

משוואת הישר במרחב

נקודה אחת, כיוון אחד ומספר אחד – איך כותבים ישר במרחב, ולמה זה עובד

כ־15 דקות קריאה

2 הוכחות

וקטורים במרחב

5 יח"ל

כיתה י"ב

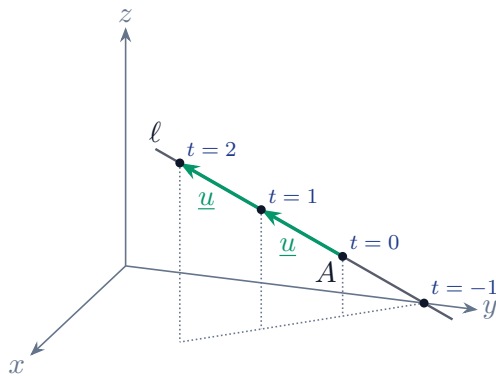
מה כדאי לדעת קודם

- וקטורים במרחב: חיבור, חיסור וכפל במספר.
- וקטור בין שתי נקודות: מחסירים את השיעורים של נקודת ההתחלה משיעורי נקודת הסוף.
- שני וקטורים מקבילים אם אחד מהם הוא כפולה של השני.
- דמיון משולשים.

מה תמצאו כאן

- למה ישר במרחב אינו מתואר במשוואה אחת, כמו ישר במישור.
- הוכחה 1: מנקודה ווקטור כיוון אל ההצגה הפרמטרית.
- הוכחה 2: שתי נקודות ומשולשים דומים – ומה הפרמטר t "מודד".
- שימושים: נקודה על ישר, והמצב ההדדי של שני ישרים.
- להעמקה: המשוואות הסימטריות של ישר.

1 האינטואיציה: רחפן שטס בקו ישר



סרטוט 1: המקומות של הרחפן בזמנים שונים. כל צעד הוא אותו וקטור $\underline{u}$. הקווים המנוקדים: "הצל" על המישור xy .

האינטואיציה

רחפן יוצא מהנקודה A וטס בכיוון קבוע ובמהירות קבועה. בכל שנייה הוא עושה את אותו "צעד" – אותו וקטור, $\underline{u}$. אחרי שנייה אחת הוא נמצא בנקודה A ועוד צעד אחד, אחרי שתי שניות – A ועוד שני צעדים, ואחרי t שניות – A ועוד t צעדים.

ומה עם t שלילי? הוא מתאר איפה הרחפן היה לפני שעבר ב־ A , אילו טס כך כל הזמן. כל הנקודות האלה יחד יוצרות ישר. לכן כדי לתאר ישר במרחב מספיקים שני דברים: **נקודת מוצא וכיוון**. ומספר אחד, הזמן t , אומר לנו בדיוק איפה אנחנו על הישר.

ולמה לא משוואה אחת? במישור, ישר מתואר במשוואה אחת, למשל $y = 2x + 1$. במרחב יש שלושה משתנים, ומשוואה אחת כמו $z = 0$ או $x + y + z = 1$ מתארת **מישור** – "דף" ולא "חוט". משוואה אחת קובעת רק קשר אחד בין שלושת המשתנים, ונשארים שני כיווני תנועה חופשיים. על ישר יש רק כיוון תנועה אחד, ולכן מתארים אותו בעזרת **פרמטר** אחד, t , שממנו נקבעים שלושת השיעורים.

דוגמה מספרית קטנה

הרחפן יוצא מ- $A(1, 4, 1)$, והצעד שלו הוא $\underline{u} = (1, -1, 1)$: בכל שנייה x ו- z גדלים ב-1, ו- y קטן ב-1. אחרי t שניות הוא בנקודה $(1+t, 4-t, 1+t)$:

3	2	1	$\frac{1}{2}$	0	-1	t
(4, 1, 4)	(3, 2, 3)	(2, 3, 2)	(1.5, 3.5, 1.5)	(1, 4, 1)	(0, 5, 0)	המקום

בזמן $t = \frac{1}{2}$ הרחפן נמצא בדיוק באמצע הדרך בין המקום שלו ב- $t = 0$ למקום שלו ב- $t = 1$.

2 המשפט

נתונים נקודה $A(x_0, y_0, z_0)$ ווקטור $\underline{u} = (a, b, c) \neq \underline{0}$. יש ישר אחד בלבד שעובר דרך A ומקביל ל- $\underline{u}$. נסמן אותו ב- ℓ . הווקטור $\underline{u}$ נקרא **וקטור הכיוון** של הישר.

משוואת הישר במרחב

נקודה $P(x, y, z)$ נמצאת על הישר ℓ אם ורק אם יש מספר t כך ש-

$$\underline{OP} = \underline{OA} + t \cdot \underline{u}$$

ובשיעורים:

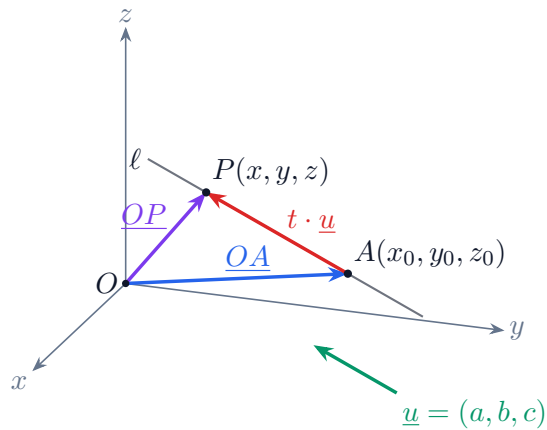
$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc$$

ישר דרך שתי נקודות: אם A ו- B הן שתי נקודות שונות על הישר, אפשר לבחור $\underline{u} = \underline{AB}$. אז $t = 0$ נותן את A , ו- $t = 1$ נותן את B , והקטע AB מורכב בדיוק מהנקודות שבהן $0 \leq t \leq 1$.
במילים: כל נקודה על הישר היא נקודת המוצא ועוד מספר כלשהו של "צעדים" בכיוון $\underline{u}$.

$\underline{OP}$ ו- $\underline{OA}$ הם **וקטורי המקום** של P ושל A : הווקטורים מראשית הצירים O אל הנקודות. הרכיבים של וקטור מקום הם בדיוק השיעורים של הנקודה. בקיצור כותבים, למשל, $\underline{x} = (1, 4, 1) + t \cdot (1, -1, 1)$, כאשר ℓ : $\underline{x} = (x, y, z)$ הוא וקטור המקום של נקודה כללית על הישר. המספר t נקרא **פרמטר**, ולכן הצורה הזאת נקראת **הצגה פרמטרית** של הישר.

3 הוכחה 1: נקודה ווקטור כיוון

הרעיון נקודה P נמצאת על הישר בדיוק כשהקטע AP "הולך לאורך הישר", כלומר כשהווקטור $\underline{AP}$ מקביל ל- $\underline{u}$. ואם שני וקטורים מקבילים, אחד מהם הוא כפולה של השני – ומכאן המשוואה יוצאת מעצמה.



בסרטוט: O היא ראשית הצירים, A היא הנקודה הנתונה, ו- P היא נקודה כלשהי על הישר.
מ- O אפשר להגיע ל- P בשתי דרכים: ישירות, לאורך $\underline{OP}$, או בעקיפין – קודם ל- A , ומשם לאורך הישר עד P . שתי הדרכים מסתיימות באותה נקודה, ולכן $\underline{OP} = \underline{OA} + \underline{AP}$.
הקטע AP מונח על הישר, ולכן הוא מקביל לווקטור הכיוון $\underline{u}$ (בסרטוט $\underline{u}$ מצויר בצד, כי וקטור אפשר להזיז).
סרטוט 2: המשולש OAP , שבו $\underline{OP} = \underline{OA} + \underline{AP}$.

נימוק	טענה
חיבור וקטורים במשולש OAP	$\underline{OP} = \underline{OA} + \underline{AP}$ ①
A ו- P על הישר, והישר מקביל ל- $\underline{u}$	$\underline{AP} \parallel \underline{u}$ (או $P = A$) ②
וקטור שמקביל ל- $\underline{u}$ הוא כפולה שלו (ל- $P = A$ מתאים $t = 0$)	$\underline{AP} = t \cdot \underline{u}$ ③
הצבה של צעד 3 בצעד 1	$\underline{OP} = \underline{OA} + t \cdot \underline{u}$ ④
כתיבה בשיעורים	$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$ ⑤
השוואת רכיבים	$x = x_0 + ta, y = y_0 + tb, z = z_0 + tc$ ⑥

ובכיוון ההפוך: אם $\underline{OP} = \underline{OA} + t \cdot \underline{u}$ עבור t כלשהו, אז $\underline{AP} = \underline{OP} - \underline{OA} = t \cdot \underline{u}$. כלומר הקטע AP מקביל ל- $\underline{u}$ (או ש- $P = A$), ולכן P נמצאת על הישר שעובר דרך A בכיוון $\underline{u}$ – כי יש רק ישר אחד כזה. הוכחנו את שני הכיוונים של "אם ורק אם": כל נקודה על הישר מקיימת את המשוואה, וכל t נותן נקודה על הישר.

מש"ל

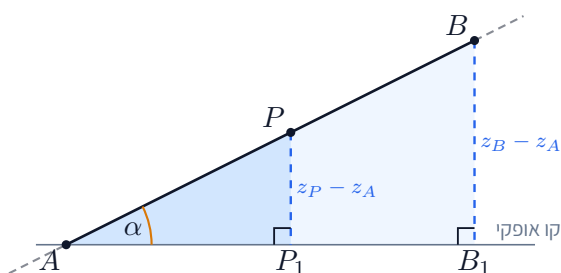
עצרו ובדקו

בצעד 3 השתמשנו בכך ש- $\underline{u} \neq \underline{0}$. מה הייתה "משוואת הישר" מתארת אילו $\underline{u} = \underline{0}$?

4 הוכחה 2: שתי נקודות ומשולשים דומים

הרעיון נוותר על וקטורים, ונשתמש רק בדמיון משולשים. נראה שכשהולכים לאורך ישר, כל שיעור משתנה ביחס ישר למרחק שעוברים. מכאן תצא אותה משוואה – ובין גם מה t "מודד".

נתונות שתי נקודות שונות, $A(x_A, y_A, z_A)$ ו- $B(x_B, y_B, z_B)$, ו- P היא נקודה על הישר AB . נסמן ב- t את היחס $\frac{AP}{AB}$: כמה "אורכים של AB " צריך ללכת מ- A כדי להגיע ל- P . אם P נמצאת באותו צד של A כמו B , ניקח t חיובי, ואם בצד השני – שלילי.



סרטוט 3: מבט מהצד: חתך אנכי דרך הישר.

נסתכל על הישר "מהצד": נעביר דרכו מישור אנכי, כלומר מישור שמקביל לציר ה- z . זה המישור שבסרטוט.

דרך A נעביר במישור הזה קו אופקי, ומ- P ומ- B נוריד אליו אנכים שעקביהם P_1 ו- B_1 . האורכים של האנכים הם הפרשי הגבהים:

$$PP_1 = z_P - z_A \quad BB_1 = z_B - z_A$$

נימוק

טענה

ז.ז: זווית ישרה ב- P_1 וב- B_1 , והזווית α משותפת

$$\triangle AP_1P \sim \triangle AB_1B \quad (1)$$

יחס הדמיון

$$\frac{PP_1}{BB_1} = \frac{AP}{AB} = t \quad (2)$$

PP_1 ו- BB_1 הם הפרשי הגבהים

$$z_P - z_A = t(z_B - z_A) \quad (3)$$

אותו חשבון: אין שום דבר מיוחד בציר ה- z . אם נחליף את שמות הצירים כך שציר ה- x יהיה "הגובה", צעדים 1-3 נותנים בדיוק את השוויון הזה

$$x_P - x_A = t(x_B - x_A) \quad (4)$$

ושוב, עם ציר ה- y

$$y_P - y_A = t(y_B - y_A) \quad (5)$$

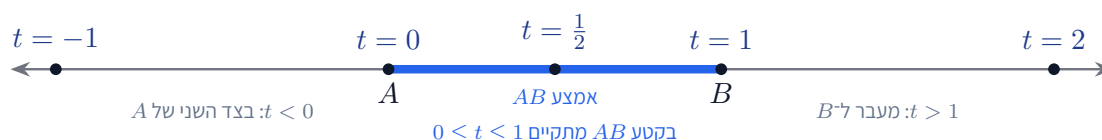
$$P = (x_A, y_A, z_A) + t(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \quad (6) \quad \text{צעדים 3-5 יחד}$$

זו בדיוק המשוואה $\underline{OP} = \underline{OA} + t \cdot \underline{AB}$ מתיבת המשפט. ההוכחה הזאת מראה כיוון אחד: כל נקודה על הישר מקיימת את המשוואה. את הכיוון ההפוך – שכל t נותן נקודה על הישר – הראינו בסוף הוכחה 1.

מש"ל

ומה עם הסימנים? אם P נמצאת מעבר ל- B , אז $t > 1$, והמשולשים דומים באותו אופן. אם P נמצאת בצד השני של A , המשולש AP_1P "מתהפך": כש- B גבוהה מ- A , הנקודה P נמוכה ממנה, והפרש $z_P - z_A$ מחליף סימן – בדיוק כמו t , שהוא עכשיו שלילי. ויש שני מקרים שבהם אין משולש בכלל, והשוויון נכון ישירות: כשהישר אופקי, z קבוע ושני האגפים בצעד 3 שווים ל-0; וכשהישר אנכי, הפרשי הגבהים הם פשוט המרחקים, עם סימן.

מה t "יודע"?



סרטוט 4: הפרמטר t הוא "סרגל" על הישר, שבו A היא 0 ו- B היא 1.

בצורה $\underline{OP} = \underline{OA} + t \cdot \underline{AB}$, הפרמטר t מודד את המרחק מ- A ביחידות של AB . ב- $t = \frac{1}{2}$ מקבלים את אמצע הקטע:

$$\left(x_A + \frac{1}{2}(x_B - x_A), \dots\right) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

וזו נוסחת אמצע הקטע המוכרת. אפשר גם לסדר את המשוואה מחדש כך: $P = (1 - t) \cdot A + t \cdot B$, רכיב אחר רכיב. כש- $0 \leq t \leq 1$ זה **מוצע משוקלל** של A ושל B : ככל ש- t קרוב יותר ל-0, "המשקל" של A גדול יותר, ו- P קרובה יותר ל- A .

5 שתי הדרכים זו מול זו

הוכחה 1: וקטור כיוון	הוכחה 2: משולשים דומים	
$\underline{AP}$ מקביל ל- $\underline{u}$, ולכן הוא כפולה שלו	כל שיעור משתנה ביחס ישר למרחק שעוברים	הרעיון
חיבור וקטורים, וקטורים מקבילים	דמיון משולשים (ז.ז)	הכלים
$\underline{OA} + t \cdot \underline{u}$ עם כל וקטור כיוון	$\underline{OA} + t \cdot \underline{AB}$, ו- t הוא היחס $\frac{AP}{AB}$	מה מקבלים
קצרה, ומוכיחה את שני הכיוונים של "אם ורק אם"	בלי וקטורים; מסבירה מה t מודד	היתרון

6 מה עושים עם משוואת הישר?

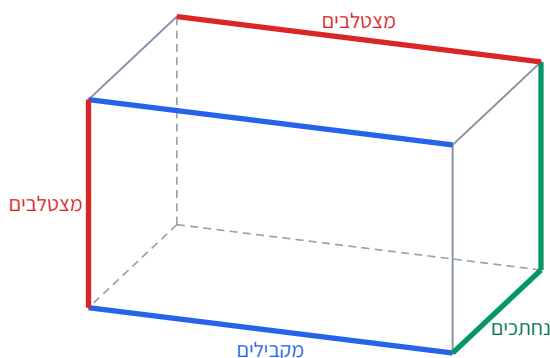
שימוש 1: האם הנקודה נמצאת על הישר?

נקודה נמצאת על הישר אם ורק אם יש t אחד שמתאים לשלושת השיעורים שלה.

דוגמה מספרית

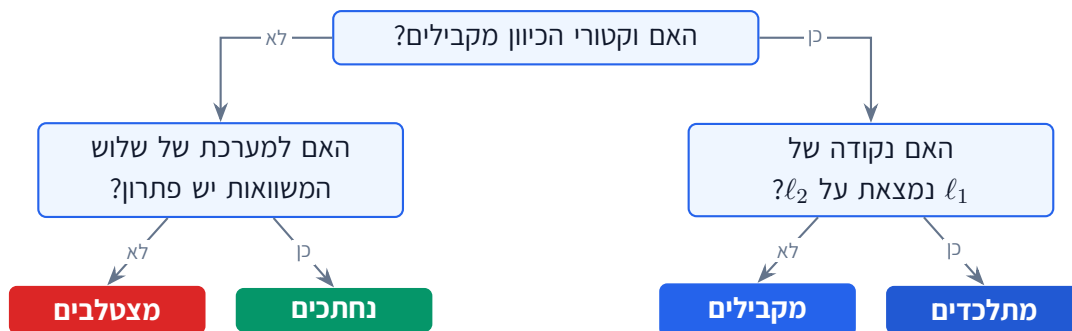
האם הנקודות $Q(4, 1, 4)$ ו- $R(3, 2, 2)$ נמצאות על הישר $\ell: \underline{x} = (1, 4, 1) + t \cdot (1, -1, 1)$?
עבור Q : השיעור x נותן $1 + t = 4$, כלומר $t = 3$. השיעור y נותן $4 - t = 1$, כלומר $t = 3$. והשיעור z נותן $1 + t = 4$, כלומר $t = 3$. אותו t בשלושת השיעורים, ולכן Q על הישר.
עבור R : השיעורים x ו- y נותנים $t = 2$, אבל השיעור z נותן $1 + t = 2$, כלומר $t = 1$. אין t אחד שמתאים לכולם, ולכן R אינה על הישר. מי שבדק רק שני שיעורים טועה כאן!

שימוש 2: המצב ההדדי של שני ישרים



סרטוט 5: מקצועות של קופסה: כחול – מקבילים, ירוק – נחתכים, אדום – מצטלבים.

במישור, שני ישרים יכולים להתלכד, להיות מקבילים או להיחתך. במרחב יש אפשרות רביעית: ישרים **מצטלבים**. הם אינם מקבילים, ובכל זאת אינם נפגשים, כי אין מישור שמכיל את שניהם. במישור זה לא יכול לקרות: שני ישרים במישור שאינם מקבילים נחתכים תמיד.
על המקצועות של קופסה רואים ישרים מקבילים, נחתכים ומצטלבים (סרטוט 5). כדי להכריע בין המצבים עובדים לפי התרשים שבסרטוט 6, ומשווים את ההצגה הפרמטרית של ישר אחד לזו של השני, עם **שני פרמטרים שונים**, t ו- s .



סרטוט 6: איך מכריעים מה המצב ההדדי של שני ישרים.

נחתכים או מצטלבים

נתונים שלושה ישרים:

$$\ell_1 : \underline{x} = (1, 4, 1) + t \cdot (1, -1, 1)$$

$$\ell_2 : \underline{x} = (2, 2, 1) + s \cdot (0, 1, 1)$$

$$\ell_3 : \underline{x} = (2, 2, 2) + s \cdot (0, 1, 1)$$

וקטורי הכיוון אינם מקבילים: אילו $(0, 1, 1) = k \cdot (1, -1, 1)$, מהרכיב הראשון היה יוצא $k = 0$, ואז גם שני הרכיבים האחרים של $(1, -1, 1) \cdot k$ היו 0, ולא 1 כמו ב- $(0, 1, 1)$. נשווה את ℓ_1 ל- ℓ_2 , רכיב אחר רכיב:

$$1 + t = 2 \quad 4 - t = 2 + s \quad 1 + t = 1 + s$$

מהמשוואה הראשונה $t = 1$, ומהשנייה $s = 1$. המשוואה השלישית מתקיימת: $2 = 2$. לכן ℓ_1 ו- ℓ_2 **נחתכים**, בנקודה $(2, 3, 2)$.

עבור ℓ_3 המשוואות הן $1 + t = 2$, $4 - t = 2 + s$ ו- $1 + t = 2 + s$. שוב $t = 1$ ו- $s = 1$ אבל אז המשוואה השלישית נותנת $2 = 3$. סתירה: ℓ_1 ו- ℓ_3 **מצטלבים**.

להעמקה: המשוואות הסימטריות

אם a, b, c כולם שונים מ-0, אפשר לבודד את t מכל אחת משלוש המשוואות של ההצגה הפרמטרית, ולהשוות:

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc \quad \implies \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

זו לא משוואה אחת אלא **שתי** משוואות: השוויון הראשון והשוויון השני. כל אחת מהן היא משוואה של מישור שמכיל את הישר, והישר הוא החיתוך של שני המישורים. זו התשובה המלאה לשאלה מתחילת המסמך: כדי לתאר ישר במרחב במשוואות "רגילות" צריך **שתי** משוואות.

לדוגמה, עבור $\ell : \underline{x} = (1, 4, 1) + t \cdot (1, -1, 1)$ מקבלים $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-1}{1}$, כלומר $x + y = 5$ וגם $x = z$. התנאי $a, b, c \neq 0$ פירושו שהישר אינו מקביל לאף אחד ממישורי הצירים. אם, למשל, $c = 0$, השיעור z קבוע, וכותבים $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$ וגם $z = z_0$.

⚠ טעות נפוצה

- **וקטור הכיוון אינו נקודה על הישר.** ב- $\underline{x} = (1, 4, 1) + t \cdot (1, -1, 1)$ הנקודה $(1, -1, 1)$ אינה על הישר. הנקודה שעל הישר היא $(1, 4, 1)$ — זו שמתקבלת ב- $t = 0$.
- **לאותו ישר יש הרבה משוואות.** $(1, 4, 1) + t \cdot (1, -1, 1)$ ו- $(3, 2, 3) + s \cdot (-2, 2, -2)$ הם אותו ישר: הנקודה $(3, 2, 3)$ נמצאת על הישר הראשון ($t = 2$), ו- $(-2, 2, -2) = -2 \cdot (1, -1, 1)$. לכן אי אפשר להשוות משוואות "בעין".
- **שני ישרים — שני פרמטרים.** כשמחפשים נקודת חיתוך, לכל ישר צריך פרמטר משלו. מי שכותב t בשניהם דורש ששני "רחפנים" יהיו באותה נקודה **באותו רגע** — וזו שאלה אחרת.
- **בודקים את שלוש המשוואות.** גם כשבודקים אם נקודה על ישר וגם כשמחפשים חיתוך, המשוואה האחרונה היא הבדיקה. אסור לדלג עליה.

🕒 הידעתם?

בפיזיקה, אותה משוואה בדיוק מתארת **תנועה קצובה** — תנועה במהירות קבועה: המקום בזמן t הוא $\underline{x} = \underline{x}_0 + \underline{v} \cdot t$, כאשר $\underline{x}_0$ הוא המקום ההתחלתי ו- $\underline{v}$ הוא וקטור המהירות. הפרמטר הוא פשוט הזמן — כמו אצל הרחפן מהאינטואיציה.

גם בגרפיקה ממוחשבת משתמשים בה כל הזמן. כדי ליצור תמונה מציאותית, המחשב שולח מהמצלמה "קן" דרך כל פיקסל — חצי ישר מהצורה $\underline{OA} + t \cdot \underline{u}$ עם $t \geq 0$ — ומחפש את ה- t הקטן ביותר שבו הקרן פוגעת באחד הגופים שבתמונה. השיטה נקראת ray tracing ("מעקב קרניים").

7 בדקו את עצמכם

✓ שש שאלות קצרות

1. כתבו משוואה של הישר שעובר דרך $A(2, -1, 3)$ ו- $B(4, 0, 1)$. מצאו בעזרת הפרמטר את אמצע הקטע AB .
2. האם הנקודות $C(8, 2, -3)$ ו- $D(6, 1, 0)$ נמצאות על הישר משאלה 1?
3. הראו שהמשוואות $(1, 0, 2) + t \cdot (2, -1, 1)$ ו- $(5, -2, 4) + s \cdot (-4, 2, -2)$ מתארות את אותו ישר.
4. קבעו את המצב ההדדי של $\ell_1 : \underline{x} = (1, 0, 2) + t \cdot (1, 2, -1)$ ו- $\ell_2 : \underline{x} = (0, 1, 1) + s \cdot (2, 1, 0)$.
5. (להעמקה) כתבו את המשוואות הסימטריות של הישר משאלה 1.
6. מה הייתה "משוואת הישר" מתארת אילו $\underline{u} = \underline{0}$? (זו השאלה מתיבת "עצרו ובדקו").

תשובות

1. $AB = (2, 1, -2)$, ולכן $\underline{x} = (2, -1, 3) + t \cdot (2, 1, -2)$, $\ell: \underline{x} = (2, -1, 3) + t \cdot (2, 1, -2)$ ב- $t = \frac{1}{2}$ מקבלים $(3, -\frac{1}{2}, 2)$ – וזה אכן הממוצע של השיעורים של A ו- B .
2. עבור C המשוואות $2 + 2t = 8$, $-1 + t = 2$ ו- $3 - 2t = -3$ נותנות כולן $t = 3$, ולכן C על הישר. עבור D השיעורים x ו- y נותנים $t = 2$, אבל אז $3 - 2 \cdot 2 = -1 \neq 0$. לכן D אינה על הישר.
3. $(5, -2, 4) = (1, 0, 2) + 2 \cdot (2, -1, 1)$, כלומר הנקודה של הישר השני נמצאת על הישר הראשון ($t = 2$). בנוסף, $(-4, 2, -2) = -2 \cdot (2, -1, 1)$, כלומר הכיוונים מקבילים. נקודה משותפת וכיוון משותף – אותו ישר.
4. הכיוונים $(1, 2, -1)$ ו- $(2, 1, 0)$ אינם מקבילים. המערכת: $1 + t = 2s$, $2t = 1 + s$, $2 - t = 1$. מהמשוואה השלישית $t = 1$, מהראשונה $s = 1$, והשנייה מתקיימת: $2 = 2$. הישרים נחתכים בנקודה $(2, 2, 1)$.
5. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-2}$.
6. אם $\underline{u} = \underline{0}$, אז $t \cdot \underline{u} = \underline{0}$ לכל t , וכל ה"ישר" הוא הנקודה A לבדה. לכן וקטור כיוון חייב להיות שונה מווקטור האפס.