

המכפלה הווקטורית

איך מוצאים וקטור שניצב לשני וקטורים – בשתי שיטות, ולמה שתיהן עובדות

כ־15 דקות קריאה

2 שיטות, 2 הוכחות

המכפלה הווקטורית: להעמקה

וקטורים במרחב

5 יח"ל

כיתה י"ב

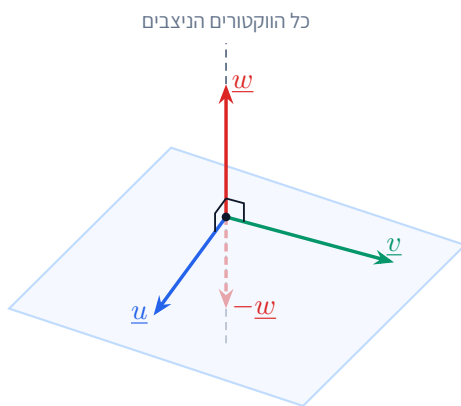
מה כדאי לדעת קודם

- וקטורים במרחב: רכיבים, אורך, כפל במספר.
- מכפלה סקלרית לפי רכיבים.
- שני וקטורים ניצבים זה לזה אם ורק אם המכפלה הסקלרית שלהם שווה ל־0.
- פתרון של מערכת משוואות.

מה תמצאו כאן

- למה צריך וקטור שניצב לשני וקטורים, ולמה יש אינסוף כאלה.
- שיטה 1: מערכת משוואות ומשתנה חופשי – השיטה שלומדים בכיתה.
- שיטה 2: המכפלה הווקטורית בעזרת דטרמיננטה.
- שתי הוכחות: למה הנוסחה עובדת, ומאיפה היא באה.
- להעמקה: כלל יד ימין, ושטח של מקבילית ושל משולש.

1 האינטואיציה: עט זקוף על שולחן



סרטוט 1: כל הווקטורים שניצבים ל־ $\underline{u}$ ול־ $\underline{v}$ מונחים על ישר אחד.

האינטואיציה

הניחו על השולחן שני עפרונות שיוצאים מאותה נקודה לשני כיוונים שונים. כל עיפרון הוא וקטור: נקרא להם $\underline{u}$ ו־ $\underline{v}$. עכשיו העמידו עט זקוף בדיוק בנקודה הזאת. העט ניצב לשני העפרונות בבת אחת – וזה הווקטור שנחפש במסמך הזה. כמה עטים כאלה יש? אינסוף. העט יכול להיות ארוך או קצר, ואפשר גם להפוך את הכיוון שלו – כלפי מטה, אל מתחת לשולחן. אבל כולם מונחים על אותו ישר: הישר הזקוף שעובר דרך הנקודה. לכן לשאלה "מצאו וקטור שניצב ל־ $\underline{u}$ ול־ $\underline{v}$ " אין תשובה אחת. יש כיוון אחד, וכל וקטור בכיוון הזה או בכיוון ההפוך לו הוא תשובה נכונה.

דוגמה מספרית קטנה

נניח שהשולחן הוא המישור xy , ושני העפרונות הם $\underline{u} = (1, 0, 0)$ ו־ $\underline{v} = (0, 1, 0)$. הווקטורים $(0, 0, 1)$, $(0, 0, 7)$ ו־ $(0, 0, -2)$ ניצבים לשניהם. למשל, $(0, 0, 7) \cdot (1, 0, 0) = 0$ וגם $(0, 0, 7) \cdot (0, 1, 0) = 0$. לעומת זאת, הווקטור $(1, 0, 1)$ ניצב ל־ $\underline{v}$ אבל לא ל־ $\underline{u}$, כי $(1, 0, 1) \cdot (1, 0, 0) = 1 \neq 0$. רק הדרישה להיות ניצב לשני הווקטורים יחד קובעת את הכיוון.

למה צריך וקטור כזה? בגאומטריה במרחב צריך אותו כל הזמן. שני וקטורים שאינם מקבילים קובעים כיוון של מישור, והווקטור שניצב לשניהם הוא **וקטור הנורמל** של המישור. בעזרתו כותבים משוואת מישור, מחשבים מרחק של נקודה ממישור, ומוצאים זוויות בין ישרים ומישורים.

2 השאלה – והתשובה המלאה

נתונים שני וקטורים $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ו- $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ שונים מווקטור האפס ולא מקבילים זה לזה. מחפשים וקטור $\underline{w} \neq \underline{0}$ שניצב לשניהם. נראה שתי שיטות למצוא אותו. המשפט הבא מסביר למה שתיהן עובדות, ולמה הן נותנות תמיד וקטורים מקבילים. את חלק א' שלו נוכיח בהוכחה 1 (ובהוכחה 2 נקבל לו הוכחה נוספת), ואת חלק ב' – בהוכחה 2.

המכפלה הווקטורית

המכפלה הווקטורית של $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ היא הווקטור

$$\underline{u} \times \underline{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

א. $\underline{u} \times \underline{v}$ ניצב ל- $\underline{u}$ וגם ל- $\underline{v}$ – לכל שני וקטורים.

ב. אם $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ אינם מקבילים, אז $\underline{u} \times \underline{v} \neq \underline{0}$, וכל וקטור שניצב לשניהם הוא כפולה שלו: $\underline{w} = t \cdot (\underline{u} \times \underline{v})$.

במילים: יש נוסחה מוכנה שנותנת וקטור ניצב, וכל התשובות הנכונות האחרות הן כפולות של הווקטור הזה.

קוראים " $\underline{u}$ כפול וקטורית $\underline{v}$ " (באנגלית cross product). שימו לב להבדל: המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$ היא **מספר**, והמכפלה הווקטורית $\underline{u} \times \underline{v}$ היא **וקטור**.

בתוכנית הלימודים מוצאים וקטור ניצב בשיטה 1, בעזרת מערכת משוואות. המכפלה הווקטורית אינה חלק מהתוכנית: היא העשרה, קיצור דרך ובדיקה מהירה. לפני שמתמשים בה בבחינה, כדאי לשאול את המורה.

3 שיטה 1: מערכת משוואות ומשתנה חופשי

הרעיון שני וקטורים ניצבים זה לזה בדיוק כשהמכפלה הסקלרית שלהם שווה ל-0. נסמן את הווקטור שאנחנו מחפשים ב- $\underline{w} = (x, y, z)$, ונדרוש את זה פעמיים: פעם עם $\underline{u}$ ופעם עם $\underline{v}$.

נפתור את הדוגמה שתלווה אותנו לאורך כל המסמך:

$$\underline{u} = (1, -1, 2) \quad \underline{v} = (2, 1, -1)$$

נימוק	טענה
התנאי $\underline{w} \cdot \underline{u} = 0$, כי $(x, y, z) \cdot (1, -1, 2) = x - y + 2z$	$x - y + 2z = 0$ ①
התנאי $\underline{w} \cdot \underline{v} = 0$, כי $(x, y, z) \cdot (2, 1, -1) = 2x + y - z$	$2x + y - z = 0$ ②
חיבור שתי המשוואות: y מתבטל	$3x + z = 0$ ③

$$z$$

$$z = -3x \quad (4)$$

בוחרים את x כמשתנה החופשי, ומציבים $x = 1$

$$x = 1, \quad z = -3 \quad (5)$$

הצבה במשוואה של צעד 1

$$1 - y - 6 = 0 \implies y = -5 \quad (6)$$

מצאנו וקטור ניצב

$$\underline{w} = (1, -5, -3) \quad (7)$$

בדיקה: $(1, -5, -3) \cdot (2, 1, -1) = 2 - 5 + 3 = 0$ וגם $(1, -5, -3) \cdot (1, -1, 2) = 1 + 5 - 6 = 0$

למה מותר "לבחור"? קיבלנו שתי משוואות עם שלושה נעלמים. למערכת כזאת יש אינסוף פתרונות – בדיוק כמו אינסוף העטים מהאינטואיציה. המשתנה החופשי הוא הדרך לבחור עט אחד מתוכם. אילו בחרנו $x = 2$, היינו מקבלים $(2, -10, -6)$. ואילו השארנו $x = t$, היינו מקבלים את כל הפתרונות כולם: $\underline{w} = t \cdot (1, -5, -3)$. רק $x = 0$ אסור כאן: הוא נותן $y = z = 0$, כלומר את וקטור האפס, שאינו מגדיר שום כיוון.

4 שיטה 2: המכפלה הווקטורית

הרעיון במקום לפתור מערכת מחדש בכל תרגיל, משתמשים בנוסחה מוכנה – הנוסחה של $\underline{u} \times \underline{v}$ מתיבת המשפט. כדי לזכור אותה, כותבים אותה בעזרת **דטרמיננטה**.

הדטרמיננטה של טבלה 2×2 היא מכפלת האלכסון הראשי פחות מכפלת האלכסון המשני:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 2 \quad \text{למשל:} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

הטבלה של המכפלה הווקטורית. רושמים טבלה בת שלוש שורות. בשורה העליונה רושמים את שלושת וקטורי היחידה, $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ – הם רק מסמנים את ה"מקומות" של הרכיבים x, y, z . בשורה השנייה רושמים את $\underline{u}$, ובשלישית את $\underline{v}$:

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \underline{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \underline{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

כל רכיב מחשבים כך: מכסים את השורה העליונה ואת העמודה של הרכיב, ומחשבים את הדטרמיננטה 2×2 שנשארה. לרכיב האמצעי מוסיפים **מינוס**. בזכות המינוס הזה הרכיב השני יוצא $-(u_1 v_3 - u_3 v_1) = u_3 v_1 - u_1 v_3$, בדיוק כמו בנוסחה.

רכיב z	רכיב y – עם מינוס!	רכיב x
$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
$1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 3$	$-[1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2] = 5$	$(-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -1$

סרטוט 2: החישוב של $(1, -1, 2) \times (2, 1, -1)$. האזור האפור מכוסה. בכל דטרמיננטה 2×2 החץ הירוק הוא המכפלה שמחברים, והאדום – המכפלה שמחסירים. ברכיב y הדטרמיננטה כולה מקבלת אחר כך מינוס.

פתרון הדוגמה בשיטה 2

עבור $\underline{u} = (1, -1, 2)$ ו- $\underline{v} = (2, 1, -1)$ לפי סרטוט 2:

- רכיב x הוא $(-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$
- רכיב y הוא $-[1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2] = -[-1 - 4] = 5$
- רכיב z הוא $1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 1 + 2 = 3$

ולכן $\underline{u} \times \underline{v} = (-1, 5, 3)$.

בשיטה 1 קיבלנו $(1, -5, -3)$, וכאן $(-1, 5, 3)$. אין כאן סתירה: $(-1, 5, 3) = -1 \cdot (1, -5, -3)$. זה אותו "עט", רק הפוך – הוא מצביע לצד השני של השולחן. שתי התשובות נכונות לגמרי.

דרך לזכור בלי טבלה. בכל רכיב מופיעים שני האינדקסים ה"אחרים", בסדר מחזורי $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$: ברכיב x האינדקסים 2 ו-3, ברכיב y האינדקסים 3 ו-1, וברכיב z האינדקסים 1 ו-2. בכל רכיב מתחילים במכפלה "לפי הסדר" (u_1v_2, u_3v_1, u_2v_3) , ומחסירים ממנה את המכפלה ההפוכה.

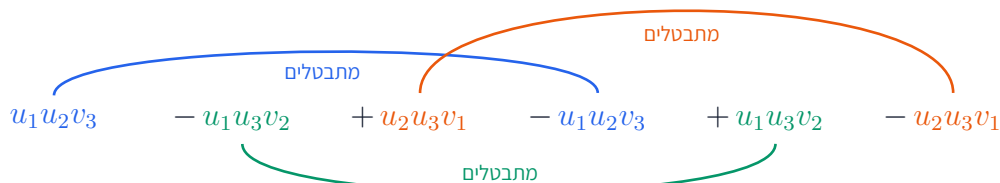
אבל למה הנוסחה המוזרה הזאת נותנת וקטור ניצב? ולמה היא תמיד מסכימה עם שיטה 1? את זה נוכיח עכשיו.

5 הוכחה 1: בדיקה ישירה – הכול מתבטל

הרעיון כדי להראות ש- $\underline{u} \times \underline{v}$ ניצב ל- $\underline{u}$, מספיק לחשב את המכפלה הסקלרית שלהם ולקבל 0. נעשה את זה באותיות, בלי מספרים, כדי שהתוצאה תהיה נכונה לכל שני וקטורים.

$$\begin{aligned}(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{u} &= (u_2v_3 - u_3v_2)u_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)u_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)u_3 \\&= u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2 + u_2u_3v_1 - u_1u_2v_3 + u_1u_3v_2 - u_2u_3v_1 \\&= 0\end{aligned}$$

בשורה הראשונה כפלנו רכיב ברכיב וחיברנו, כמו בכל מכפלה סקלרית. בשורה השנייה פתחנו סוגריים, ובכל מכפלה סידרנו את האותיות לפי הסדר. עכשיו רואים שכל איבר מופיע פעמיים: פעם עם פלוס ופעם עם מינוס. לכן הסכום הוא 0, כלומר $\underline{u} \times \underline{v}$ ניצב ל- $\underline{u}$.



סרטוט 3: ששת האיברים של $(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{u}$. כל צבע מופיע פעמיים, עם סימנים הפוכים.

עצרו ובדקו

באותה דרך בדיוק הראו ש- $(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{v} = 0$. אילו איברים מתבטלים זה עם זה?

מה ההוכחה לא הניחה? שום דבר על המספרים – אפילו לא שהווקטורים אינם מקבילים. לכן $\underline{u} \times \underline{v}$ ניצב לשני הווקטורים **תמיד**, וזה חלק א' של המשפט. (כשהווקטורים מקבילים יוצא $\underline{u} \times \underline{v} = \underline{0}$, כפי שנראה בהוכחה 2. וקטור האפס "ניצב" לכל וקטור, אבל אינו מגדיר כיוון.)

■ מש"ל

6 הוכחה 2: מאיפה באה הנוסחה?

הרעיון נפתור את המערכת של שיטה 1 פעם אחת ולתמיד – עם האותיות $u_1, \dots, v_3$ במקום מספרים. הנוסחה של $\underline{u} \times \underline{v}$ תצא מעצמה, ונראה גם שאין פתרונות אחרים מלבד הכפולות של $\underline{u} \times \underline{v}$.

נחפש $\underline{w} = (x, y, z)$ שניצב ל- $\underline{u}$ ול- $\underline{v}$, כלומר פתרון של המערכת:

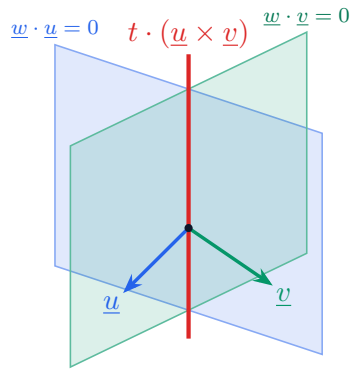
$$u_1x + u_2y + u_3z = 0 \quad (1)$$

$$v_1x + v_2y + v_3z = 0 \quad (2)$$

נסמן $D = u_1v_2 - u_2v_1$. שימו לב: זה בדיוק הרכיב השלישי של $\underline{u} \times \underline{v}$. בשלב הראשון נניח ש- $D \neq 0$.

נימוק	טענה
$u_1v_2 - u_2v_1 \cdot (1) - u_2 \cdot (2)$ ו- y מתבטל	$(u_1v_2 - u_2v_1)x + (u_3v_2 - u_2v_3)z = 0$ ①
הסימון D , והעברת אגף	$D \cdot x = (u_2v_3 - u_3v_2) \cdot z$ ②
$u_1v_2 - u_2v_1 \cdot (2) - v_1 \cdot (1)$ ו- x מתבטל	$(u_1v_2 - u_2v_1)y + (u_1v_3 - u_3v_1)z = 0$ ③
הסימון D , והעברת אגף	$D \cdot y = (u_3v_1 - u_1v_3) \cdot z$ ④
זו פשוט ההגדרה של D , כפול z	$D \cdot z = (u_1v_2 - u_2v_1) \cdot z$ ⑤
צעדים 2, 4 ו-5 יחד, רכיב אחר רכיב	$D \cdot (x, y, z) = z \cdot (\underline{u} \times \underline{v})$ ⑥
חילוק ב- $D \neq 0$	$\underline{w} = \frac{z}{D} \cdot (\underline{u} \times \underline{v})$ ⑦

מה גילינו? צעד 7 אומר שכל וקטור שניצב ל- $\underline{u}$ ול- $\underline{v}$ הוא כפולה של $\underline{u} \times \underline{v}$. זה חלק ב' של המשפט, ומכאן גם ששתי השיטות נותנות תמיד וקטורים מקבילים. ויש כאן עוד הפתעה: אם בוחרים את המשתנה החופשי $z = D \cdot \frac{z}{D}$, שווה ל-1, ומקבלים בדיוק $\underline{w} = \underline{u} \times \underline{v}$. זה הטיפ הידוע "בחרו את המשתנה החופשי כך שלא יהיו שברים" – בגרסה הכללית שלו. המכפלה הווקטורית היא הפתרון של שיטה 1 עם הבחירה החכמה ביותר – פתרון שחושב מראש, פעם אחת ולתמיד.



ולמה בכלל יש אינסוף פתרונות? כל משוואה במערכת מתארת **מישור** שעובר דרך ראשית הצירים. משוואה (1) מתארת את כל הווקטורים שניצבים ל- $\underline{u}$, ומשוואה (2) – את כל הווקטורים שניצבים ל- $\underline{v}$. הפתרונות של שתי המשוואות יחד הם החיתוך של שני המישורים, וחיתוך של שני מישורים שונים הוא ישר. זה בדיוק הישר של העטים מהאינטואיציה, וכיוונו הוא $\underline{u} \times \underline{v}$.

סרטוט 4: כל משוואה מתארת מישור דרך ראשית הצירים. חיתוך המישורים (באדום) הוא ישר הפתרונות.

ומכאן הוכחה נוספת לחלק א'. ניקח פתרון $\underline{w} \neq \underline{0}$: נקודה כלשהי על ישר החיתוך, חוץ מראשית הצירים. אם $D \neq 0$, אז $z \neq 0$ (אחרת צעד 6 נותן $D \cdot \underline{w} = 0$, כלומר $\underline{w} = \underline{0}$), ולפי צעד 6 $\underline{u} \times \underline{v} = \frac{D}{z} \cdot \underline{w}$. כפולה של וקטור שניצב ל- $\underline{u}$ ול- $\underline{v}$ ניצבת גם היא לשניהם – וזה חלק א'. (אם $D = 0$, עובדים עם רכיב אחר, כמו בסעיף הבא; ואם $\underline{u} \times \underline{v} = \underline{0}$, אין מה להוכיח).

ומה אם $D = 0$?

D הוא רק אחד משלושת הרכיבים של $\underline{u} \times \underline{v}$. אם $D = 0$ אבל רכיב אחר שונה מ-0, עושים את אותו חישוב עם תפקידים מוחלפים – מבטלים זוג אחר של משתנים – ומגיעים לאותה מסקנה. נשאר מקרה אחד: כל שלושת הרכיבים שווים ל-0, כלומר $\underline{u} \times \underline{v} = \underline{0}$. נראה שזה קורה **בדיוק** כשהווקטורים מקבילים:

- אם $\underline{v} = k\underline{u}$, כל רכיב של $\underline{u} \times \underline{v}$ נראה כך: $u_2 \cdot ku_3 - u_3 \cdot ku_2 = 0$. לכן $\underline{u} \times \underline{v} = \underline{0}$.
- בכיוון ההפוך, נניח ש- $\underline{u} \times \underline{v} = \underline{0}$ ו- $u_1 \neq 0$ (אחרת עובדים עם רכיב אחר של $\underline{u}$ שאינו 0). נסמן $k = \frac{v_1}{u_1}$, כך ש- $v_1 = ku_1$. מהרכיב השלישי, $u_1v_2 = u_2v_1$, ולכן $u_1v_2 = u_2v_1$, מהרכיב השני, $v_2 = \frac{v_1}{u_1} \cdot u_2 = ku_2$, ולכן $v_3 = ku_3$. קיבלנו $\underline{v} = k\underline{u}$: הווקטורים מקבילים.

המסקנה: אם $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ אינם מקבילים, אז $\underline{u} \times \underline{v} \neq \underline{0}$, ולפחות אחד הרכיבים שלו מאפשר את החישוב של צעדים 1–7. בזה הוכחנו את חלק ב' במלואו.

מש"ל

7 שתי השיטות זו מול זו

שיטה 1: מערכת משוואות	שיטה 2: המכפלה הווקטורית	
הרעיון	מכפלה סקלרית 0 עם כל אחד מהווקטורים	נוסחה מוכנה: שיטה 1 בבחירה החכמה
שברים	עלולים להופיע; בוחרים משתנה חופשי "חכם"	לא מופיעים: רכיבים שלמים נשארים שלמים
מלכודות	משתנה שחייב להיות 0 (מלכודת האפס)	המינוס ברכיב האמצעי
וקטורים מקבילים	המשוואות שקולות, והפתרונות ממלאים מישור	יוצא 0 – סימן ברור להקבלה
בבחינה	השיטה שלומדים בכיתה	העשרה ובדיקה מהירה – שאלו את המורה

8 שימוש: משוואת מישור דרך שלוש נקודות

דוגמה מספרית

מצאו משוואה של המישור שעובר דרך הנקודות $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ ו- $C(0, 0, 3)$. שני וקטורים במישור הם $\underline{AB} = (-1, 2, 0)$ ו- $\underline{AC} = (-1, 0, 3)$. וקטור נורמל למישור:

$$\underline{n} = \underline{AB} \times \underline{AC} = (2 \cdot 3 - 0 \cdot 0, 0 \cdot (-1) - (-1) \cdot 3, (-1) \cdot 0 - 2 \cdot (-1)) = (6, 3, 2)$$

למישור שהנורמל שלו הוא $(6, 3, 2)$ יש משוואה מהצורה $6x + 3y + 2z = d$. נציב את A ונקבל $d = 6$. המשוואה: $6x + 3y + 2z = 6$.

בדיקה: עבור B מקבלים $0 + 6 + 0 = 6$, ועבור C מקבלים $0 + 0 + 6 = 6$. בשיטה 1 הייתם מקבלים כפולה של $(6, 3, 2)$ — ואותו מישור בדיוק.

ראו גם: המסמך על משוואת המישור במרחב.

9 טיפים ומלכודות

ארבעה טיפים לשיטה 1

- 1. בחרו משתנה חופשי "חכם".** אם קיבלתם, למשל, $2x = 5z$, אל תציבו $z = 1$ (ייצא $x = \frac{5}{2}$). הציבו $z = 2$, ותקבלו $x = 5$. מה שחשוב הוא הכיוון של הווקטור, לא האורך שלו.
- 2. מותר לצמצם.** יצא $(10, 20, -30)$? חלקו ב-10 והמשיכו עם $(1, 2, -3)$. מותר גם לכפול ב- (-1) . החישובים שבהמשך יהיו קלים בהרבה.
- 3. מלכודת האפס.** לפעמים מציבים $x = 1$ ומקבלים סתירה. פירוש הדבר שבכל וקטור ניצב $x = 0$. חוזרים אחורה, מציבים $x = 0$ ובוחרים משתנה חופשי אחר (ראו את הדוגמה הבאה).
- 4. תמיד בודקים.** בסוף חשבו את המכפלה הסקלרית של הווקטור שמצאתם עם כל אחד מהווקטורים הנתונים. יצא 0 בשתייהן? פתרתם נכון. לא יצא 0? חפשו טעות — בדרך כלל טעות סימן.

מלכודת האפס

נחפש וקטור שניצב ל- $\underline{u} = (1, 1, 1)$ ול- $\underline{v} = (2, 1, 1)$. המשוואות הן $x + y + z = 0$ ו- $2x + y + z = 0$. אם נציב $x = 1$, נקבל $y + z = -1$ וגם $-y + z = -2$. סתירה. הסיבה: כשמחסירים את המשוואה הראשונה מהשנייה מקבלים $x = 0$, כלומר x **חייב** להיות 0. נציב $x = 0$ ונבחר את y כמשתנה החופשי: $y = 1$, ואז $z = -1$. התשובה: $\underline{w} = (0, 1, -1)$.
בשיטה 2: $\underline{u} \times \underline{v} = (1 \cdot 1 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = (0, 1, -1)$ — אותו וקטור בדיוק.

⚠ טעות נפוצה

- **המינוס האמצעי.** קל לשכוח את המינוס ברכיב של $\underline{j}$, ואז מקבלים וקטור שאינו ניצב. הבדיקה בסוף תופסת את הטעות הזאת מייד.
- **משתנה חופשי ששווה ל-0.** אם מציבים 0 במשתנה החופשי, יוצא וקטור האפס. הוא "ניצב" לכל וקטור, ולכן אינו עוזר: הוא לא מגדיר כיוון.
- **סדר הווקטורים.** $\underline{v} \times \underline{u} = -(\underline{u} \times \underline{v})$ כשמחפשים רק כיוון ניצב, זה לא משנה. בפיזיקה, ובכל חישוב שבו הכיוון חשוב, הסדר קובע.
- **נקודה או איקס?** $\underline{u} \cdot \underline{v}$ הוא מספר, ו- $\underline{u} \times \underline{v}$ הוא וקטור. " $\underline{u} \times \underline{v} = 7$ " הוא שגיאה.

10 להעמקה: הכיוון והאורך של המכפלה הווקטורית

מבין כל הווקטורים הניצבים, $\underline{u} \times \underline{v}$ הוא וקטור אחד מסוים, עם כיוון ואורך מסוימים. מסתבר שגם הכיוון וגם האורך שלו אומרים משהו גאומטרי.

הכיוון: כלל יד ימין

מקפלים את האצבעות של יד ימין מ- $\underline{u}$ אל $\underline{v}$, דרך הזווית שקטנה מ- 180° . האגודל מצביע בכיוון של $\underline{u} \times \underline{v}$. לדוגמה, $\underline{i} \times \underline{j} = (0, 0, 1) = \underline{k}$: מקפלים מציר ה- x אל ציר ה- y , והאגודל מצביע למעלה, לאורך ציר ה- z . הכלל נכון כשהצירים מסודרים כמו בסרטוטים שלנו, במערכת צירים "ימנית" (זו המוסכמה המקובלת לסידור הצירים במרחב). את הכלל לכל זוג וקטורים לא נוכיח כאן – הוכחה מלאה דורשת כלים שמעבר לתיכון – אבל קל לבדוק אותו על שלושת הצירים: $\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$, $\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$, $\underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$.

אם מחליפים את הסדר, האצבעות מתקפלות לכיוון ההפוך, והאגודל מתהפך: $\underline{v} \times \underline{u} = -(\underline{u} \times \underline{v})$. רואים את זה גם בנוסחה: כשמחליפים בין $\underline{u}$ ל- $\underline{v}$, כל רכיב הופך לנגדי שלו.

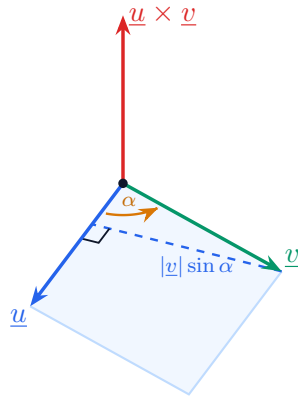
האורך: שטח של מקבילית

לכל שני וקטורים מתקיימת זהות לגראנז':

$$|\underline{u} \times \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 \cdot |\underline{v}|^2 - (\underline{u} \cdot \underline{v})^2$$

כדי להוכיח אותה, נפתח את אגף ימין. האיברים $u_1^2 v_1^2$, $u_2^2 v_2^2$ ו- $u_3^2 v_3^2$ מופיעים בשני הביטויים ומתבטלים, ואת מה שנשאר אפשר לקבץ לסכום של שלושה ריבועים:

$$\begin{aligned} & (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 \\ &= (u_1^2 v_2^2 - 2u_1 u_2 v_1 v_2 + u_2^2 v_1^2) + (u_3^2 v_1^2 - 2u_1 u_3 v_1 v_3 + u_1^2 v_3^2) \\ &\quad + (u_2^2 v_3^2 - 2u_2 u_3 v_2 v_3 + u_3^2 v_2^2) \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 = |\underline{u} \times \underline{v}|^2 \end{aligned}$$



עכשיו נציב $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$, כאשר α היא הזווית בין הווקטורים (ראו המסמך על המכפלה הסקלרית):

$$|\underline{u} \times \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 |\underline{v}|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = |\underline{u}|^2 |\underline{v}|^2 \sin^2 \alpha$$

וכיוון ש- $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ $\sin \alpha \geq 0$

$$|\underline{u} \times \underline{v}| = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \sin \alpha$$

זה בדיוק השטח של המקבילית ש- $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ פורשים: בסיס $|\underline{u}| \sin \alpha$ גובה $|\underline{v}|$. השטח של המשולש שהם פורשים הוא חצי מזה.

סרטוט 5: הקשת: הסיבוב מ- $\underline{u}$ אל $\underline{v}$. לפי כלל יד ימין, $\underline{u} \times \underline{v}$ מצביע למעלה, ו- $\underline{v} \times \underline{u}$ – למטה. האורך של $\underline{u} \times \underline{v}$ הוא שטח המקבילית.

ומכאן גם הוכחה נוספת לכך ש- $\underline{u} \times \underline{v} = \underline{0}$ בדיוק כשהווקטורים מקבילים: אז $\alpha = 0^\circ$ או $\alpha = 180^\circ$, והמקבילית "נמעכת" לקטע ששטחו 0.

שטח של משולש במרחב

השטח של המשולש ABC מסעיף 8 הוא חצי מהשטח של המקבילית ש- $\underline{AB}$ ו- $\underline{AC}$ פורשים:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\underline{AB} \times \underline{AC}| = \frac{1}{2} |(6, 3, 2)| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{49} = 3.5$$

הידעתם?

בנוסחה של המכפלה הווקטורית לפי רכיבים השתמש כבר ז'וזף-לואי לגראנז' ב-1773, כשחקר פירמידות משולשות. אבל רק במאה ה-19 היא הפכה לכלי מוכר. ב-1843 המציא ויליאם רואן המילטון את הקוורטניונים, וכשכופלים שני קוורטניונים "וקטוריים" מתקבלות יחד המכפלה הסקלרית (עם סימן מינוס) והמכפלה הווקטורית. בשנות ה-80 של המאה ה-19 הפרידו ביניהן ג'וזיה וילארד גיבס ואוליבר הביסייד. בפיזיקה המכפלה הווקטורית נמצאת בכל מקום. מומנט הכוח שמסובב ברגים ודלתות הוא $\underline{\tau} = \underline{r} \times \underline{F}$. הכוח שהשדה המגנטי מפעיל על מטען q שנע במהירות $\underline{v}$ הוא $\underline{F} = q \underline{v} \times \underline{B}$ (כוח לורנץ) – ולכן הכוח הזה ניצב תמיד גם למהירות וגם לשדה.

11 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

- מצאו וקטור שניצב ל- $\underline{u} = (1, 2, 0)$ ול- $\underline{v} = (0, 1, 3)$ בשתי השיטות, והשוו בין התשובות.
- חשבו את $\underline{j} \times \underline{k}$ ואת $\underline{k} \times \underline{j}$. האם התוצאות מתאימות לכלל יד ימין?
- חשבו את $(-1, 2, -3) \times (2, -4, 6)$. מה אפשר להסיק על שני הווקטורים?
- מצאו וקטור שניצב ל- $(1, 2, 1)$ ול- $(3, 4, 2)$. מה קורה אם מציבים $x = 1$?
- (להעמקה) מצאו את השטח של המשולש שקודקדיו $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 2)$ ו- $C(2, 1, -2)$.
- הראו ש- $(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{v} = 0$. (זו השאלה מתיבת "עצרו ובדקו").

תשובות

1. שיטה 1: $x + 2y = 0$ ו- $y + 3z = 0$. נבחר $z = 1$, ונקבל $y = -3$ ו- $x = 6$, כלומר $(6, -3, 1)$. שיטה 2: $\underline{u} \times \underline{v} = (6 - 0, 0 - 3, 1 - 0) = (6, -3, 1)$. אותו וקטור בדיוק.
2. $\underline{k} \times \underline{j} = (-1, 0, 0) = -\underline{i}$ ו- $\underline{j} \times \underline{k} = (1, 0, 0) = \underline{i}$. זה מתאים לכלל: מציר ה- y אל ציר ה- z והאגודל מצביע בכיוון ציר ה- x .
3. הרכיבים הם $12 - 12 = 0$, $-6 + 6 = 0$ ו- $4 - 4 = 0$, כלומר המכפלה היא $(0, 0, 0)$. לכן שני הווקטורים מקבילים, ואכן $(2, -4, 6) = -2 \cdot (-1, 2, -3)$.
4. המשוואות הן $x + 2y + z = 0$ ו- $3x + 4y + 2z = 0$. נכפול את הראשונה ב-2 ונחסיר ממנה את השנייה: $-x = 0$. כלומר בכל וקטור ניצב $x = 0$, ולכן הצבה של $x = 1$ מובילה לסתירה. נציב $x = 0$ ונקבל $2y + z = 0$. נבחר $y = 1$ ונקבל $z = -2$, כלומר $\underline{w} = (0, 1, -2)$. בשיטה 2: $(0, 1, -2) \cdot (4 - 4, 3 - 2, 4 - 6) = (0, 1, -2) \cdot (0, 1, -2) = 0$.
5. $\underline{AB} = (1, 2, 2)$ ו- $\underline{AC} = (2, 1, -2)$, ולכן $\underline{AB} \times \underline{AC} = (-4 - 2, 4 + 2, 1 - 4) = (-6, 6, -3)$. האורך הוא $\sqrt{36 + 36 + 9} = 9$, ולכן השטח הוא 4.5. בדיקה: $\underline{AB} \cdot \underline{AC} = 0$ ו- $|\underline{AB}| = |\underline{AC}| = 3$, כלומר המשולש ישר-זווית, ושטחו $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4.5$.
6. נכפול רכיב ברכיב ונפתח סוגריים:

$$(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)v_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)v_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)v_3$$

$$= u_2v_1v_3 - u_3v_1v_2 + u_3v_1v_2 - u_1v_2v_3 + u_1v_2v_3 - u_2v_1v_3 = 0$$