משוואת המישור במרחב

נקודה אחת וכיוון ניצב אחד — וכל המישור נכנס למשוואה אחת

כיתה י״ב | 5 יח״ל | וקטורים במרחב | 2 הוכחות | כ־18 דקות קריאה

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: עמוד דגל על מגרש — ומה הוא ״מספר״ לנו על המגרש.
- הוכחה 1: מנקודה ומווקטור נורמל אל המשוואה $Ax+By+Cz+D=0$ — בשני הכיוונים.
- הוכחה 2: מההצגה הפרמטרית אל אותה משוואה.
- מישור דרך שלוש נקודות, מקרים מיוחדים, טעויות נפוצות ושאלות לבדיקה עצמית.

מה כדאי לדעת קודם

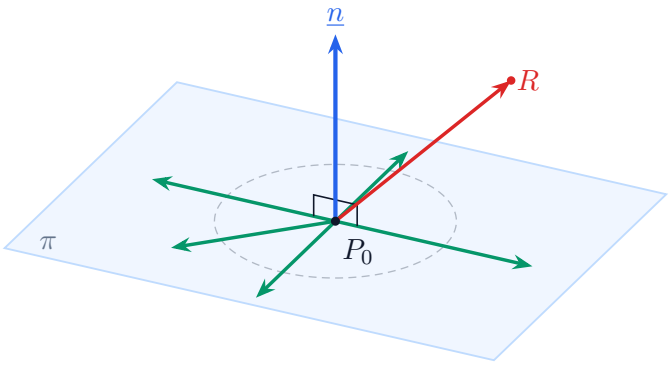
- וקטורים במרחב: רכיבים, חיבור וכפל במספר.
- המכפלה הסקלרית, ובמיוחד: שני וקטורים ניצבים אם ורק אם המכפלה הסקלרית שלהם היא 0.
- להוכחה 2: הצגה פרמטרית, וצירוף ליניארי של וקטורים.

1 האינטואיציה: עמוד דגל על מגרש

האינטואיציה

דמיינו מגרש כדורגל שטוח לגמרי, ובאמצעו עמוד דגל שעומד זקוף. כל קו שמסמנים על הדשא ויוצא מבסיס העמוד — לכל כיוון שהוא — יוצר עם העמוד זווית ישרה. ולהפך: אם נמתח קו מבסיס העמוד אל נקודה שאינה על הדשא, למשל אל כדור שעף באוויר, הקו נוטה כלפי מעלה, והזווית בינו לבין העמוד כבר אינה ישרה.

לכן כדי לתאר את המגרש כולו מספיקים שני נתונים: **נקודה אחת** עליו (בסיס העמוד) ו**כיוון אחד** שניצב לו (כיוון העמוד). נקודה נמצאת על המגרש אם ורק אם הקו מבסיס העמוד אליה ניצב לעמוד. ואת ״ניצב״ אנחנו כבר יודעים לבדוק בחישוב: המכפלה הסקלרית שווה לאפס.



סרטוט 1: המישור π, הנקודה P_0 (בסיס העמוד) והנורמל $\underline{n}$ (כיוון העמוד). כל הווקטורים הירוקים מונחים במישור, ולכן ניצבים ל־$\underline{n}$. הווקטור האדום יוצא מהמישור אל R — והוא אינו ניצב ל־$\underline{n}$.

דוגמה מספרית קטנה

המגרש הוא "הרצפה": המישור שבו $z=0$. בסיס העמוד הוא ראשית הצירים $O(0,0,0)$, והעמוד בכיוון $\underline{n}=(0,0,1)$.

- הנקודה $(3,-2,0)$: הווקטור מ־O אליה הוא $(3,-2,0)$, ו־$(3,-2,0)\cdot(0,0,1)=0$. הווקטור ניצב ל־$\underline{n}$ — הנקודה על הרצפה.
- הנקודה $(1,1,5)$: כאן המכפלה היא $(1,1,5)\cdot(0,0,1)=5\neq 0$. הווקטור אינו ניצב — הנקודה מרחפת מעל הרצפה.

המכפלה הסקלרית "שופטת" אם נקודה נמצאת על המישור. בסעיפים הבאים נהפוך את השיפוט הזה למשוואה. (ושימו לב: יצא 5 — בדיוק הגובה של הנקודה מעל הרצפה. זה לא מקרי, וזה הבסיס לנוסחת המרחק של נקודה ממישור.)

2 המשפט

וקטור נורמל למישור (או בקיצור: **נורמל**) הוא וקטור, שונה מווקטור האפס, שניצב למישור — כלומר ניצב לכל וקטור שמחבר שתי נקודות של המישור. דרך כל נקודה במרחב עובר מישור אחד בדיוק שניצב לכיוון נתון, ולכן נקודה אחת ונורמל קובעים את המישור.

משוואת המישור

יהי π המישור שעובר דרך הנקודה $P_0(x_0,y_0,z_0)$ וניצב לווקטור $\underline{n}=(A,B,C)\neq\underline{0}$. נקודה $P(x,y,z)$ נמצאת על π אם ורק אם

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$

ואחרי פתיחת סוגריים:

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$$

כאשר $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$.
ולהפך: כל משוואה מהצורה $Ax+By+Cz+D=0$, שבה המספרים A, B ו־C אינם כולם אפס, היא משוואה של מישור, ו־(A,B,C) הוא נורמל שלו.

במילים: המקדמים של x, y ו־z הם הרכיבים של וקטור שניצב למישור, והמספר D קובע איפה המישור נמצא במרחב.

את הצורה הראשונה נוח לכתוב כשיודעים נקודה ונורמל. השנייה היא **המשוואה הכללית** של המישור — הצורה שבה רגילים לכתוב מישור.

3 הוכחה 1: וקטור נורמל ומכפלה סקלרית

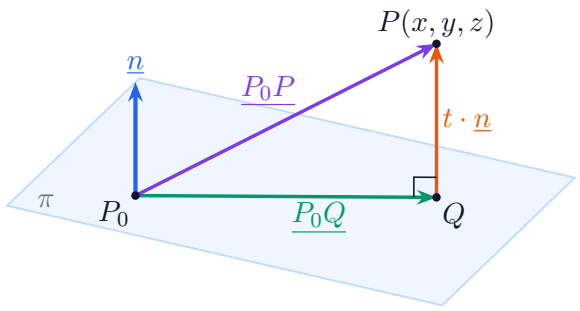
הרעיון ניקח נקודה כלשהי P במרחב ונפרק את הדרך מ־P_0 אל P לשני חלקים: חלק שמונח במישור, וחלק בכיוון הנורמל. המכפלה הסקלרית עם $\underline{n}$ "רואה" רק את החלק השני — והוא מתאפס בדיוק כש־P על המישור.

שלב א': מתי $\underline{n} \cdot \underline{P_0P} = 0$?

תהי P נקודה כלשהי במרחב — על המישור או מחוצה לו. נוריד ממנה אנך למישור π, ונסמן את עקב האנך ב־Q. נשתמש בשתי עובדות מגאומטריה של המרחב:

- הקטע P_0Q מונח במישור, ולכן הווקטור $\underline{P_0Q}$ ניצב לנורמל.
- האנך QP ניצב למישור, ולכן הוא מקביל לנורמל: $\underline{QP} = t \cdot \underline{n}$ עבור מספר מסוים t.

המספר t מתאר כמה P "רחוקה" מהמישור: $t = 0$ בדיוק כש־$P = Q$, כלומר כש־P עצמה על המישור.



סרטוט 2: הדרך מ־P_0 אל P: קודם במישור עד Q, ואחר כך לאורך האנך.

	טענה	נימוק
1	$\underline{P_0P} = \underline{P_0Q} + \underline{QP}$	הולכים מ־P_0 אל Q, וממשיכים מ־Q אל P
2	$\underline{P_0P} = \underline{P_0Q} + t \cdot \underline{n}$	האנך $\underline{QP}$ מקביל לנורמל
3	$\underline{n} \cdot \underline{P_0P} = \underline{n} \cdot \underline{P_0Q} + t\,(\underline{n} \cdot \underline{n})$	כופלים כפל סקלרי ב־$\underline{n}$ ומשתמשים בחוק הפילוג
4	$\underline{n} \cdot \underline{P_0Q} = 0$	$\underline{P_0Q}$ מונח במישור, ו־$\underline{n}$ ניצב למישור
5	$\underline{n} \cdot \underline{P_0P} = t\,\lvert\underline{n}\rvert^2$	מציבים את צעד 4, ו־$\underline{n} \cdot \underline{n} = \lvert\underline{n}\rvert^2$
6	$\underline{n} \cdot \underline{P_0P} = 0$ אם ורק אם $t = 0$	$\lvert\underline{n}\rvert^2 > 0$, כי $\underline{n} \neq \underline{0}$

כלומר: $\underline{n} \cdot \underline{P_0P} = 0$ אם ורק אם P על המישור. קיבלנו בבת אחת את שני הכיוונים: אם P על המישור, המכפלה שווה לאפס; ואם המכפלה שווה לאפס, P על המישור.

עצרו ובדקו

חזרו לדוגמה של הרצפה: $\underline{n} = (0,0,1)$, $P_0 = O$ ו־$P(1,1,5)$. מהו עקב האנך Q, ומהו המספר t? ודאו שבאמת $\underline{n} \cdot \underline{P_0P} = t\,\lvert\underline{n}\rvert^2$. מה המשמעות של t כאן?

שלב ב׳: מווקטורים למספרים

עכשיו נתרגם את התנאי $\underline{P_0P} \cdot \underline{n} = 0$ לשפה של שיעורים.

	טענה	נימוק
1	$\underline{P_0P} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$	שיעורי הסוף פחות שיעורי ההתחלה
2	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$	המכפלה הסקלרית לפי רכיבים, ושלב א׳
3	$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$	פתיחת סוגריים
4	$Ax + By + Cz + D = 0$	נסמן $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. זה מספר קבוע, שאינו תלוי ב־P

מש״ל ■

ולהפך: כל משוואה כזאת מתארת מישור

נתונה משוואה $Ax + By + Cz + D = 0$, ו־A, B ו־C אינם כולם אפס. ראשית, יש לה פתרון: אם למשל $A \neq 0$, הנקודה $\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$ מקיימת אותה (ואם $A = 0$, עושים אותו דבר עם B או עם C). נבחר נקודה $P_0(x_0, y_0, z_0)$ שמקיימת את המשוואה. אז $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$, ולכן אפשר להחליף את D ב־$-(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ ולכתוב את המשוואה כך:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

לפי שלבים א׳ ו־ב׳, הפתרונות של המשוואה הזאת הם בדיוק הנקודות של המישור שעובר דרך P_0 וניצב ל־(A, B, C).

מש״ל ■

מה למדנו מהוכחה 1

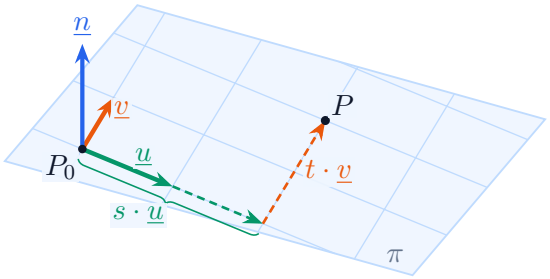
- את הנורמל ״קוראים״ ישירות מהמשוואה: אלה המקדמים של x, y ו־z.
- הנורמל אינו יחיד: גם $2\underline{n}$ וגם $-\underline{n}$ ניצבים למישור. כשכופלים משוואת מישור במספר $k \neq 0$, מקבלים משוואה אחרת של אותו מישור. ולהפך: כל שני נורמלים של אותו מישור מקבילים (שניהם ניצבים לו), ולכן כל שתי משוואות של אותו מישור הן כפולה זו של זו.
- הגודל $\underline{P_0P} \cdot \underline{n} = t\,|\underline{n}|^2$ מודד כמה P רחוקה מהמישור. על הרעיון הזה בנויה נוסחת המרחק של נקודה ממישור.

4 הוכחה 2: מההצגה הפרמטרית

הרעיון מישור אפשר לתאר גם "מבפנים": נקודה אחת שלו ושני כיווני תנועה שמונחים בו. כל נקודה במישור היא "כתובת" על רשת משובצת: s צעדים בכיוון אחד ו־t צעדים בכיוון השני. נעלים מהתיאור את s ואת t — ותישאר משוואה אחת.

תהי $P_0(x_0,y_0,z_0)$ נקודה במישור, ויהיו $\underline{u}=(u_1,u_2,u_3)$ ו־$\underline{v}=(v_1,v_2,v_3)$ שני **וקטורי כיוון** שמונחים במישור ואינם מקבילים זה לזה. כל נקודה P של המישור מתקבלת כך: יוצאים מ־P_0, הולכים s פעמים $\underline{u}$, ואחר כך t פעמים $\underline{v}$:

$$\underline{OP}=\underline{OP_0}+s\cdot\underline{u}+t\cdot\underline{v}$$



סרטוט 3: הרשת של המישור: כאן $\underline{P_0P}=2\cdot\underline{u}+2\cdot\underline{v}$.

זו **הצגה פרמטרית** של המישור. כל זוג מספרים s ו־t נותן נקודה אחת של המישור, וכל נקודה של המישור מתקבלת כך.

לפי רכיבים, ההצגה הפרמטרית היא שלוש משוואות:

$$x-x_0=su_1+tv_1 \qquad y-y_0=su_2+tv_2 \qquad z-z_0=su_3+tv_3$$

נכפול אותן, בהתאמה, במספרים α, β ו־γ שנבחר בהמשך, ונחבר. נסמן $\underline{n}=(\alpha,\beta,\gamma)$. המטרה: לבחור את $\underline{n}$ כך ש־s ו־t ייעלמו.

	טענה	נימוק
1	$\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)$ $=s\left(\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3\right)+t\left(\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3\right)$	כפל שלוש המשוואות ב־α, β, γ וחיבור
2	$\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=s\,(\underline{n}\cdot\underline{u})+t\,(\underline{n}\cdot\underline{v})$	בסוגריים יש בדיוק מכפלות סקלריות
3	$\underline{n}\cdot\underline{u}=0$ וגם $\underline{n}\cdot\underline{v}=0$	כך נבחר את $\underline{n}$: שני המקדמים של s ו־t יתאפסו
4	$\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0$	לכל s ולכל t — הפרמטרים נעלמו

התנאי שבצעד 3 אומר ש־$\underline{n}$ ניצב לשני וקטורי הכיוון — כלומר הוא נורמל! האלגברה "גילתה" את הנורמל בעצמה, וקיבלנו משוואה בדיוק מהצורה של הוכחה 1.

הראינו שכל נקודה של המישור מקיימת את המשוואה מצעד 4. ולהפך: תהי P נקודה שמקיימת אותה. נכתוב $\underline{P_0P}=s\cdot\underline{u}+t\cdot\underline{v}+r\cdot\underline{n}$. זה אפשרי, כי כל וקטור במרחב הוא צירוף של שלושה וקטורים שאינם במישור אחד, ו־$\underline{0}$ אינו $\underline{n}$ במישור של $\underline{u}$ ו־$\underline{v}$ (אילו היה בו, הוא היה ניצב לעצמו, כלומר $\underline{n}\cdot\underline{n}=0$). נכפול כפל סקלרי ב־$\underline{n}$: באגף שמאל מתקבל אגף שמאל של צעד 4, כלומר 0, ובאגף ימין נשאר $r\,|\underline{n}|^2$. לכן $r=0$, כלומר $\underline{P_0P}=s\cdot\underline{u}+t\cdot\underline{v}$, ו־$P$ נמצאת במישור.

מש"ל ■

דוגמה: מהצגה פרמטרית למשוואה

נתון המישור $\pi:\ \underline{x}=(1,2,3)+s\cdot(1,-1,4)+t\cdot(2,1,-1)$. נחפש $\underline{n}=(\alpha,\beta,\gamma)$ שניצב לשני וקטורי הכיוון:

$$\alpha-\beta+4\gamma=0 \qquad\qquad 2\alpha+\beta-\gamma=0$$

נחבר את שתי המשוואות: $3\alpha+3\gamma=0$, כלומר $\alpha=-\gamma$. מהמשוואה הראשונה: $\beta=\alpha+4\gamma=3\gamma$. נבחר $\gamma=-1$ ונקבל $\underline{n}=(1,-3,-1)$. בדיקה: $\underline{n}\cdot\underline{u}=1+3-4=0$ ו־$\underline{n}\cdot\underline{v}=2-3+1=0$. לכן:

$$1\cdot(x-1)-3(y-2)-1\cdot(z-3)=0 \qquad\Longrightarrow\qquad x-3y-z+8=0$$

בדיקה: הנקודה $(1,2,3)$ נותנת $1-6-3+8=0$. אפשר גם להעלים את s ו־t ישירות: לבודד אותם משתי המשוואות של x ו־y ולהציב במשוואה של z. מתקבלת אותה משוואה.

האם תמיד יש $\underline{n}\neq\underline{0}$ כזה? כן. בצעד 3 יש שתי משוואות בשלושה נעלמים, ונשאר "מקום" לפתרון שאינו אפס. אפשר אפילו לכתוב פתרון מפורש:

$$\underline{n}=(u_2v_3-u_3v_2,\ \ u_3v_1-u_1v_3,\ \ u_1v_2-u_2v_1)$$

הציבו ובדקו: ב־$\underline{u}$ $\underline{n}\cdot\underline{v}$ וב־$\underline{v}$ כל האיברים מבטלים זה את זה. אם שלושת הרכיבים היו אפס, $\underline{u}$ ו־$\underline{v}$ היו מקבילים (להעמקה: אם למשל $u_1\neq0$, נסמן $k=\frac{v_1}{u_1}$, ומהרכיבים השלישי והשני נקבל $v_2=ku_2$ ו־$v_3=ku_3$, כלומר $\underline{v}=k\underline{u}$. המקרים האחרים דומים). הווקטור הזה נקרא **המכפלה הווקטורית** $\underline{u}\times\underline{v}$.

ראו גם: המסמך על המכפלה הווקטורית — שתי דרכים למצוא וקטור שניצב לשני וקטורים.

5 שתי הדרכים זו מול זו

	הוכחה 1: נורמל ומכפלה סקלרית	הוכחה 2: מההצגה הפרמטרית
נקודת המוצא	נקודה וכיוון שניצב למישור	נקודה ושני כיוונים שמונחים במישור
הרעיון	לפרק את $\underline{P_0P}$ לחלק במישור ולחלק בכיוון הנורמל	להעלים את הפרמטרים s ו־t
הכלים	אנך למישור, מכפלה סקלרית, חוק הפילוג	הצגה פרמטרית, מערכת משוואות
היתרון	"רואים" בסרטוט למה המשוואה נכונה, בשני הכיוונים	מתאימה לנתונים נפוצים: שלוש נקודות, או ישר ונקודה. והנורמל "צץ" בעצמו

6 מה עושים עם המשוואה?

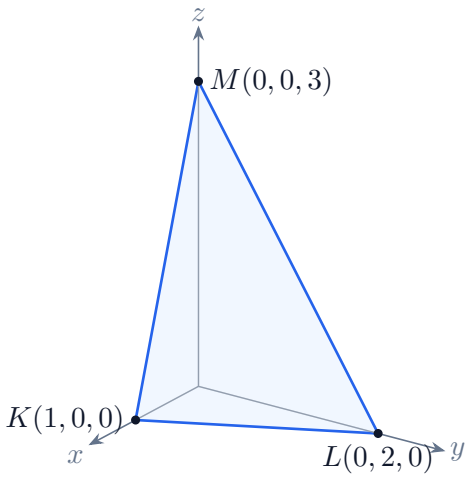
שימוש 1: מישור דרך שלוש נקודות

שלוש נקודות שאינן על ישר אחד קובעות מישור. כדי למצוא את משוואתו, בונים מהנקודות שני וקטורי כיוון, למשל $\underline{KL}$ ו־$\underline{KM}$, ומוצאים נורמל כמו בהוכחה 2.

דוגמה: $K(1,0,0)$, $L(0,2,0)$, $M(0,0,3)$. וקטורי הכיוון הם $\underline{KL}=(-1,2,0)$ ו־$\underline{KM}=(-1,0,3)$. הנורמל (α,β,γ) מקיים $-\alpha+2\beta=0$ ו־$-\alpha+3\gamma=0$, כלומר $\alpha=2\beta=3\gamma$. נבחר $\alpha=6$ ונקבל $\underline{n}=(6,3,2)$. המשוואה:

$$6(x-1)+3y+2z=0 \implies 6x+3y+2z-6=0$$

בדיקה: L נותנת $6-6=0$, ו־M נותנת $6-6=0$.



סרטוט 4: המישור $6x+3y+2z=6$ חותך את הצירים ב־K, L ו־M.

נעביר את 6 לאגף ימין ונחלק ב־6. מתקבלת צורה מפתיעה:

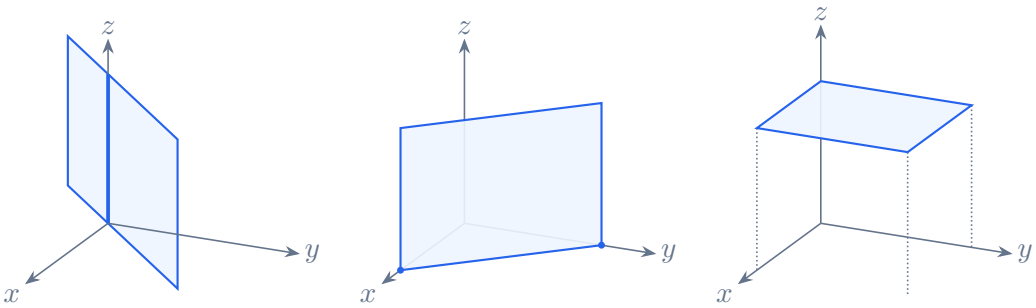
$$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$$

המכנים הם בדיוק השיעורים של נקודות החיתוך עם הצירים! באופן כללי, משוואת המישור שחותך את הצירים בנקודות $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ ו־$(0,0,c)$, כש־a, b ו־c שונים מאפס, היא $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$: זו משוואה של מישור, ושלוש הנקודות מקיימות אותה.

שימוש 2: "לקרוא" את המשוואה

מה רואים במשוואה	מה זה אומר על המישור	דוגמה
$D=0$	ראשית הצירים נמצאת עליו	$x-2y+5z=0$
$C=0$ (אין z)	הוא מקביל לציר ה־z (או מכיל אותו) — "קיר" אנכי	$x+y=2$
$A=B=0$ (יש רק z)	הוא מקביל למישור xy — "רצפה" או "תקרה"	$z=2$
משתנה אחד, ו־$D=0$	זה אחד ממישורי הצירים	$z=0$ הוא מישור xy

למה $C=0$ פירושו "מקביל לציר ה־z"? כי z בכלל לא מופיע במשוואה: אם (x,y,z) מקיימת אותה, גם $(x,y,z+h)$ מקיימת אותה לכל h. אפשר לנוע מכל נקודה של המישור למעלה ולמטה ולהישאר בו. ובשפת הנורמל: $(A,B,0)\cdot(0,0,1)=0$, כלומר הנורמל ניצב לכיוון של ציר ה־z.



$x - y = 0$ $x + y = 2$ $z = 2$

סרטוט 5: מימין: "תקרה" בגובה 2. במרכז: "קיר" שמקביל לציר ה־z. משמאל: "קיר" שעובר דרך ציר ה־z עצמו — כאן גם $C = 0$ וגם $D = 0$.

שימוש 3: מישורים מקבילים ומישורים ניצבים

הזווית בין שני מישורים נקבעת לפי הזווית בין הנורמלים שלהם:

- **מקבילים:** הנורמלים מקבילים. למשל, $2x - y + 2z - 5 = 0$ ו־$-4x + 2y - 4z + 3 = 0$: הנורמל השני הוא הראשון כפול (-2). האם זה אותו מישור? הנקודה $(0, -5, 0)$ נמצאת על הראשון $(0 + 5 + 0 - 5 = 0)$, אבל לא על השני $(0 - 10 - 0 + 3 = -7 \neq 0)$. לכן אלה שני מישורים מקבילים ושונים.
- **ניצבים:** המכפלה הסקלרית של הנורמלים שווה לאפס. למשל, המישורים $x + 2y + 3z = 0$ ו־$3x - 3y + z = 4$ ניצבים זה לזה, כי $(1, 2, 3) \cdot (3, -3, 1) = 3 - 6 + 3 = 0$.

⚠ טעות נפוצה

- **קריאת הנורמל.** ב־$2x - z + 7 = 0$ הנורמל הוא $(2, 0, -1)$: המקדם של y הוא 0, והמספר 7 הוא D — הוא לא רכיב של הנורמל.
- **הסימן של D.** $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. מי ששוכח את המינוס מקבל מישור מקביל, במקום הלא נכון. בדיקה פשוטה: מציבים את P_0 במשוואה — צריך לצאת 0.
- **נורמל אפס.** הווקטור $(0, 0, 0)$ "ניצב" לכל וקטור, ולכן אינו קובע שום מישור. $0x + 0y + 0z + D = 0$ אינה משוואה של מישור.
- **וקטורי כיוון מקבילים.** בהצגה פרמטרית, אם $\underline{v}$ מקביל ל־$\underline{u}$, התנועה היא רק לאורך ישר אחד, ו־$\underline{x} = \underline{OP_0} + s \cdot \underline{u} + t \cdot \underline{v}$ מתאר ישר ולא מישור.
- **שלוש נקודות על ישר אחד** אינן קובעות מישור: דרכן עוברים אינסוף מישורים, כמו דפי ספר סביב השדרה.
- **מישור, לא ישר.** במרחב, משוואה אחת כמו $x + y = 2$ מתארת מישור שלם. אותה משוואה במערכת צירים של המישור (x ו־y בלבד) מתארת ישר.

הידעתם?

המילה "נורמל" באה מהמילה הלטינית norma: גונייה — הכלי שבעזרתו נגרים ובנאים מסמנים זוויות ישרות. גם "נורמלי" במובן "רגיל, תקין" בא מאותו מקור: מה שנעשה "לפי הגונייה".
הגאומטריה האנליטית — גאומטריה בעזרת שיעורים — התחילה במאה ה־17 אצל רנה דקארט ופייר דה פרמה, בעיקר במישור. שניהם כבר הציעו להוסיף שיעור שלישי כדי לחקור משטחים במרחב, אבל הגאומטריה האנליטית של המרחב התפתחה באמת רק במאה ה־18. המתמטיקאי הצרפתי אלכסיס קלרו כתב, כשהיה עדיין נער, את אחת העבודות הראשונות בתחום, על עקומות במרחב; היא יצאה לאור ב־1731. והיום? במשחקי מחשב ובסרטי אנימציה כל משטח בנוי מהרבה משולשים קטנים, ולכל משולש יש וקטור נורמל. כדי לקבוע כמה המשולש מואר, המחשב מבצע מכפלה סקלרית בין הנורמל לבין הכיוון אל מקור האור — מיליוני פעמים בכל שנייה.

7 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

1. מצאו את משוואת המישור שעובר דרך הנקודה $(2,-1,3)$ וניצב לווקטור $(1,4,-2)$.
2. האם הנקודה $(1,1,1)$ נמצאת על המישור $3x-y+2z-4=0$? ומה לגבי הנקודה $(2,1,0)$?
3. רשמו וקטור נורמל למישור $z=2x-y+5$.
4. מצאו את משוואת המישור שעובר דרך הנקודות $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ ו־$(1,0,1)$.
5. מצאו את המשוואה הכללית של המישור $\underline{x}=(0,0,1)+s\cdot(1,0,2)+t\cdot(0,1,-1)$.
6. מהם Q ו־t בדוגמה של הרצפה, עבור $P(1,1,5)$? (זו השאלה מתיבת "עצרו ובדקו".)

תשובות

1. $0=(x-2)+4(y+1)-2(z-3)$, כלומר $x+4y-2z+8=0$. בדיקה: $2-4-6+8=0$.
2. הנקודה $(1,1,1)$ נותנת $1-1+2-4=-3\neq 0$ — היא על המישור. $(2,1,0)$ נותנת $2-1+0-4=-6\neq 0$ — לא.
3. נעביר אגפים: $2x-y-z+5=0$, ולכן $\underline{n}=(2,-1,-1)$ (או כל כפולה שלו שאינה אפס).
4. וקטורי כיוון: $(-1,0,1)$ ו־$(0,-1,1)$. הנורמל מקיים $-\alpha+\gamma=0$ ו־$-\beta+\gamma=0$, ולכן $\underline{n}=(1,1,1)$. המשוואה: $x+y+z-2=0$. שלוש הנקודות מקיימות אותה.
5. הנורמל מקיים $\alpha+2\gamma=0$ ו־$\beta-\gamma=0$. נבחר $\gamma=1$ ונקבל $\underline{n}=(-2,1,1)$. המשוואה: $-2x+y+(z-1)=0$, כלומר $2x-y-z+1=0$.
6. עקב האנך הוא $Q(1,1,0)$, ו־$\underline{QP}=(0,0,5)=5\cdot\underline{n}$, ולכן $t=5$. אכן $\underline{n}\cdot\underline{OP}=5=5\cdot|\underline{n}|^2$, כי $|\underline{n}|=1$. כאן t הוא בדיוק הגובה של P מעל הרצפה.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את המסמך בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנו קטעים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.