

מרחק נקודה ממישור

מציבים, לוקחים ערך מוחלט ומחלקים – ולמה זה תמיד עובד

כ־18 דקות קריאה

2 הוכחות

וקטורים במרחב

5 יח"ל

כיתה י"ב

מה כדאי לדעת קודם

- משוואת מישור, והנורמל שלו מתוך המקדמים.
- מכפלה סקלרית ואורך של וקטור.
- להוכחה 2: הצגה פרמטרית של ישר.

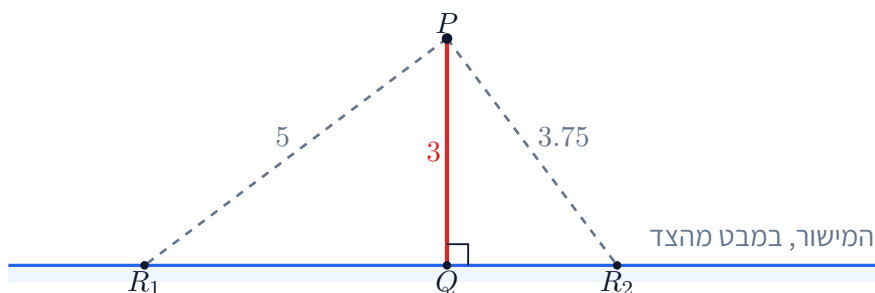
מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: למה המרחק נמדד דווקא לאורך האנך – ולמה מחלקים באורך הנורמל.
- הוכחה 1: היטל על הנורמל, בעזרת המכפלה הסקלרית.
- הוכחה 2: יורדים מהנקודה לאורך הנורמל עד שפוגשים את המישור.
- האחות הקטנה: מרחק נקודה מישור במישור.
- שימושים, טעויות נפוצות ושאלות לבדיקה עצמית.

1 האינטואיציה: הדרך הקצרה ביותר היא ישר למטה

האינטואיציה

דמיינו רחפן שמרחף מעל מגרש שטוח. הדרך הקצרה ביותר שלו אל הדשא היא לרדת ישר למטה, בניצב למגרש. כל ירידה "באלכסון" ארוכה יותר: היא היתר במשולש ישר-זווית, והירידה הישרה היא רק ניצב בו. לכן **המרחק של נקודה ממישור** הוא אורך האנך – הקטע הניצב שיורד מהנקודה אל המישור. ואיך מחשבים אותו? כשהמישור הוא הרצפה, המרחק הוא פשוט הגובה של הנקודה. אבל מישור יכול להיות נטוי, כמו גג רעפים. הרעיון של הנוסחה: ניצב את שיעורי הנקודה באגף שמאל של משוואת המישור. נקודה על המישור נותנת 0, וככל שהנקודה רחוקה יותר, המספר גדול יותר בערכו המוחלט. נשאר רק "לכיל" את המספר הזה ליחידות של אורך – ולשם כך מחלקים באורך הנורמל.



סרטוט 1: האנך PQ קצר מכל קטע אחר מ־ P אל המישור: $3 < 3.75 < 5$.

דוגמה מספרית קטנה

בסרטוט, אורך האנך PQ הוא 3. הנקודה R_1 נמצאת במרחק 4 מ- Q , והנקודה R_2 נמצאת במרחק 2.25 ממנה. לפי פיתגורס:

$$PR_2 = \sqrt{3^2 + 2.25^2} = 3.75 \quad PR_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

ועכשיו ל"כיוול": הרצפה היא המישור $z = 0$, והנקודה $(3, 4, 5)$ נמצאת בגובה 5 מעליה. נכתוב את הרצפה כ- $z = 0$ ונציב: יוצא $5 -$ בדיוק המרחק. אבל את אותה רצפה אפשר לכתוב גם כ- $2z = 0$. הצבה נותנת עכשיו 10 - פי שניים מהמרחק! הנורמל של המשוואה הזאת הוא $(0, 0, 2)$, ואורכו 2. אחרי חילוק באורך הנורמל: $\frac{10}{2} = 5$. החילוק מבטל את ההשפעה של אורך הנורמל שבחרנו.

2 המשפט

כפי שראינו, **המרחק של נקודה P_1 ממישור π** הוא האורך של הקטע P_1Q , כאשר Q הוא עקב האנך מ- P_1 למישור. למה זה באמת המרחק הקצר ביותר? לכל נקודה R אחרת במישור, המשולש P_1QR ישר-זווית ב- Q (כי P_1Q ניצב לכל קטע במישור), ולכן לפי פיתגורס

$$P_1R^2 = P_1Q^2 + QR^2 > P_1Q^2$$

ואם P_1 נמצאת על המישור, אז $Q = P_1$ והמרחק הוא 0.

מרחק נקודה ממישור

המרחק של הנקודה $P_1(x_1, y_1, z_1)$ מהמישור $Ax + By + Cz + D = 0$, שבו A, B, C אינם כולם אפס, הוא

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

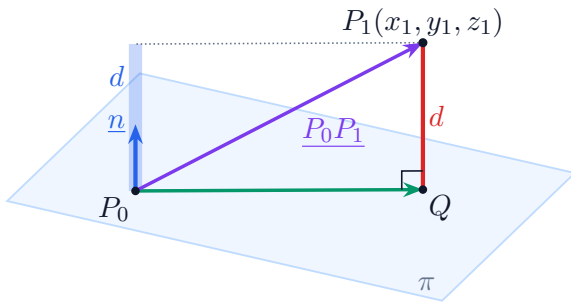
במילים: מציבים את שיעורי הנקודה באגף שמאל של משוואת המישור, לוקחים ערך מוחלט ומחלקים באורך הנורמל.

שימו לב: את המשוואה צריך לכתוב קודם בצורה " $\dots = 0$ ", כי D הוא המספר שבאגף שמאל.

3 הוכחה 1: היטל על הנורמל

הרעיון נבחר נקודה כלשהי P_0 על המישור. הווקטור מ- P_0 אל P_1 "נוטה" לאיזה כיוון שהוא, אבל הצל שלו על הכיוון של הנורמל הוא בדיוק באורך האנך. ואת אורך הצל אנחנו יודעים לחשב בעזרת המכפלה הסקלרית.

שלב א': המרחק הוא הצל על הנורמל



סרטוט 2: האנך QP_1 (אדום) והצל של P_0P_1 על הנורמל (כחול) שווים באורכם.

תהי $P_0(x_0, y_0, z_0)$ נקודה כלשהי על המישור, ויהי Q עקב האנך מ- P_1 . אורך האנך הוא $d = |QP_1|$. נפרק את הדרך מ- P_0 אל P_1 : קודם במישור עד Q , ואחר כך לאורך האנך. החלק הראשון ניצב לנורמל, והחלק השני מקביל לו. בסרטוט רואים זאת גם כ"צל": אם מטילים את P_0P_1 על הישר של הנורמל שעובר דרך P_0 , מקבלים קטע באורך d בדיוק.

נימוק	טענה
הולכים מ- P_0 אל Q , וממשיכים אל P_1	$\underline{P_0P_1} = \underline{P_0Q} + \underline{QP_1}$ ①
$\underline{P_0Q}$ מונח במישור, ו- $\underline{n}$ ניצב למישור	$\underline{n} \cdot \underline{P_0Q} = 0$ ②
כופלים את צעד 1 ב- $\underline{n}$ (חוק הפילוג) ומציבים את צעד 2	$\underline{n} \cdot \underline{P_0P_1} = \underline{n} \cdot \underline{QP_1}$ ③
$\underline{QP_1}$ מקביל ל- $\underline{n}$ ואורכו d . הזווית α ביניהם היא 0° או 180° , ולכן $ \cos \alpha = 1$. (ואם P_1 על המישור, $\underline{QP_1} = \underline{0}$ ושני האגפים 0.)	$ \underline{n} \cdot \underline{QP_1} = \underline{n} \cdot d$ ④
צעדים 3 ו-4, וחילוק ב- $ \underline{n} \neq 0$	$d = \frac{ \underline{n} \cdot \underline{P_0P_1} }{ \underline{n} }$ ⑤

זו בדיוק הנוסחה לאורך ההיטל של $\underline{P_0P_1}$ על $\underline{n}$ – הצל מהסרטוט.

✓ עצרו ובדקו

המישור הוא הרצפה $z = 0$, עם $\underline{n} = (0, 0, 1)$, והנקודה היא $P_1(5, 7, 4)$. חשבו את $\frac{|\underline{n} \cdot \underline{P_0P_1}|}{|\underline{n}|}$ פעמיים: פעם עם $P_0 = (0, 0, 0)$ ופעם עם $P_0 = (-3, 2, 0)$. מה קיבלתם, ולמה זה הגיוני?

שלב ב': מחשבים את המונה ואת המכנה

נימוק	טענה
המכפלה הסקלרית לפי רכיבים	$\underline{n} \cdot \underline{P_0P_1} = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)$ ①
פתיחת סוגריים וסידור	$\underline{n} \cdot \underline{P_0P_1} = (Ax_1 + By_1 + Cz_1) - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ ②
P_0 על המישור, ולכן היא מקיימת את משוואתו	$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$ ③

הצבת צעד 3 בצעד 2

$$\underline{n} \cdot \underline{P_0P_1} = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \quad (4)$$

האורך של $\underline{n} = (A, B, C)$

$$|\underline{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad (5)$$

מציבים את צעדים 4 ו-5 בנוסחה משלב א'

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (6)$$

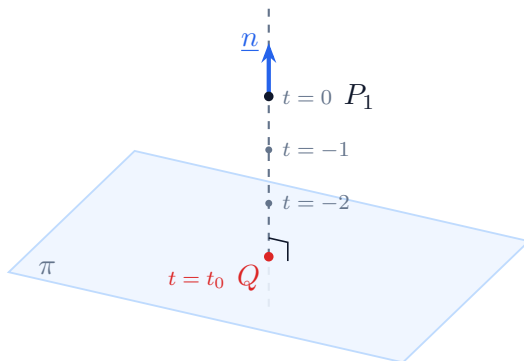
מש"ל

מה למדנו מהוכחה 1

- הנקודה P_0 נעלמה מהתוצאה! בחרנו נקודה כלשהי על המישור, והיא לא השפיעה על דבר – וזה הגיוני, כי המרחק של P_1 מהמישור אינו תלוי בשום נקודת עזר.
- בלי הערך המוחלט, המספר $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ שווה ל- $\underline{n} \cdot \underline{QP_1}$ (צעד 3 בשלב א' וצעד 4 בשלב ב'). הוא חיובי כש- $\underline{QP_1}$ מצביע לכיוון של $\underline{n}$, ושלילי כשהוא מצביע לכיוון ההפוך. כלומר, הסימן מגלה באיזה צד של המישור נמצאת P_1 .

4 הוכחה 2: יורדים לאורך הנורמל

הרעיון נצא מ- P_1 ונלך לאורך הנורמל – כלומר בדיוק בכיוון האנך – עד שנפגוש את המישור. נמצא כמה "צעדים" של $\underline{n}$ עשינו, ונכפול באורך של צעד אחד.



הישר שעובר דרך P_1 בכיוון $\underline{n} = (A, B, C)$ ניצב למישור, ולכן הוא ישר האנך. ההצגה הפרמטרית שלו:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= (x_1, y_1, z_1) + t \cdot (A, B, C) \\ &= (x_1 + tA, y_1 + tB, z_1 + tC) \end{aligned}$$

עבור $t = 0$ אנחנו ב- P_1 , ועבור כל t אחר זזים t "צעדים" של $\underline{n}$. עקב האנך Q מתקבל עבור ערך מסוים t_0 – הערך שבו הנקודה על הישר מקיימת את משוואת המישור. בסרטוט t_0 שלילי, כי $\underline{n}$ מצביע אל הצד של P_1 , והולכים נגדו.

סרטוט 3: ישר האנך: $\underline{x} = \underline{OP_1} + t \cdot \underline{n}$. כאן $t_0 = -3$

נימוק

טענה

Q על ישר האנך וגם על המישור

$$A(x_1 + t_0A) + B(y_1 + t_0B) + C(z_1 + t_0C) + D = 0 \quad (1)$$

פתיחת סוגריים וסידור

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) + t_0(A^2 + B^2 + C^2) = 0 \quad (2)$$

$A^2 + B^2 + C^2 > 0$, כי $\underline{n} \neq \underline{0}$

$$t_0 = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2} \quad (3)$$

$$\underline{OQ} = \underline{OP_1} + t_0 \cdot \underline{n}$$

$$\underline{P_1Q} = t_0 \cdot \underline{n} \quad (4)$$

אורך של מספר כפול וקטור:
 $|t_0 \underline{n}| = |t_0| \cdot |\underline{n}|$

$$d = |t_0| \cdot |\underline{n}| = |t_0| \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad (5)$$

הצבת צעד 3

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad (6)$$

$$w > 0 \quad \frac{\sqrt{w}}{w} = \frac{1}{\sqrt{w}}$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (7)$$

מש"ל

ההוכחה הזאת נותנת בונוס: את עקב האנך עצמו, $\underline{OQ} = \underline{OP}_1 + t_0 \cdot \underline{n}$.

דוגמה: המרחק ועקב האנך

המרחק של $P_1(2, 3, 1)$ מהמישור $x + 2y + 2z - 4 = 0$:

$$d = \frac{|2 + 6 + 2 - 4|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{6}{3} = 2$$

ועכשיו בדרך של הוכחה: $t_0 = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$, ולכן

$$\underline{OQ} = (2, 3, 1) - \frac{2}{3} \cdot (1, 2, 2) = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

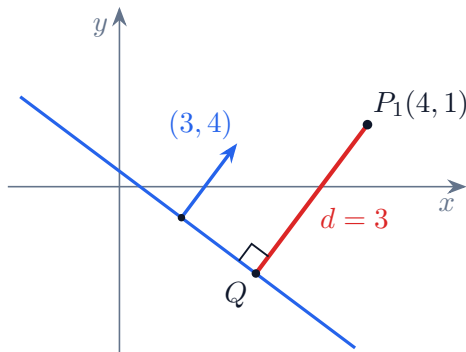
בדיקה: $0 = \frac{4}{3} + \frac{10}{3} - \frac{2}{3} - 4 = 0$, כלומר Q על המישור. והמרחק: $2 = \frac{2}{3} \cdot 3 = |\underline{t}_0| \cdot |\underline{n}|$. אם נמשיך עוד אותו מרחק מעבר ל- Q , נגיע ל"תמונת המראה" של P_1 במישור: הנקודה שווקטור המקום שלה הוא $\underline{OP}_1 + 2t_0 \cdot \underline{n} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

5 שתי הדרכים זו מול זו

הוכחה 1: היטל על הנורמל	הוכחה 2: יורדים לאורך הנורמל	
המרחק הוא הצל של $\underline{P}_0 \underline{P}_1$ על $\underline{n}$	הולכים מ- P_1 בכיוון $\underline{n}$ עד המישור	הרעיון
מכפלה סקלרית, היטל	הצגה פרמטרית של ישר, פתרון משוואה	הכלים
נקודה כלשהי P_0 על המישור – שנעלמת בסוף	אין צורך; מוצאים את t_0 ישירות	נקודת עזר
משמעות הסימן: באיזה צד הנקודה	עקב האנך Q ו"תמונת המראה"	בונוס

6 האחות הקטנה: מרחק נקודה מישר

במישור (עם x ו- y בלבד) כל ישר אפשר לכתוב בצורה $Ax + By + C = 0$, והווקטור (A, B) ניצב לו: וקטור כיוון של הישר הוא $(B, -A)$, ו- $(A, B) \cdot (B, -A) = 0$. בדיוק כמו נורמל של מישור במרחב: אם (x_0, y_0) על הישר, אז הנקודות של הישר הן הפתרונות של $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. לכן אותן שתי הוכחות עובדות מילה במילה, רק בלי z :



סרטוט 4: המרחק מ- P_1 לישר $3x + 4y - 1 = 0$ הוא אורך האנך P_1Q . הווקטור $(3, 4)$ ניצב לישר.

מרחק נקודה מישר

המרחק של $P_1(x_1, y_1)$ מהישר $Ax + By + C = 0$ הוא

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

דוגמה: המרחק של $P_1(4, 1)$ מהישר $3x + 4y - 1 = 0$:

$$d = \frac{|12 + 4 - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3$$

ישר שנתון בצורה $y = mx + b$ כותבים קודם בצורה $mx - y + b = 0$. למשל, את הישר $y = 2x + 1$ כותבים $2x - y + 1 = 0$, והמרחק של הנקודה $(1, 7)$ ממנו הוא $\frac{|2 - 7 + 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

7 מה עושים עם הנוסחה?

שימוש 1: המרחק בין שני מישורים מקבילים

שני מישורים מקבילים אפשר תמיד לכתוב עם אותו נורמל:

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0 \quad Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

נבחר נקודה כלשהי $P_0(x_0, y_0, z_0)$ של המישור הראשון, ונחשב את המרחק שלה מהשני. הנקודה מקיימת $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D_1$, ולכן לפי הנוסחה:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

התוצאה אינה תלויה ב- P_0 : כל הנקודות של הראשון נמצאות באותו מרחק מהשני, וזה המרחק בין המישורים.

דוגמה: בין $2x - y + 2z - 1 = 0$ ל- $2x - y + 2z + 8 = 0$ המרחק הוא $\frac{|8 - (-1)|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{9}{3} = 3$. בדיקה עם נקודה: $(0, -1, 0)$ נמצאת על הראשון ($0 + 1 + 0 - 1 = 0$), והמרחק שלה מהשני הוא $\frac{|0 + 1 + 0 + 8|}{3} = 3$.

שימוש 2: באיזה צד של המישור?

כפי שראינו בסיכום של הוכחה 1, הסימן של $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ מגלה באיזה צד של המישור נמצאת הנקודה. לכן שתי נקודות נמצאות משני צדי המישור בדיוק כשהן נותנות סימנים הפוכים – ואז הקטע שמחבר אותן חוצה את המישור. למשל, עבור המישור $x + 2y + 2z - 4 = 0$: הנקודה $(2, 3, 1)$ נותנת $+6$, וראשית הצירים נותנת -4 . הסימנים הפוכים, ולכן המישור עובר ביניהן.

שימוש 3: הגובה של פירמידה

בפירמידה $OABC$ הקודקוד O הוא ראשית הצירים, ושלושת הקודקודים האחרים הם $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ ו- $C(0, 0, 1)$. משוואת המישור ABC היא

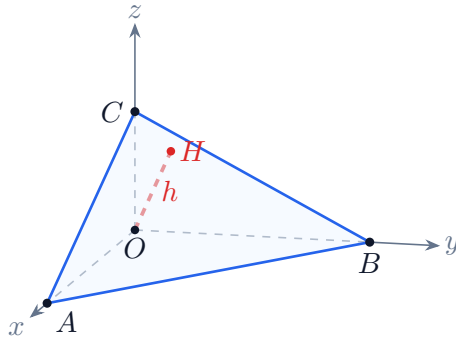
$$2x + 3y + 6z - 6 = 0$$

(בדקו: שלוש הנקודות מקיימות את המשוואה). הגובה מ- O אל הבסיס ABC הוא המרחק של O מהמישור:

$$h = \frac{|0 + 0 + 0 - 6|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{6}{7}$$

ומה זה נותן? הנפח של פירמידה הוא $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$ אם בוחרים כבסיס את OAB (משולש ישר-זווית עם ניצבים 3 ו-2, ששטחו 3), הגובה הוא $OC = 1$, ולכן $V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 1 = 1$. ועם הבסיס ABC והגובה h נקבל את שטח המשולש ה"נטוי":

$$S_{\triangle ABC} = \frac{3V}{h} = \frac{3}{6/7} = \frac{7}{2}$$



סרטוט 5: הגובה מ- O (מקווקו, בתוך הפירמידה) פוגש את הבסיס ABC בנקודה H .

⚠ טעות נפוצה

- **משוואה שאינה בצורה " = 0 "**. במשוואה $2x + y - 2z = 5$ המספר D הוא -5 ולא 5. עבור הנקודה $(1, 1, 1)$: נכון - $\frac{|2+1-2-5|}{3} = \frac{4}{3}$. שגוי - $\frac{|2+1-2+5|}{3} = 2$.
- **בלי ערך מוחלט** יוצא לפעמים "מרחק שלילי". הסימן מגלה באיזה צד נמצאת הנקודה, אבל המרחק תמיד חיובי (או אפס).
- **שורש במכנה**. מחלקים ב- $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, ולא ב- $A^2 + B^2 + C^2$.
- **מישורים מקבילים עם מקדמים שונים**. לפני שמשתמשים ב- $|D_2 - D_1|$, מביאים את שתי המשוואות לאותו נורמל: המשוואה $4x - 2y + 4z + 16 = 0$ מתארת את אותו מישור כמו $2x - y + 2z + 8 = 0$.
- **ישר במרחב אינו מישור**. הנוסחה היא למרחק ממישור. לישר במרחב אין משוואה מהצורה $Ax + By + Cz + D = 0$, ומרחק מישר במרחב מחשבים אחרת – למשל בעזרת עקב האנך.

🕒 הידעתם?

אם מחלקים מראש את משוואת המישור באורך הנורמל, מקבלים משוואה שבה הנורמל הוא וקטור יחידה. הצורה הזאת נקראת "הצורה הנורמלית של הסה", על שם המתמטיקאי הגרמני לודוויג אוטו הסה (1811–1874). בצורה הזאת הצבה של נקודה נותנת ישירות את המרחק – עם סימן שמגלה באיזה צד של המישור היא נמצאת. והיום? במשחקי מחשב, כדי לבדוק אם כדור פגע בקיר, התוכנה מחשבת את המרחק ממרכז הכדור למישור של הקיר ומשווה אותו לרדיוס של הכדור.

8 בדקו את עצמכם

שבע שאלות קצרות

1. מצאו את המרחק של הנקודה $(1, -2, 3)$ מהמישור $2x - y + 2z - 1 = 0$.
2. מצאו את המרחק של ראשית הצירים מהמישור $x + y + z = 6$.
3. מצאו את המרחק בין המישור $x - 2y + 2z + 4 = 0$ למישור $2x - 4y + 4z - 10 = 0$.
4. מצאו את עקב האנך מהנקודה $(3, 1, 2)$ למישור $x + y + z = 0$, ואת המרחק של הנקודה מהמישור.
5. אילו נקודות על ציר ה- x נמצאות במרחק 2 מהמישור $2x + y - 2z = 0$?
6. מצאו את המרחק של הנקודה $(-1, 2)$ מהישר $y = 3x + 1$.
7. מה קיבלתם בתיבת "עצרו ובדקו", ולמה?

תשובות

1. $d = \frac{|2+2+6-1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{9}{3} = 3$
2. נכתוב $x + y + z - 6 = 0$ אז $d = \frac{|-6|}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \approx 3.46$
3. נחלק את המשוואה השנייה ב-2: $x - 2y + 2z - 5 = 0$. עכשיו הנורמלים זהים, ו- $d = \frac{|-5-4|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{9}{3} = 3$
4. $t_0 = -\frac{3+1+2}{3} = -2$, ולכן $\underline{OQ} = (3, 1, 2) - 2 \cdot (1, 1, 1) = (1, -1, 0)$. בדיקה: $1 - 1 + 0 = 0$. המרחק: $\frac{|6|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$
5. הנקודה $(x, 0, 0)$ נמצאת במרחק $\frac{2|x|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2|x|}{3}$. נדרוש $\frac{2|x|}{3} = 2$, ולכן $x = 3$ או $x = -3$: הנקודות $(3, 0, 0)$ ו- $(-3, 0, 0)$
6. נכתוב $3x - y + 1 = 0$ אז $d = \frac{|-3-2+1|}{\sqrt{9+1}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \approx 1.26$
7. בשתי הפעמים יוצא 4, כי $\underline{P_0P_1} \cdot \underline{n}$ הוא פשוט הרכיב z של $\underline{P_0P_1}$, כלומר $4 - 0$, ולא משנה איזו נקודה של הרצפה בחרנו. זה הגובה של P_1 מעל הרצפה – כלומר המרחק.