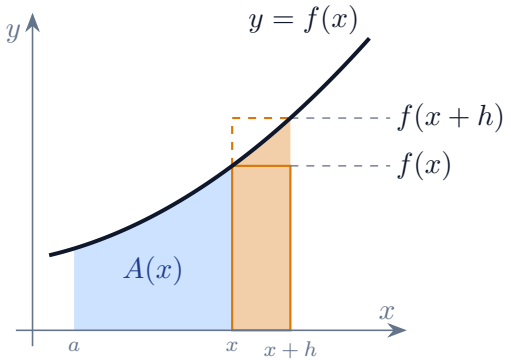
הרעיון במקום לחשב את כל השטח בבת אחת, נשאל: בכמה השטח **גדל** כשמזיזים את הקצה הימני שלו קצת ימינה? מתברר שקצב הגידול הזה הוא בדיוק $f(x)$ — ומשם קצרה הדרך אל הנוסחה.

נקבע נקודת התחלה a, ונגדיר את **פונקציית השטח**: $A(x)$ הוא השטח שמתחת לגרף של f, מ־a עד x. למשל $A(a) = 0$ (שטח של "פרוסה ברוחב אפס"), ו־$A(b)$ הוא השטח שאנחנו מחפשים.

חימום עם צורה מוכרת. עבור $f(x) = x$ ו־$a = 0$, התחום שמתחת לגרף הוא משולש ישר־זווית ששני ניצביו באורך x, ולכן $A(x) = \frac{x^2}{2}$. נגזור: $A'(x) = x = f(x)$. הנגזרת של פונקציית השטח היא הפונקציה f עצמה! זה לא מקרי: עכשיו נוכיח שכך הדבר בכל פונקציה רציפה.

נניח לשם הפשטות ש־f עולה, וניקח מספר קטן $h > 0$. ההפרש $A(x+h) - A(x)$ הוא השטח של הרצועה הצרה שבין x ל־$x+h$ (בכתום בסרטוט).

הרצועה הזאת היא "כמעט מלבן": היא מכילה את המלבן שגובהו $f(x)$, ומוכלת במלבן שגובהו $f(x+h)$ (שניהם ברוחב h). כשהרצועה נעשית צרה, הגבהים של שני המלבנים כמעט שווים — וכך "נלכוד" ביניהם את הנגזרת של A.



סרטוט 6: $A(x)$ בכחול; הרצועה שבין x ל־$x+h$ בכתום.

	טענה	נימוק
(1)	$A(x+h) - A(x)$ = שטח הרצועה שבין x ל־$x+h$	מהשטח עד $x+h$ מורידים את השטח עד x
(2)	$f(x) \cdot h \;\le\; A(x+h) - A(x) \;\le\; f(x+h) \cdot h$	הרצועה בין שני מלבנים שרוחבם h

3	$f(x) \le \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \le f(x+h)$	חילוק ב־$h > 0$
4	$A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$	$f(x+h) \to f(x)$ (f רציפה), והמנה "נלחצת" ביניהם

(עבור $h < 0$ החישוב דומה. ואם f אינה עולה, מחליפים את $f(x)$ ואת $f(x+h)$ בערך הקטן ביותר ובערך הגדול ביותר של f ברצועה — ושניהם עדיין שואפים ל־$f(x)$.)

מהנגזרת אל הנוסחה. תהי F פונקציה קדומה כלשהי של f, כלומר $F'(x) = f(x)$.

	טענה	נימוק
5	$(A(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$	צעד 4, ו־$F' = f$
6	$A(x) = F(x) + C$	פונקציה שהנגזרת שלה אפס בכל הקטע היא קבועה — עובדה שנקבל בלי הוכחה (זו הסיבה ל־$+C$ בפונקציה קדומה)
7	$0 = A(a) = F(a) + C$, ולכן $C = -F(a)$	הצבת $x = a$
8	$\int_a^b f(x)\,dx = A(b) = F(b) - F(a)$	הצבת $x = b$

מש"ל

ומה אם f יורדת מתחת לציר? בהוכחה הנחנו, בלי לומר זאת, ש־$f \ge 0$, כי רק אז $A(x)$ הוא שטח. אם f מקבלת גם ערכים שליליים, "נרים" את הגרף: נבחר מספר M גדול מספיק, כך ש־$g(x) = f(x) + M \ge 0$ בכל הקטע. על g ההוכחה כבר חלה, והפונקציה $F(x) + Mx$ היא פונקציה קדומה שלה. מצד שני, כל מלבן בסכום של g גבוה ב־M מהמלבן המתאים של f, וכל התוספות יחד הן $M \cdot n\,\Delta x = M(b-a)$. לכן

$$\int_a^b f(x)\,dx + M(b-a) = \int_a^b g(x)\,dx = F(b) - F(a) + M(b-a),$$

ומכאן $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ — לכל פונקציה רציפה.

ועכשיו — השלישי בשורה אחת. הפונקציה $F(x) = \frac{x^3}{3}$ היא פונקציה קדומה של x^2, ולכן

$$\int_0^1 x^2\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

בדיוק המספר שקיבלנו בהוכחה 1, אחרי עמוד שלם של סכומים.

עצרו ובדקו

בצעד 2 השתמשנו בכך ש־f עולה. כתבו את צעד 2 מחדש עבור פונקציה יורדת. האם המסקנה בצעד 4 משתנה?

6 שתי הדרכים זו מול זו

	הוכחה 1: כליאה בין סכומים	הוכחה 2: פונקציית השטח
הרעיון	לכלוא את השטח בין שני סכומי מלבנים, ולהדק את החלון	לבדוק בכמה השטח גדל כשמזיזים את הקצה — ולגלות שקצב הגידול הוא $f(x)$
הכלים	סכום ריבועים ואי־שוויונות	נגזרת ופונקציה קדומה
מה רואים	**מהו** האינטגרל: המספר שאליו מתקרבים סכומי הפרוסות כשהן נעשות צרות	למה אינטגרציה וגזירה הן פעולות הפוכות
החיסרון	לכל פונקציה צריך נוסחת סכום משלה	צריך להכיר פונקציה קדומה
היתרון	אין צורך בפונקציה קדומה — כך מחשבים אינטגרלים במחשב	תשובה בשורה אחת

7 מה עושים עם זה?

שימוש 1: שטח מתחת לפרבולה בקטע אחר

דוגמה מספרית

חשבו את השטח שמתחת לגרף $y = x^2$, בין $x = 1$ ל־$x = 2$.
הפונקציה $F(x) = \frac{x^3}{3}$ היא פונקציה קדומה של x^2, ולכן

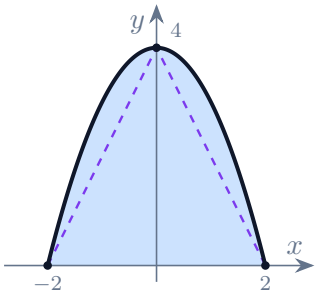
$$\int_1^2 x^2\,dx = F(2) - F(1) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

שימוש 2: הקטע הפרבולי של ארכימדס

השטח שבין הפרבולה $y = 4 - x^2$ לציר ה־x (פונקציה קדומה: $F(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$):

$$\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

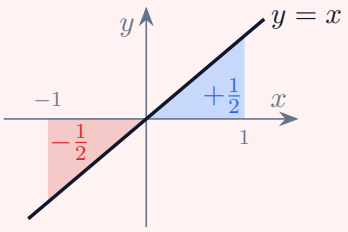
למשולש החסום בתחום הזה יש אותו בסיס ואותו גובה כמו לתחום עצמו. קודקודיו $(-2, 0)$, $(2, 0)$ ו־$(0, 4)$, ושטחו $\frac{4 \cdot 4}{2} = 8$. היחס בין השטחים: $\frac{32}{3} = \frac{4}{3} \cdot 8$. בדיוק את היחס הזה, $\frac{4}{3}$, גילה ארכימדס לפני יותר מ־2,200 שנה — בלי נגזרות ובלי אינטגרלים, בטיעון של "כליאה" שדומה להוכחה 1.



סרטוט 7: התחום שמתחת לקשת הפרבולה, והמשולש החסום בו.

טעות נפוצה

- **"מציבים $\Delta x = 0$".** פרוסה ברוחב אפס היא בעלת שטח אפס, וסכום של אפסים הוא אפס. האינטגרל הוא **המספר שאליו הסכומים מתקרבים** כש־Δx הולך וקטן — לא הצבה של אפס.
- **שוכחים את $F(a)$.** $\int_1^2 x^2\,dx$ שווה ל־$\frac{7}{3}$, ולא ל־$\frac{8}{3}$. רק כש־$F(a) = 0$ אפשר "לדלג" על החיסור.
- **גרף מתחת לציר ה־x.** שם $f(x) < 0$, ולכן "המלבנים" שליליים, וגם האינטגרל שלילי. השטח הוא הערך המוחלט שלו. למשל $\int_0^1 (x^2 - 1)\,dx = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$, והשטח הוא $\frac{2}{3}$. אבל זהירות: אם הגרף **חוצה** את הציר בתוך הקטע, החלקים שמעל הציר ומתחתיו מקזזים זה את זה. למשל $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$, אף שהשטח שבין הגרף לציר הוא 1. במקרה כזה מפצלים את הקטע בנקודות החיתוך עם הציר, ומחברים את הערכים המוחלטים של האינטגרלים.



- dx **אינו קישוט.** הוא מזכיר שמדובר בסכום של "גובה כפול רוחב", ואומר לפי איזה משתנה מבצעים את האינטגרציה.

הידעתם?

ארכימדס (המאה ה־3 לפני הספירה) חישב את השטח הכלוא בין פרבולה למיתר שלה ("קטע פרבולי") בשיטה שנקראת היום "שיטת המיצוי": הוא מילא את התחום הזה במשולשים שאת שטחם ידע לחשב (השטחים שהוסיף בכל שלב יצרו סדרה הנדסית שסכומה $\frac{4}{3}$ משטח המשולש הראשון), והראה שהשטח אינו יכול להיות גדול מ־$\frac{4}{3}$ משטח המשולש החסום, וגם אינו יכול להיות קטן ממנו — אותו רעיון של "כליאה" שסוגר את הוכחה 1, אבל במשולשים ולא במלבנים. ובחיבור אחר, "על הספירלות", הוא אף הוכיח נוסחה שקולה לנוסחת סכום הריבועים, והשתמש בה כדי לכלוא שטח בין שני סכומים — ממש כמו בהוכחה 1.

כ־1,900 שנה אחר כך, במחצית השנייה של המאה ה־17, הפכו אייזק ניוטון וגוטפריד וילהלם לייבניץ, כל אחד בנפרד, את הקשר בין שטח לנגזרת — המשפט היסודי מהוכחה 2 — לשיטת חישוב כללית. (גרסאות גאומטריות ראשונות של המשפט פורסמו עוד לפני כן, אצל ג'יימס גרגורי ב־1668 ואצל אייזק בארו ב־1670.) לייבניץ גם המציא את הסימן $\int$ — S מוארכת, האות הראשונה של המילה הלטינית summa ("סכום"). גם הסימון dx הוא שלו.

במאה ה־19 נתנו המתמטיקאים אוגוסטן־לואי קושי וברנהרד רימן לאינטגרל הגדרה מדויקת, כגבול של סכומי מלבנים. לכן הסכומים מסעיף 2 נקראים היום "סכומי רימן".

8 בדקו את עצמכם

שבע שאלות קצרות

1. חשבו את סכום המלבנים הנמוכים ואת סכום המלבנים הגבוהים עבור $y = x^2$ בקטע $0 \le x \le 1$, עם $n = 5$ פרוסות.
2. חשבו את סכום הטרפזים עבור אותה חלוקה, והשוו ל־$\frac{1}{3}$.
3. חשבו את $\int_0^3 x^2\,dx$. איזה חלק מהווה השטח הזה מהשטח של המלבן 3×9, שמכיל את התחום שמתחת לגרף?
4. תהי $A(x)$ פונקציית השטח שמתחת ל־$y = 2x$, מ־0 עד x. מצאו את $A(x)$ בעזרת שטח של משולש, ובדקו ש־$A'(x) = 2x$.
5. למה אי אפשר פשוט להציב $\Delta x = 0$ בסכום המלבנים?
6. השאלה מתיבת "עצרו ובדקו" שבהוכחה 1: איזה n מראה ש־$S = 0.334$ בלתי אפשרי?
7. השאלה מתיבת "עצרו ובדקו" שבהוכחה 2: מה משתנה בצעד 2 כש־f יורדת?

תשובות

1. $\Delta x = \frac{1}{5}$. נמוכים: $\frac{1}{125}(0+1+4+9+16) = \frac{30}{125} = 0.24$. גבוהים: $\frac{1}{125}(1+4+9+16+25) = \frac{55}{125} = 0.44$. ההפרש הוא $\frac{1}{5} = 0.2$ — כמו שציפינו.
2. סכום הטרפזים הוא הממוצע של שני הסכומים: $\frac{0.24+0.44}{2} = 0.34$. השגיאה: $0.34 - \frac{1}{3} \approx 0.0067$.
3. $\int_0^3 x^2\,dx = \frac{27}{3} - 0 = 9$. שטח המלבן 3×9 הוא 27, ו־$\frac{1}{3} \cdot 27 = 9$ — שוב שליש.
4. למשולש יש ניצבים x ו־$2x$, ולכן $A(x) = \frac{x \cdot 2x}{2} = x^2$, ו־$A'(x) = 2x = f(x)$.
5. כי לפרוסה ברוחב אפס יש שטח אפס, וסכום של אפסים הוא אפס. האינטגרל אינו "הסכום כש־$\Delta x = 0$", אלא המספר שאליו הסכומים מתקרבים כש־Δx הולך וקטן.
6. $0.334 - \frac{1}{3} = \frac{1}{1500}$. עבור $n = 1500$ אי־השוויון $\left|S - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{n}$ דורש $\frac{1}{1500} < \frac{1}{1500}$ — סתירה. (גם כל n גדול יותר מתאים: אז $\frac{1}{1500} < \frac{1}{n}$, ואי־השוויון דורש $\frac{1}{n} < \frac{1}{1500}$ — שוב סתירה.)
7. אי־השוויונות מתהפכים: $f(x+h) \cdot h \le A(x+h) - A(x) \le f(x) \cdot h$. גם עכשיו המנה כלואה בין $f(x)$ ל־$f(x+h)$, ששניהם שואפים ל־$f(x)$, ולכן המסקנה $A'(x) = f(x)$ לא משתנה.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את המסמך בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנו קטעים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.

אינסוף
מתמטיקה