הנגזרת וכללי הגזירה

איך נולד מושג הנגזרת, ומאיפה מגיעים כללי הגזירה – עם הוכחה לכל כלל

כיתות י'–י"א | 4–5 יח"ל | חשבון דיפרנציאלי | 8 הוכחות | כ־25 דקות קריאה

מה תמצאו כאן

- איך מגיעים ממהירות ממוצעת למהירות רגעית, ומשם להגדרת הנגזרת.
- כלל החזקה $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ — בשתי הוכחות.
- הוכחות לכללי הסכום, הכפל בקבוע, המכפלה, המנה והשרשרת.
- דוגמאות, טעויות נפוצות ושאלות לבדיקה עצמית.

מה כדאי לדעת קודם

- שיפוע של ישר: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
- פתיחת סוגריים ונוסחאות הכפל המקוצר.
- מושג הגבול ברמה אינטואיטיבית.
- להוכחה 1 של כלל החזקה: הבינום של ניוטון.

1 האינטואיציה: מה מודד מד המהירות?

האינטואיציה

נסעתם 120 ק"מ בשעתיים — המהירות הממוצעת שלכם הייתה 60 קמ"ש. אבל מד המהירות במכונית מראה מספר אחר בכל רגע: 50 ליד רמזור, 90 בכביש המהיר. מה בדיוק הוא מודד? "מהירות ברגע אחד" נשמעת כמו סתירה: ברגע אחד חולף זמן אפס ועוברים מרחק אפס, ו־$\frac{0}{0}$ אינו מספר.
הפתרון: מודדים מהירות ממוצעת בפרקי זמן **קצרים יותר ויותר** — שנייה, עשירית שנייה, אלפית שנייה — ובודקים לאיזה מספר התוצאות מתקרבות. המספר הזה הוא המהירות הרגעית. זה כל הרעיון של הנגזרת.

דוגמה מספרית: אבן נופלת

אבן נופלת מצוק. אם מזניחים את התנגדות האוויר, אחרי t שניות היא עוברת בערך $s(t) = 5t^2$ מטרים.
מה המהירות שלה ברגע $t = 1$?
נחשב את המהירות הממוצעת בין הרגע $t = 1$ לרגע $t = 1 + h$:

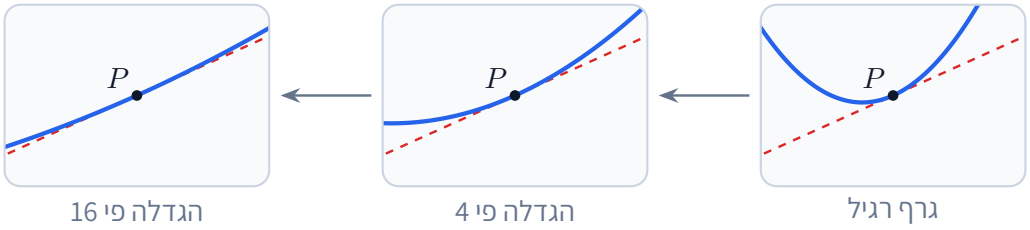
$$\frac{s(1+h) - s(1)}{h} = \frac{5(1+h)^2 - 5}{h} = \frac{10h + 5h^2}{h} = 10 + 5h.$$

פרק הזמן h (שניות)	1	0.1	0.01	0.001
מהירות ממוצעת (מ'/ש')	15	10.5	10.05	10.005

ככל ש־h קטן, המהירות הממוצעת מתקרבת ל־10. לכן המהירות הרגעית ברגע $t = 1$ היא 10 מטרים לשנייה. שימו לב: לא הצבנו $h = 0$ (כך היינו מקבלים $\frac{0}{0}$). קודם צמצמנו ב־h, ורק אחר כך שאלנו מה קורה כש־h קטן מאוד.

© אור בן שטרית · אינסוף

לאותו רעיון יש גם תמונה גאומטרית. אם מגדילים (״עושים זום״) את הגרף של פונקציה חלקה סביב נקודה אחת, הוא נראה יותר ויותר כמו קו ישר. השיפוע של הישר הזה הוא הנגזרת.



סרטוט 1: אותו גרף סביב הנקודה P, בשלוש הגדלות. הקו האדום המקווקו הוא המשיק ב־P.

2 ההגדרה: מהמיתר אל המשיק

את השיפוע של ישר שעובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו־(x_2, y_2) מחשבים כך:

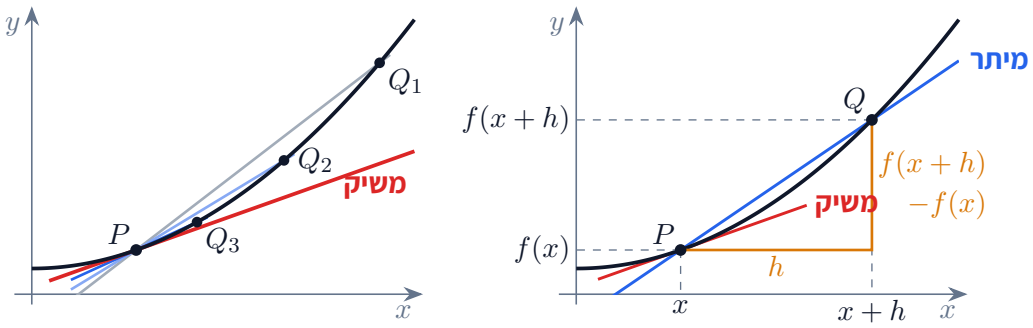
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

השיפוע הוא **קצב השינוי**: בכמה משתנה y כש־x גדל ב־1. בישר הקצב הזה קבוע. בגרף עקום הוא משתנה מנקודה לנקודה — ולכן צריך להגדיר מהו ״שיפוע בנקודה אחת״.

נבחר על הגרף של f נקודה P ששיעור ה־x שלה הוא x, ונקודה נוספת Q ששיעור ה־x שלה הוא $x+h$. הקטע PQ מחבר שתי נקודות על הגרף, ולכן הוא **מיתר**. השיפוע של המיתר:

$$m_{PQ} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

לביטוי הזה קוראים **מנת ההפרשים**. כש־f מתארת מקום כתלות בזמן, זאת בדיוק המהירות הממוצעת. עכשיו נקרב את Q אל P, כלומר נקטין את h. המיתרים מסתובבים סביב P ומתקרבים לישר אחד — **המשיק** לגרף בנקודה P.



סרטוט 2: מימין: המיתר PQ והמשיק ב־P. משמאל: כש־Q מתקרבת ל־P (מ־Q_1 ל־Q_3), המיתרים מתקרבים למשיק.

הגדרת הנגזרת

הנגזרת של f בנקודה x היא

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

אם הגבול קיים, אומרים ש־f **גזירה** בנקודה x.

במילים: הנגזרת היא השיפוע של המשיק לגרף בנקודה, כלומר קצב השינוי הרגעי של הפונקציה.

את הסימן $\lim_{h\to 0}$ קוראים "הגבול כאשר h שואף לאפס": h מתקרב ל־0 ככל שנרצה, מימין ומשמאל (כש־$h<0$, הנקודה Q משמאל ל־P), אבל **אף פעם אינו שווה ל־0** — ולכן מותר לחלק ב־h. הגבול הוא המספר שאליו מנת ההפרשים מתקרבת. תפגשו גם את הסימון $\frac{dy}{dx}$, שמזכיר שהנגזרת נולדה מהמנה $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

דוגמה: הנגזרת של x^2 לפי ההגדרה

נציב $f(x)=x^2$ במנת ההפרשים, נפתח סוגריים ונצמצם:

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\frac{2xh+h^2}{h}=2x+h\xrightarrow[h\to 0]{}2x.$$

לכן $(x^2)'=2x$. בדקו: עבור האבן, $s(t)=5t^2$ ולכן $s'(t)=10t$, ו־$s'(1)=10$ — בדיוק מה שמצאנו בטבלה.

שתי נגזרות בסיסיות. לפונקציה קבועה $f(x)=c$ מנת ההפרשים היא $\frac{c-c}{h}=0$, ולכן $(c)'=0$: הגרף הוא ישר אופקי, והשיפוע שלו 0. לפונקציה $f(x)=x$ מנת ההפרשים היא $\frac{(x+h)-x}{h}=1$, ולכן $(x)'=1$: זה הישר $y=x$, שהשיפוע שלו 1.

3 כלל החזקה

כלל החזקה

לכל n טבעי:

$$\boxed{(x^n)'=n\cdot x^{n-1}}$$

במילים: המעריך "יורד" ונעשה מקדם, והמעריך החדש קטן ב־1. לדוגמה: $(x^5)'=5x^4$.

בדיקה מהירה: עבור $n=1$ מקבלים $1\cdot x^0=1$, ועבור $n=2$ מקבלים $2x$ — כמו שמצאנו מההגדרה. הכלל נכון גם למעריכים שאינם טבעיים, למשל $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ ו־$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, אבל שתי ההוכחות שלהלן מתאימות רק ל־n טבעי. את שתי הדוגמאות האלה תוכיחו בעצמכם בשאלות 2 ו־4 שבסוף המסמך.

הוכחה 1: הבינום של ניוטון

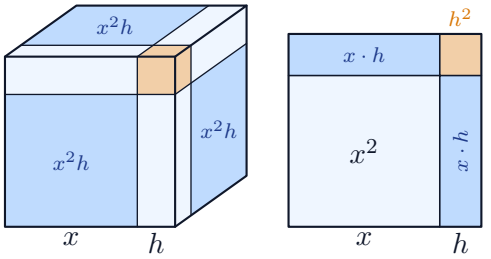
הרעיון נפתח את $(x+h)^n$ לפי הבינום של ניוטון. כל האיברים בפיתוח, חוץ משני הראשונים, מכילים לפחות h^2 — והם "נעלמים" בגבול.

לפי הבינום, $(x+h)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n$, ו־$\binom{n}{1} = n$.

	טענה	נימוק
1	$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n}{h}$	הבינום; x^n ו־$-x^n$ מבטלים זה את זה
2	$= nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}$	חילוק כל איבר ב־h (מותר, כי $h \neq 0$)
3	$\binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$	מספר סופי של איברים, ובכל אחד מהם יש h
4	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	רק האיבר הראשון נשאר בגבול

■ מש"ל

מה רואים בסרטוט? עבור $n=2$ ו־$n=3$ לבינום יש משמעות של שטח ונפח. כשהצלע גדלה מ־x ל־$x+h$, לריבוע נוספות שתי רצועות $x \cdot h$ ועוד ריבוע קטנטן h^2. לקובייה נוספים שלושה "לוחות" בנפח $x^2 \cdot h$ (הכחולים) ועוד חלקים קטנים.
החלקים הקטנים מכילים h^2 או h^3, ולכן גם אחרי חילוק ב־h הם שואפים ל־0. נשארים $2x$ במקרה של הריבוע ו־$3x^2$ במקרה של הקובייה.



סרטוט 3: $(x+h)^2$ ו־$(x+h)^3$: הרצועות והלוחות הכחולים נותנים את $2x$ ואת $3x^2$.

הוכחה 2: פירוק של הפרש חזקות

הרעיון במקום לפתוח את $(x+h)^n$, נפרק את המונה $(x+h)^n - x^n$ לגורמים. אחד הגורמים יהיה בדיוק h, והוא יצטמצם עם המכנה.

כלי העזר. לכל n טבעי:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

בסוגריים השניים יש n איברים. מאיבר לאיבר המעריך של a יורד ב־1 והמעריך של b עולה ב־1, ובכל איבר סכום המעריכים הוא $n-1$. עבור $n=2$ זאת נוסחת הפרש הריבועים, $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, ועבור $n=3$ זאת הנוסחה $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

למה הזהות נכונה? נפתח את הסוגריים באגף ימין. הכפל ב־a נותן $a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1}$, והכפל ב־$(-b)$ נותן $-a^{n-1}b - \cdots - ab^{n-1} - b^n$. כל האיברים האמצעיים מופיעים פעם עם פלוס ופעם עם מינוס ומתבטלים, ונשאר רק $a^n - b^n$.

עכשיו נציב $a = x+h$ ו־$b = x$. אז $a - b = h$:

	טענה	נימוק
1	$(x+h)^n - x^n = h \cdot [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}]$	הזהות, עם $a = x+h$ ו־$b = x$
2	$\dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}$	חילוק ב־$h \neq 0$
3	$(x+h)^{n-1-k} \cdot x^k \xrightarrow[h\to 0]{} x^{n-1-k} \cdot x^k = x^{n-1}$	בסוגריים יש n איברים כאלה $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, ובכל אחד מהם $x+h \to x$
4	$(x^n)' = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1}}_{n \text{ איברים}} = n \cdot x^{n-1}$	סכום של n איברים שווים

מש"ל ■

בהוכחה 1 "נעלמים" בגבול האיברים שמכילים h^2 ומעלה. בהוכחה 2 לא צריך בכלל את המקדמים הבינומיים: הגורם h מצטמצם עם המכנה, וכל מה שנשאר הוא לספור n איברים.

4 סכום, הפרש וכפל בקבוע

⬟ כללי הסכום והכפל בקבוע

אם f ו־g גזירות ו־c הוא מספר קבוע, אז:

$$\boxed{(f+g)' = f' + g' \qquad (f-g)' = f' - g' \qquad (c \cdot f)' = c \cdot f'}$$

במילים: גוזרים סכום איבר־איבר, וקבוע שכופל את הפונקציה "יוצא החוצה".

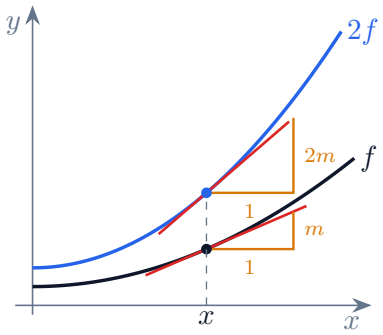
	טענה	נימוק
1	$\dfrac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$	סידור מחדש ופיצול השבר
2	$\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x) + g'(x)$	גבול של סכום הוא סכום הגבולות
3	$\dfrac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} = c \cdot \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} c \cdot f'(x)$	הוצאת c כגורם משותף

מש"ל ■

את כלל ההפרש מקבלים משני הכללים האחרים, כי

$$f-g=f+(-1)\cdot g.$$

בסרטוט רואים את המשמעות של כלל הכפל בקבוע. כשמכפילים פונקציה ב־2, כל הגבהים מוכפלים ב־2. לכן גם כל "עלייה" במשולש שיפוע מוכפלת ב־2, ואילו ההתקדמות האופקית לא משתנה — כלומר השיפוע מוכפל ב־2.



סרטוט 4: כפל ב־2 מכפיל כל "עלייה", ולכן גם את השיפוע.

דוגמה: נגזרת של פולינום

נגזור את $f(x)=5x^4-2x^3+7$. לפי כללי הסכום והכפל בקבוע גוזרים כל איבר בנפרד, ולפי כלל החזקה:

$$f'(x)=5\cdot 4x^3-2\cdot 3x^2+0=20x^3-6x^2.$$

באותה דרך גוזרים כל פולינום.

5 כלל המכפלה

לפני שנוכיח את שלושת הכללים הבאים, נצטרך עובדה אחת על פונקציות גזירות.

כלי עזר: פונקציה גזירה היא רציפה

אם f גזירה בנקודה x, אז $f(x+h)\to f(x)$ כאשר $h\to 0$. כלומר: הגרף של פונקציה גזירה אינו "קופץ".

הוכחה: $f(x+h)-f(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)\cdot 0=0$.

ההפך אינו נכון: הפונקציה $f(x)=|x|$ רציפה ב־0, אבל מנת ההפרשים שלה שם היא $\frac{|h|}{h}$: היא שווה ל־1 כש־$h>0$, ול־(-1) כש־$h<0$. לכן למנת ההפרשים אין גבול, והפונקציה $|x|$ אינה גזירה ב־0: בגרף שלה יש שם "חוד".

כלל המכפלה

אם u ו־v גזירות, אז:

$$\boxed{(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'}$$

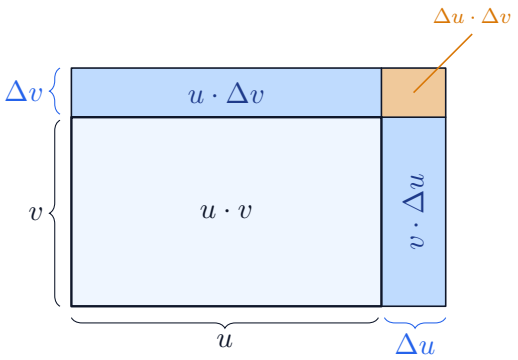
במילים: גוזרים כל פעם רק אחת מהפונקציות, משאירים את השנייה כמו שהיא, ומחברים. שימו לב: הנגזרת של מכפלה **אינה** מכפלת הנגזרות.

הוכחה 1: שטח של מלבן

הרעיון נחשוב על u ועל v כעל הצלעות של מלבן ששטחו $u \cdot v$. כש־x גדל ב־h, הצלעות משתנות ב־$\Delta u = u(x+h) - u(x)$ וב־$\Delta v = v(x+h) - v(x)$. נבדוק בכמה השטח השתנה.

בסרטוט רואים שהשטח שנוסף מורכב משתי רצועות ומפינה קטנה. אפשר לבדוק זאת גם אלגברית, לכל סימן של Δu ו־Δv:

$$(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv = v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v.$$



סרטוט 5: השטח $u \cdot v$ גדל בשתי רצועות ובפינה קטנה.

	טענה	נימוק
1	$\Delta(uv) = v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v$	השטח שנוסף: שתי רצועות ופינה
2	$\dfrac{\Delta(uv)}{h} = v \cdot \dfrac{\Delta u}{h} + u \cdot \dfrac{\Delta v}{h} + \Delta u \cdot \dfrac{\Delta v}{h}$	חילוק ב־h
3	$\xrightarrow[h\to 0]{} v \cdot u' + u \cdot v' + 0 \cdot v'$	הגדרת הנגזרת, וכלי העזר: $\Delta u \to 0$
4	$(uv)' = u'v + uv'$	

מש"ל ■

הפינה $\Delta u \cdot \Delta v$ היא מכפלה של שני שינויים קטנים, ולכן היא קטנה הרבה יותר מ־h ונעלמת בגבול. זאת הסיבה שבנוסחה יש רק שני איברים: שתי הרצועות.

הוכחה 2: הוספה והחסרה

הרעיון נוסיף למונה ונחסיר ממנו את אותו ביטוי, $u(x+h)\,v(x)$. כך נפצל את השינוי במכפלה לשני חלקים: שינוי של v ושינוי של u.

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = \frac{u(x+h)v(x+h) \overbrace{- u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x)}^{\text{הוספנו וחיסרנו}} - u(x)v(x)}{h}$$

$$= u(x+h) \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \cdot \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

בשורה השנייה הוצאנו $u(x+h)$ כגורם משותף משני האיברים הראשונים, ו־$v(x)$ משני האחרונים. עכשיו נשאיף את h ל־0. לפי כלי העזר $u(x+h) \to u(x)$, כי u גזירה; ולפי הגדרת הנגזרת $\frac{v(x+h)-v(x)}{h} \to v'(x)$ ו־$\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \to u'(x)$. לכן $(u \cdot v)' = u \cdot v' + v \cdot u'$.

מש"ל ■

דוגמה: שתי דרכים, אותה תשובה

נגזור את $f(x)=(x^2+1)(x^3-2x)$, עם $u=x^2+1$ ו־$v=x^3-2x$:

$$f'(x)=2x\left(x^3-2x\right)+\left(x^2+1\right)\left(3x^2-2\right)=5x^4-3x^2-2.$$

בדיקה: אם פותחים קודם סוגריים, $f(x)=x^5-x^3-2x$, ושוב $f'(x)=5x^4-3x^2-2$.

6 כלל המנה

כלל המנה

אם u ו־v גזירות ו־$v(x)\neq 0$, אז:

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}}$$

במילים: במונה — הנגזרת של המונה כפול המכנה, פחות המונה כפול הנגזרת של המכנה. במכנה — המכנה בריבוע.

הוכחה 1: ישירות מההגדרה

הרעיון נביא למכנה משותף, ואז נשתמש באותו רעיון כמו בכלל המכפלה: נוסיף למונה ונחסיר ממנו את $u(x)v(x)$, ונוציא גורמים משותפים מכל זוג איברים.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h}&=\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{h\cdot v(x+h)\,v(x)}&&\text{(מכנה משותף)}\\&=\frac{v(x)\left[u(x+h)-u(x)\right]-u(x)\left[v(x+h)-v(x)\right]}{h\cdot v(x+h)\,v(x)}&&\text{(הוספנו וחיסרנו }u(x)v(x)\text{)}\\&=\frac{1}{v(x+h)\,v(x)}\cdot\left[v(x)\cdot\frac{u(x+h)-u(x)}{h}-u(x)\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]\end{aligned}$$

כש־$h\to 0$: לפי כלי העזר $v(x+h)\to v(x)$, והמנות שבסוגריים המרובעים שואפות ל־$u'(x)$ ול־$v'(x)$. לכן:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{1}{v(x)\cdot v(x)}\left[v(x)\,u'(x)-u(x)\,v'(x)\right]=\frac{u'(x)\,v(x)-u(x)\,v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}.$$

מש"ל ■

עצרו ובדקו

בהוכחה חילקנו גם ב־$v(x+h)$, אבל הנחנו רק ש־$v(x)\neq 0$. למה מותר לחלק ב־$v(x+h)$?
רמז: חשבו על כלי העזר.

הוכחה 2: דרך $\frac{1}{v}$ וכלל המכפלה

הרעיון נמצא קודם את הנגזרת של $\frac{1}{v}$, ואז נכתוב $\frac{u}{v}=u\cdot\frac{1}{v}$ ונשתמש בכלל המכפלה.

הנגזרת של $\frac{1}{v}$: מביאים למכנה משותף, ומשתמשים בהגדרת v' ובכלי העזר:

$$\frac{\frac{1}{v(x+h)}-\frac{1}{v(x)}}{h}=-\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\cdot\frac{1}{v(x+h)\,v(x)}\xrightarrow[h\to 0]{}-\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

ועכשיו כלל המכפלה:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\left(u\cdot\frac{1}{v}\right)'=u'\cdot\frac{1}{v}+u\cdot\left(-\frac{v'}{v^2}\right)=\frac{u'v}{v^2}-\frac{uv'}{v^2}=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

מש"ל ■

דוגמה

נגזור את $f(x)=\dfrac{x^2}{3x+1}$. נסמן $u=x^2$ ו־$v=3x+1$, ולכן $u'=2x$ ו־$v'=3$:

$$f'(x)=\frac{2x(3x+1)-x^2\cdot 3}{(3x+1)^2}=\frac{6x^2+2x-3x^2}{(3x+1)^2}=\frac{3x^2+2x}{(3x+1)^2}.$$

למשל, $f'(1)=\frac{5}{16}$: בנקודה $\left(1,\frac{1}{4}\right)$ הגרף של f עולה בשיפוע $\frac{5}{16}$.

7 כלל השרשרת: נגזרת של פונקציה מורכבת

כלל השרשרת

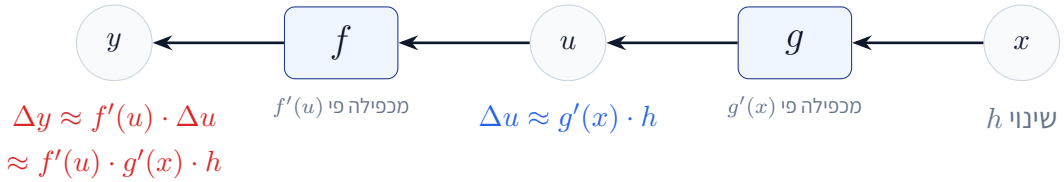
אם g גזירה בנקודה x, ו־f גזירה בנקודה $g(x)$, אז:

$$\boxed{\big(f(g(x))\big)'=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)}$$

במילים: גוזרים את הפונקציה ה"חיצונית" f ומשאירים בתוכה את הפונקציה ה"פנימית" $g(x)$ כמו שהיא, ואז כופלים בנגזרת של הפונקציה הפנימית. בסימון של לייבניץ, עם $u=g(x)$ ו־$y=f(u)$, הכלל נכתב כך: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

האינטואיציה: גלגלי שיניים

גלגל שיניים A מסובב את גלגל B, וגלגל B מסובב את גלגל C. אם C מסתובב מהר פי 3 מ־B, ו־B מסתובב מהר פי 2 מ־A, אז C מסתובב מהר פי $3\cdot 2=6$ מ־A. כשקצבי שינוי "מחוברים בשרשרת", הם **מוכפלים**.



סרטוט 6: פונקציה מורכבת כשתי "מכונות" בשרשרת. שינוי קטן ב־x מוכפל פעמיים.

ההוכחה (אינטואיטיבית)

הרעיון נכתוב את מנת ההפרשים של $f(g(x))$ כמכפלה של שתי מנות הפרשים: אחת של f ואחת של g. נסמן $u = g(x)$ ו־$\Delta u = g(x+h) - g(x)$. אז $g(x+h) = u + \Delta u$.

	טענה	נימוק
1	$\dfrac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \dfrac{f(u+\Delta u) - f(u)}{h}$	הסימונים
2	$= \dfrac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \dfrac{\Delta u}{h}$	כפל וחילוק ב־Δu **(בתנאי ש־$\Delta u \neq 0$!)**
3	$\dfrac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \to f'(u) = f'(g(x))$	כש־$h \to 0$ גם $\Delta u \to 0$ (כלי העזר), ו־Δu ממלא כאן את התפקיד של h בהגדרת $f'(u)$
4	$\dfrac{\Delta u}{h} = \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} \to g'(x)$	הגדרת $g'(x)$
5	$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	גבול של מכפלה הוא מכפלת הגבולות

מש"ל ■

איפה ההוכחה "מרמה" קצת? בצעד 2 חילקנו ב־Δu, וזה מותר רק אם $\Delta u \neq 0$. כש־$g'(x) \neq 0$ אין בעיה: $\frac{\Delta u}{h}$ קרוב ל־$g'(x)$, ולכן $\Delta u \neq 0$ לכל h קטן מספיק. אבל כש־$g'(x) = 0$, ייתכן ש־$\Delta u = 0$ גם עבור ערכים של h קרובים מאוד ל־0 (למשל, כש־g קבועה ליד x). המשפט נכון גם אז, ואפשר לתקן את ההוכחה.

להעמקה: התיקון. נגדיר פונקציית עזר:

$$\varphi(k) = \frac{f(u+k) - f(u)}{k} \quad (k \neq 0), \qquad \varphi(0) = f'(u).$$

לפי הגדרת הנגזרת, $\varphi(k) \to f'(u)$ כש־$k \to 0$. בנוסף, $f(u+k) - f(u) = \varphi(k) \cdot k$ **לכל** k — גם ל־$k = 0$, כי אז שני האגפים שווים ל־0. נציב $k = \Delta u$ ונחלק ב־h בלבד:

$$\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{h} = \varphi(\Delta u) \cdot \frac{\Delta u}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} f'(u) \cdot g'(x).$$

בדרך הזאת לא חילקנו ב־Δu אף פעם. הגורם הראשון שואף ל־$f'(u)$ כי $\Delta u \to 0$ (וכש־$\Delta u = 0$ בדיוק, ערכו $\varphi(0) = f'(u)$ — בשביל זה הגדרנו כך את $\varphi(0)$), והשני שואף ל־$g'(x)$.

שתי דוגמאות

א. ב־$(3x^2+1)^5$ הפונקציה החיצונית היא u^5, והפנימית היא $u=3x^2+1$:

$$\left((3x^2+1)^5\right)' = 5(3x^2+1)^4 \cdot 6x = 30x\,(3x^2+1)^4.$$

ב. ב־$\sqrt{x^2+9}$ הפונקציה החיצונית היא $\sqrt{u}$, שנגזרתה $\frac{1}{2\sqrt{u}}$, והפנימית היא $u=x^2+9$:

$$\left(\sqrt{x^2+9}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+9}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}.$$

למשל, ב־$x=4$ השיפוע הוא $\frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$.

8 כל הכללים במבט אחד

הכלל	הנוסחה	רעיון ההוכחה
חזקה	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	בינום, או פירוק $a^n - b^n$
סכום וקבוע	$(f \pm g)' = f' \pm g' \quad (cf)' = cf'$	פיצול השבר, הוצאת גורם משותף
מכפלה	$(uv)' = u'v + uv'$	שטח של מלבן; הוספה והחסרה
מנה	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	מכנה משותף והוספה והחסרה; או $u \cdot \frac{1}{v}$
שרשרת	$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	כפל וחילוק ב־Δu

טעות נפוצה

- **מכפלה ומנה.** $(uv)' \neq u' \cdot v'$ ו־$\left(\frac{u}{v}\right)' \neq \frac{u'}{v'}$. דוגמה נגדית: $(x \cdot x)' = 2x$, ולא 1.
- **הסדר בכלל המנה.** במונה כתוב $u'v - uv'$, ולא $uv' - u'v$. הסדר ההפוך נותן תוצאה עם סימן הפוך. טיפ: "מתחילים בנגזרת של המונה".
- **הנגזרת הפנימית.** $\left((3x^2+1)^5\right)' \neq 5(3x^2+1)^4$. שוכחים לכפול ב־$6x$, הנגזרת של הפונקציה הפנימית.
- **הצבה מוקדמת.** בהגדרה אסור להציב $h=0$ בהתחלה (מקבלים $\frac{0}{0}$). קודם מצמצמים ב־h, ורק אחר כך משאיפים את h ל־0.
- **כלל החזקה במקום הלא נכון.** $(x^n)' = nx^{n-1}$ נכון כשהבסיס משתנה והמעריך קבוע. לפונקציה מעריכית, כמו 2^x, הכלל **אינו** מתאים: $(2^x)' \neq x \cdot 2^{x-1}$.

הידעתם?

משיקים ונקודות קיצון חקרו עוד לפני שהנגזרת הומצאה: פייר דה פרמה, למשל, עשה זאת כבר בשנות ה־30 של המאה ה־17. את החשבון הדיפרנציאלי כשיטה כללית פיתחו שני אנשים, כל אחד בנפרד: אייזק ניוטון האנגלי באמצע שנות ה־60 של המאה ה־17, וגוטפריד וילהלם לייבניץ הגרמני באמצע שנות ה־70. ניוטון חשב על הנגזרת כעל מהירות וקרא לה "פלוקסיה" (fluxion). מלייבניץ קיבלנו את הסימונים $\frac{dy}{dx}$ ו־$\int$. לייבניץ פרסם ראשון, ב־1684, וניוטון פרסם את שיטתו בצורה מסודרת רק מאוחר יותר. על השאלה מי המציא ראשון פרץ ויכוח מר. כיום מקובל שכל אחד מהם הגיע לרעיונות בעצמו.
במשך יותר ממאה שנה השתמשו בנגזרות בהצלחה, אף שלא היה ברור מהו בדיוק "גודל קטן לאין שיעור". הפילוסוף ג'ורג' ברקלי לעג לכך ב־1734 וכינה את הגדלים האלה "רוחות של כמויות שהלכו לעולמן". את ההגדרה המדויקת של הגבול ניסחו רק במאה ה־19, בעיקר בעבודתם של אוגוסטן־לואי קושי וקרל ויירשטראס. הסימון $f'(x)$ הוא של ז'וזף־לואי לגרנז', מסוף המאה ה־18.

9 בדקו את עצמכם

חמש שאלות

1. חשבו לפי ההגדרה את הנגזרת של $f(x)=3x^2-x$.
2. הראו בעזרת כלל המנה ש־$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$. האם זה מתאים לכלל החזקה עם $n=-1$?
3. גזרו את $(2x+1)^3$ בעזרת כלל השרשרת, ובדקו את התשובה על ידי פתיחת סוגריים.
4. הוכיחו לפי ההגדרה ש־$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$. **רמז:** כפלו את המונה ואת המכנה ב־$\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$.
5. שאלת "עצרו ובדקו": למה מותר לחלק ב־$v(x+h)$ בהוכחה 1 של כלל המנה?

תשובות

1. $\frac{3(x+h)^2-(x+h)-3x^2+x}{h}=\frac{6xh+3h^2-h}{h}=6x+3h-1\ \to\ 6x-1$. לכן $f'(x)=6x-1$.
2. עם $u=1$ ו־$v=x^n$ מקבלים $\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{0\cdot x-1\cdot 1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$. גם כלל החזקה נותן $(x^{-1})'=-x^{-2}$ — מתאים. ובאותה דרך, לכל n טבעי $\left(\frac{1}{x^n}\right)'=\frac{0\cdot x^n-1\cdot nx^{n-1}}{x^{2n}}=-n\,x^{-n-1}$, כלומר כלל החזקה נכון לכל מערך **שלם**.
3. $3(2x+1)^2\cdot 2=24x^2+24x+6$. בדיקה: $(2x+1)^3=8x^3+12x^2+6x+1$, והנגזרת זהה.
4. $\frac{1}{2\sqrt{x}}\ \to\ \frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$.
5. לפי כלי העזר $v(x+h)\to v(x)\neq 0$, ולכן עבור h קטן מספיק גם $v(x+h)\neq 0$. בגבול רק ערכים קטנים של h מעניינים אותנו.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את המסמך בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנו קטעים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.