

המכפלה הסקלרית

שתי הגדרות שנראות שונות לגמרי – ולמה הן תמיד נותנות אותו מספר

כ־15 דקות קריאה

2 הוכחות

וקטורים

4-5 יח"ל

כיתה י"ב

מה כדאי לדעת קודם

- וקטורים במרחב: רכיבים, חיבור, חיסור וכפל במספר.
- נוסחת האורך של וקטור במרחב.
- משפט הקוסינוסים (רק להוכחה 1).
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$

מה תמצאו כאן

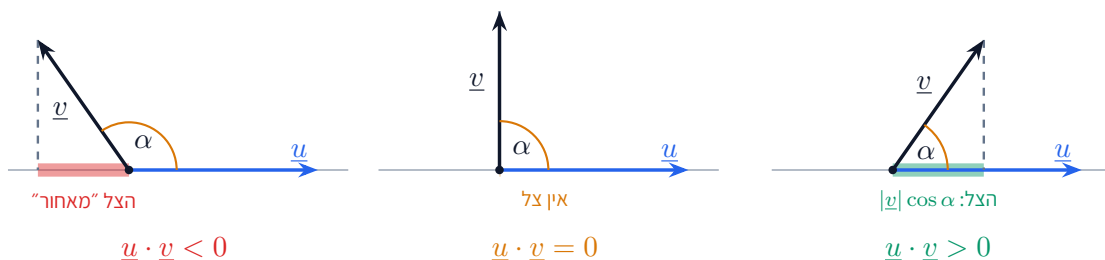
- אינטואיציה: מה המכפלה הסקלרית "מודדת".
- הוכחה 1: משפט הקוסינוסים במשולש שיוצרים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
- הוכחה 2: היטלים, חוק הפילוג ווקטורי היחידה.
- שימושים: ניצבות, אורך, זווית בין וקטורים והיטל.

1 האינטואיציה: מזוודה, רצועה וצל

האינטואיציה

דמיינו שאתם גוררים מזוודה על גלגלים בעזרת רצועה. המזוודה יכולה לנוע רק לאורך הרצפה. אם מושכים את הרצועה בדיוק קדימה, כל הכוח שלכם מניע את המזוודה. אם מושכים באלכסון כלפי מעלה, רק חלק מהכוח מושך קדימה, והשאר "הולך לאיבוד" בניסיון להרים אותה. אם מושכים ישר למעלה, המזוודה לא תזוז קדימה בכלל. ואם מושכים לאחור – היא דווקא תיסוג.

המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$ מודדת בדיוק את זה: כמה מהווקטור $\underline{v}$ פועל בכיוון של $\underline{u}$. החלק הזה נקרא **ההיטל** של $\underline{v}$ על $\underline{u}$. אפשר לחשוב עליו כעל הצל ש- $\underline{v}$ מטיל על הישר של $\underline{u}$ כשהאור נופל בניצב לישר. אורך הצל הוא $|\underline{v}| \cdot \cos \alpha$, ואותו כופלים באורך של $\underline{u}$. (מי שלומד פיזיקה מכיר את זה: העבודה של כוח $\underline{F}$ לאורך העתק $\underline{d}$ היא $W = \underline{F} \cdot \underline{d} = |\underline{F}| \cdot |\underline{d}| \cdot \cos \alpha$).



סרטוט 1: הווקטור $\underline{v}$ בשלוש זוויות שונות ביחס ל- $\underline{u}$. הפס הצבעוני הוא הצל של $\underline{v}$ על הישר של $\underline{u}$.

דוגמה מספרית קטנה

ניקח $\underline{u} = (4, 0, 0)$ ושלושה וקטורים $\underline{v}$ במישור xy , שבו רואים את הזוויות ישירות. למשל, $(3, 3, 0)$ הוא אלכסון של ריבוע, ולכן הוא יוצר עם ציר ה- x זווית של 45° . נחשב את $\underline{u} \cdot \underline{v}$ בשתי דרכים:

$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$	$ \underline{u} \cdot \underline{v} \cdot \cos \alpha$	α	$\underline{v}$
$12 + 0 + 0 = 12$	$4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12$	45°	$(3, 3, 0)$
$0 + 0 + 0 = 0$	$4 \cdot 3 \cdot 0 = 0$	90°	$(0, 3, 0)$
$-12 + 0 + 0 = -12$	$4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -12$	135°	$(-3, 3, 0)$

בכל שורה שתי העמודות האחרונות שוות. זה לא מקרה – זה בדיוק המשפט שנוכח.

2 המשפט

כדי למדוד את הזווית בין שני וקטורים, מסרטטים את שניהם מאותה נקודה. הזווית α ביניהם היא תמיד בין 0° ל- 180° .

שני הפנים של המכפלה הסקלרית

לכל שני וקטורים $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ו- $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$ שונים מווקטור האפס, שהזווית ביניהם היא α :

$$|\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

את המספר הזה מסמנים $\underline{u} \cdot \underline{v}$, וקוראים לו **המכפלה הסקלרית** של $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

במילים: מכפלת האורכים של שני הווקטורים בקוסינוס הזווית שביניהם שווה לסכום המכפלות של הרכיבים המתאימים.

אגף שמאל הוא **ההגדרה הגאומטרית**: הוא מדבר על אורכים ועל זווית, ואינו תלוי במערכת הצירים. אגף ימין הוא **הנוסחה האלגברית**: חישוב מהיר מתוך הרכיבים, בלי לדעת מראש שום זווית. בספרים שונים בוחרים אחד מהם כהגדרה ומוכיחים את השני. כאן נוכיח שהם שווים, בשתי דרכים שונות.

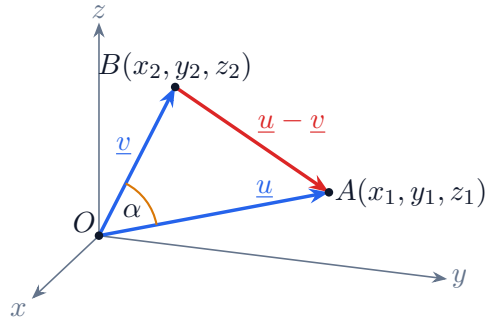
שתי הערות קטנות:

- אם אחד הווקטורים הוא וקטור האפס, הזווית אינה מוגדרת. במקרה הזה מגדירים $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ וגם הנוסחה האלגברית נותנת 0.
- במישור, בלי רכיב z , הנוסחה היא $x_1x_2 + y_1y_2$, וההוכחות זהות.

3 הוכחה 1: משפט הקוסינוסים

הרעיון נחשב את האורך של הווקטור $\underline{u} - \underline{v}$ פעמיים: פעם בעזרת משפט הקוסינוסים, ופעם מתוך הרכיבים. כשנשווה בין שתי התוצאות, הנוסחה תתקבל מעצמה.

נסרטט את שני הווקטורים מראשית הצירים O . הקצה של $\underline{u}$ הוא הנקודה $A(x_1, y_1, z_1)$, והקצה של $\underline{v}$ הוא הנקודה $B(x_2, y_2, z_2)$.



הווקטור $\underline{u} - \underline{v}$ הוא $\underline{u}$ מי שהולך מ- O ל- B וממשיך מ- B ל- A מגיע לאותה נקודה כמו מי שהולך ישר מ- O ל- A . כלומר $\underline{u} - \underline{v} + \underline{v} = \underline{u}$ ולכן $\underline{v} + \underline{BA} = \underline{u}$.

כך נוצר המשולש OAB . אורכי הצלעות שלו הם $|\underline{u}|$, $|\underline{v}|$ ו- $|\underline{u} - \underline{v}|$, והזווית שמול הצלע AB היא α .

ראו גם: המסמך על משפט הקוסינוסים.

סרטוט 2: המשולש OAB , שצלעותיו הן $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{u} - \underline{v}$.

נימוק	טענה
משפט הקוסינוסים ב- $\triangle OAB$, לצלע AB שמול α	$ \underline{u} - \underline{v} ^2 = \underline{u} ^2 + \underline{v} ^2 - 2 \underline{u} \cdot \underline{v} \cdot \cos \alpha$ ①
חיסור וקטורים לפי רכיבים	$\underline{u} - \underline{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ ②
ריבוע האורך הוא סכום ריבועי הרכיבים	$ \underline{u} - \underline{v} ^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$ ③
פתיחת סוגריים (נוסחת הכפל המקוצר) וקיבוץ האיברים לשלוש קבוצות	$ \underline{u} - \underline{v} ^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$ ④
$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \underline{u} ^2$ וכך גם עבור $\underline{v}$	$ \underline{u} - \underline{v} ^2 = \underline{u} ^2 + \underline{v} ^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$ ⑤
צעדים 1 ו-5 הם שני ביטויים לאותו גודל. משווים ביניהם ומחסירים משני האגפים את האיברים הזהים	$-2 \underline{u} \cdot \underline{v} \cdot \cos \alpha = -2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$ ⑥
חילוק שני האגפים ב- (-2)	$ \underline{u} \cdot \underline{v} \cdot \cos \alpha = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ ⑦

מש"ל

✓ עצרו ובדקו

בצעד 1 השתמשנו במשולש OAB . אבל אם $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ מקבילים – למשל, הם מצביעים לאותו כיוון – אין משולש בכלל! האם השוויון שבצעד 1 נכון גם אז?
רמז: אם $\alpha = 0^\circ$, הנקודות O, A ו- B נמצאות על קרן אחת. מה אז האורך של $\underline{u} - \underline{v}$?

4 הוכחה 2: היטלים וקטורי היחידה

הרעיון נראה שההגדרה הגאומטרית מקיימת "חוקי חשבון" רגילים, ובעיקר את חוק הפילוג. אחר כך נפרק כל וקטור לצעדים לאורך הצירים ונפתח סוגריים, כמו בכפל של ביטויים אלגבריים.

לאורך כל ההוכחה הזאת, $\underline{u} \cdot \underline{v}$ פירושו $|\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$ בלבד. את הנוסחה האלגברית נקבל רק בסוף.

ההיטל: הצל של וקטור

נעביר ישר דרך $\underline{u}$ ונקרא לו "הציר של $\underline{u}$ ". מהקצה של $\underline{v}$ נוריד אנך אל הציר. הקטע שנוצר על הציר, מנקודת ההתחלה של $\underline{v}$ ועד עקב האנך, הוא **ההיטל** של $\underline{v}$ על $\underline{u}$ – הצל מסרטוט 1. את אורכו נסמן ב- p , עם סימן: פלוס אם הצל מצביע בכיוון של $\underline{u}$, ומינוס אם הוא מצביע לכיוון ההפוך.

במשולש ישר-זווית שנוצר מתקיים $p = |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$. הנוסחה נכונה גם כשהזווית קהה: אז הצל נופל "מאחור", והזווית במשולש שליד O היא $180^\circ - \alpha$. אורך הצל הוא אז $|\underline{v}| \cos(180^\circ - \alpha) = -|\underline{v}| \cos \alpha$ ועם סימן המינוס של צל "מאחור" מקבלים שוב $p = |\underline{v}| \cos \alpha$ לכן:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot p$$

במילים: אורך $\underline{u}$ כפול הצל של $\underline{v}$ על הציר של $\underline{u}$ (עם הסימן).

שלושה חוקי חשבון

(א) חוק החילוף: $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$. ההגדרה הגאומטרית סימטרית: אותם שני אורכים ואותה זווית.

(ב) הוצאת מספר: $(k\underline{u}) \cdot \underline{v} = k(\underline{u} \cdot \underline{v})$ לכל מספר k . אם $k > 0$, האורך של $\underline{u}$ מוכפל ב- k , והזווית לא משתנה. אם $k < 0$, האורך מוכפל ב- $-k$, אבל הווקטור מתהפך, והזווית הופכת ל- $180^\circ - \alpha$:

$$(k\underline{u}) \cdot \underline{v} = (-k) |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = (-k) |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot (-\cos \alpha) = k(\underline{u} \cdot \underline{v})$$

ואם $k = 0$, שני האגפים שווים ל-0.

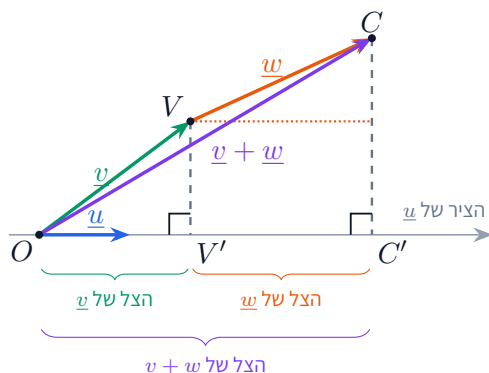
(ג) חוק הפילוג: $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$. זה הלב של ההוכחה.

נסרטט את $\underline{v}$ מ- O עד V , ואת $\underline{w}$ מ- V עד C . אז $\underline{v} + \underline{w}$ הוא הווקטור מ- O ל- C .

נטיל את שלושת הווקטורים על הציר של $\underline{u}$. הצל של $\underline{v}$ הוא OV' , הצל של $\underline{w}$ הוא $V'C'$, והצל של $\underline{v} + \underline{w}$ הוא OC' . על הציר רואים מייד:

$$OC' = OV' + V'C'$$

כלומר **הצל של סכום הוא סכום הצללים**. נכפול את השוויון ב- $|\underline{u}|$, ונקבל את חוק הפילוג.



סרטוט 3: הצל של $\underline{v} + \underline{w}$ הוא סכום הצללים של $\underline{v}$ ושל $\underline{w}$.

רגע: לא מתחיל על הציר. למה בכל זאת הצל שלו, $V'C'$, שווה ל- $|\underline{w}| \cdot \cos \beta$, כאשר β היא הזווית בין $\underline{w}$ ל- $\underline{u}$? הקו המנוקד בסרטוט יוצא מ- V , מקביל לציר ומסתיים מעל C' . נוצר משולש ישר-זווית: היתר שלו הוא $\underline{w}$, והניצב שמקביל לציר שווה ל- $V'C'$. הניצב הזה מקביל ל- $\underline{u}$, ולכן הזווית בינו לבין $\underline{w}$ היא β , ו- $V'C' = |\underline{w}| \cdot \cos \beta$ עם סימן, בדיוק כמו p . לכן גם $\underline{u} \cdot \underline{w} = |\underline{u}| \cdot V'C'$, והכפל ב- $|\underline{u}|$ באמת נותן את חוק הפילוג.

ובמרחב? (להעמקה) שם $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ לא חייבים להיות במישור אחד עם הציר, ולכן מטילים את הצל בעזרת **מישורים**: הצל של נקודה הוא המקום שבו המישור שעובר דרכה וניצב לציר חותך את הציר. הקו המנוקד מסתיים אז במישור הניצב שעובר דרך C , והוא עדיין שווה ל- $V'C'$, כי שניהם כלואים בין אותם שני מישורים מקבילים. לכן השוויון $OC' = OV' + V'C'$ נכון גם במרחב.

וקטורי היחידה

וקטורי היחידה הם שלושה וקטורים באורך 1 בכיווני הצירים:

$$\underline{i} = (1, 0, 0) \quad \underline{j} = (0, 1, 0) \quad \underline{k} = (0, 0, 1)$$

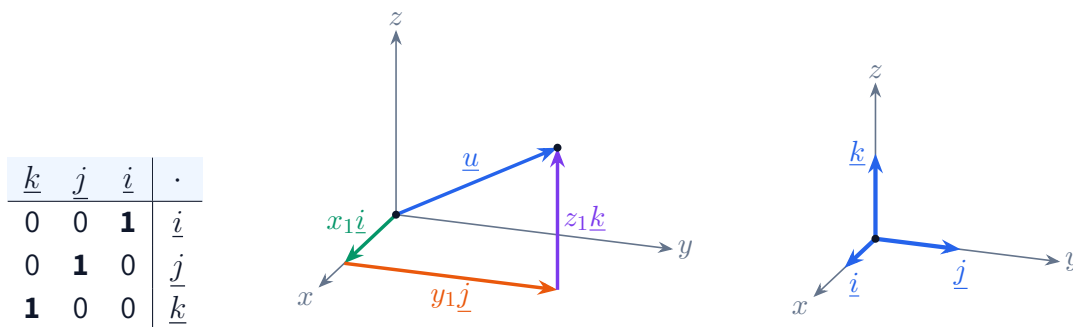
אורך כל אחד מהם 1, וכל שניים מהם ניצבים זה לזה. לכן, לפי ההגדרה הגאומטרית, המכפלה של וקטור יחידה בעצמו שווה ל-1, והמכפלה של שני וקטורי יחידה שונים שווה ל-0:

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1 \quad \underline{i} \cdot \underline{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0$$

כך גם עבור $\underline{j}$ ו- $\underline{k}$. כל התוצאות מרוכזות בטבלה שבסרטוט 4.

כל וקטור הוא "מסלול" של שלושה צעדים לאורך הצירים: x_1 פעמים $\underline{i}$, אחר כך y_1 פעמים $\underline{j}$, ואחר כך z_1 פעמים $\underline{k}$:

$$\underline{u} = (x_1, y_1, z_1) = x_1 \underline{i} + y_1 \underline{j} + z_1 \underline{k}$$



סרטוט 4: מימין: וקטורי היחידה. במרכז: $\underline{u}$ כמסלול לאורך הצירים. משמאל: "לוח הכפל" שלהם.

החישוב

עכשיו נכפול $\underline{u} = x_1 \underline{i} + y_1 \underline{j} + z_1 \underline{k}$ ב- $\underline{v} = x_2 \underline{i} + y_2 \underline{j} + z_2 \underline{k}$. בזכות חוק הפילוג (ג) וחוק החילוף (א) מותר לפתוח סוגריים: כל איבר מהסוגריים הראשונים כפול כל איבר מהסוגריים השניים, בדיוק כמו ב- $(a+b+c)(d+e+f)$. בזכות חוק (ב) מוציאים את המספרים אל מחוץ למכפלה:

$$\begin{aligned} \underline{u} \cdot \underline{v} &= (x_1 \underline{i} + y_1 \underline{j} + z_1 \underline{k}) \cdot (x_2 \underline{i} + y_2 \underline{j} + z_2 \underline{k}) \\ &= x_1 x_2 (\underline{i} \cdot \underline{i}) + x_1 y_2 (\underline{i} \cdot \underline{j}) + x_1 z_2 (\underline{i} \cdot \underline{k}) \\ &\quad + y_1 x_2 (\underline{j} \cdot \underline{i}) + y_1 y_2 (\underline{j} \cdot \underline{j}) + y_1 z_2 (\underline{j} \cdot \underline{k}) \\ &\quad + z_1 x_2 (\underline{k} \cdot \underline{i}) + z_1 y_2 (\underline{k} \cdot \underline{j}) + z_1 z_2 (\underline{k} \cdot \underline{k}) \\ &= x_1 x_2 \cdot 1 + y_1 y_2 \cdot 1 + z_1 z_2 \cdot 1 \quad (\text{שש המכפלות האחרות שוות ל-0}) \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{aligned}$$

מש"ל

מתוך תשעת האיברים נשארו רק שלושה – אלה שבהם וקטור יחידה כפול עצמו. כל השאר התאפסו, כי הצירים ניצבים זה לזה. ההוכחה הזאת מסבירה **למה** הנוסחה האלגברית נראית כך: היא בסך הכול "לוח הכפל" של $\underline{j}, \underline{i}, \underline{k}$, שבו רק האלכסון שונה מאפס.

5 שתי הדרכים זו מול זו

הוכחה 1: משפט הקוסינוסים	הוכחה 2: היטלים ווקטורי יחידה	
לחשב את $ \underline{u} - \underline{v} ^2$ בשתי דרכים ולהשוות	לפתוח סוגריים, כמו בכפל ביטויים אלגבריים	הרעיון
משפט הקוסינוסים, נוסחת האורך	היטל, $\cos(180^\circ - \alpha)$, וקטורי היחידה	הכלים
קצרה, וכמעט כולה חישוב	מסבירה למה הנוסחה נראית כך: הצירים ניצבים, ווקטורי היחידה באורך 1	היתרון
$\underline{u} \cdot \underline{v} - 2$ הוא "התיקון" שמשפט הקוסינוסים מוסיף למשפט פיתגורס	חוקי החשבון של המכפלה הסקלרית	תוצר לוואי

6 מה עושים עם המכפלה הסקלרית?

שימוש 1: בדיקת ניצבות

שני וקטורים שאינם וקטור האפס ניצבים זה לזה **אם ורק אם** המכפלה הסקלרית שלהם שווה ל-0:

$$\underline{u} \perp \underline{v} \iff x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$

הסיבה: האורכים $|\underline{u}|$ ו- $|\underline{v}|$ חיוביים, ולכן $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ בדיוק כאשר $\cos \alpha = 0$. בתחום $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ זה קורה רק ב- $\alpha = 90^\circ$. באותו אופן, הסימן של המכפלה מגלה את סוג הזווית: מכפלה חיובית – זווית חדה, מכפלה שלילית – זווית קהה.

לדוגמה, $(1, 2, -1) \cdot (3, -1, 1) = 3 - 2 - 1 = 0$, ולכן שני הווקטורים ניצבים – בלי לסרטט שום דבר.

שימוש 2: אורך של וקטור

וקטור יוצר עם עצמו זווית של 0° . נחשב את $\underline{u} \cdot \underline{u}$ לפי שני האגפים של המשפט:

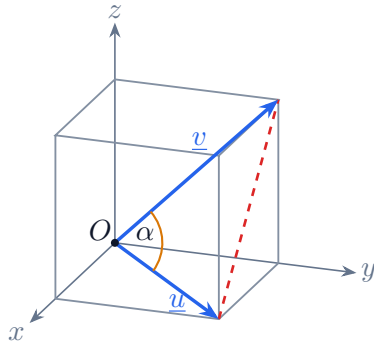
$$\underline{u} \cdot \underline{u} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \quad \text{וגם} \quad \underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}| \cdot |\underline{u}| \cdot \cos 0^\circ = |\underline{u}|^2$$

ולכן $|\underline{u}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ – וזו בדיוק נוסחת האורך המוכרת. למשל, $(2, -1, 2) \cdot (2, -1, 2) = 4 + 1 + 4 = 9$, ולכן אורך הווקטור הוא 3.

שימוש 3: הזווית בין שני וקטורים

מבודדים את $\cos \alpha$ מהמשפט:

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$$



סרטוט 5: שני אלכסוני פאות בקובייה. הקו האדום משלים משולש שווה-צלעות.

דוגמה מספרית

בקובייה שאורך מקצועה 1, שני אלכסונים של פאות יוצאים מאותו קודקוד. מהי הזווית ביניהם? אם נמקם את הקובייה במערכת הצירים כמו בסרטוט, נקבל $\underline{u} = (1, 1, 0)$ ו- $\underline{v} = (0, 1, 1)$, ולכן:

$$\cos \alpha = \frac{0 + 1 + 0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

ולכן $\alpha = 60^\circ$.

בדיקה בלי נוסחה: הקטע שמחבר את קצות שני האלכסונים הוא אלכסון של פאה שלישית, ולכן גם אורכו $\sqrt{2}$. המשולש שווה-צלעות, וכל זוויתיו 60° .

שימוש 4: אורך ההיטל

מהשוויון $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot p$ שבהוכחה 2 מקבלים את ההיטל של $\underline{v}$ על $\underline{u}$ (עם סימן), ומכאן גם את אורכו:

$$p = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}|} \quad |p| = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{v}|}{|\underline{u}|}$$

לדוגמה, נחשב את ההיטל של $\underline{v} = (2, 3, 6)$ על $\underline{u} = (1, 2, 2)$. כאן $\underline{u} \cdot \underline{v} = 2 + 6 + 12 = 20$ ו- $|\underline{u}| = 3$, ולכן אורך ההיטל הוא $\frac{20}{3}$.

ראו גם: המסמך על מרחק נקודה ממישור – הנוסחה הזאת היא לב ההוכחה שם. ולמציאת וקטור שניצב לשני וקטורים נתונים: המסמך על המכפלה הווקטורית.

⚠ טעות נפוצה

- **המכפלה הסקלרית היא מספר.** $\underline{u} \cdot \underline{v}$ אינו וקטור. " $(x_1 x_2, y_1 y_2, z_1 z_2)$ " – שגוי: צריך לחבר את שלוש המכפלות.
- **הזווית נמדדת מאותה נקודה.** במשולש ABC , הזווית $\angle B$ היא הזווית בין $\underline{BA}$ ל- $\underline{BC}$. מי שמחשב בטעות עם $\underline{AB}$ ו- $\underline{BC}$ מקבל $180^\circ - \angle B$.
- **מכפלה 0 אינה מחייבת וקטור אפס.** במספרים, $ab = 0$ רק אם $a = 0$ או $b = 0$. בווקטורים זה לא כך: $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ גם כששני הווקטורים שונים מווקטור האפס – מספיק שהם ניצבים זה לזה. למשל, $\underline{i} \cdot \underline{j} = 0$.
- **אין "צמצום".** מ- $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w}$ לא נובע ש- $\underline{v} = \underline{w}$. למשל, $\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{i} \cdot \underline{k} = 0$ אבל $\underline{j} \neq \underline{k}$.
- **זווית קהה.** אם יצא $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, אז $\alpha = 120^\circ$ (ולא -60°): הזווית בין וקטורים היא תמיד בין 0° ל- 180° .

הידעתם?

את החשבון הווקטורי שאנחנו לומדים היום, ובו המכפלה הסקלרית והמכפלה הווקטורית, פיתחו בשנות ה-80 של המאה ה-19, כל אחד בנפרד, המדען האמריקאי ג'וזיה וילארד גיבס והפיזיקאי הבריטי אוליבר הביסייד. הסימונים בנקודה ($\underline{u} \cdot \underline{v}$) ובאינסוף ($\underline{u} \times \underline{v}$) באים מגיבס, ומכאן השמות באנגלית: dot product ו-cross product.

שניהם "פירקו" לחלקים כלי מוקדם יותר: הקוורטניונים של המתמטיקאי האירי ויליאם רואן המילטון (1843). גם האותיות $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ לווקטורי היחידה הן מורשת של המילטון – כך הוא סימן את שלוש היחידות ה"דמיוניות" של הקוורטניונים.

7 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

- חשבו את $\underline{u} \cdot \underline{v}$ עבור $\underline{u} = (2, -1, 3)$ ו- $\underline{v} = (4, 5, -1)$. מה אפשר להסיק על הזווית ביניהם?
- מצאו את הזווית בין $\underline{u} = (1, 1, 0)$ ל- $\underline{v} = (-2, 0, 0)$.
- עבור איזה ערך של k הווקטורים $(k, 2, -1)$ ו- $(3, k, 4)$ ניצבים זה לזה?
- הסבירו בעזרת ההגדרה הגאומטרית למה $\underline{j} \cdot \underline{k} = 0$ ו- $\underline{k} \cdot \underline{k} = 1$.
- הסבירו למה תמיד $|\underline{u} \cdot \underline{v}| \leq |\underline{u}| \cdot |\underline{v}|$. מתי מתקיים שוויון?
- מה קורה בהוכחה 1 כש- $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ מקבילים? (זו השאלה מתיבת "עצרו ובדקו").

תשובות

- $\underline{u} \cdot \underline{v} = 8 - 5 - 3 = 0$, ולכן הווקטורים ניצבים: $\alpha = 90^\circ$.
- $\underline{u} \cdot \underline{v} = -2 + 0 + 0 = -2$, $|\underline{u}| = \sqrt{2}$ ו- $|\underline{v}| = 2$, לכן $\cos \alpha = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, ו- $\alpha = 135^\circ$.
- $3k + 2k - 4 = 0$, ולכן $k = \frac{4}{5}$.
- $\underline{j} \cdot \underline{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0$ ולכן $\underline{k} \cdot \underline{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0$, ולכן $\underline{k} \cdot \underline{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1$.
- $|\underline{u} \cdot \underline{v}| = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot |\cos \alpha|$, ותמיד $|\cos \alpha| \leq 1$. שוויון מתקבל כש- $|\cos \alpha| = 1$, כלומר $\alpha = 0^\circ$ או $\alpha = 180^\circ$. כשהווקטורים מקבילים (או כשאחד מהם הוא וקטור האפס).
- אם $\alpha = 0^\circ$, הנקודות A ו- B נמצאות על אותה קרן מ- O , ו- $|\underline{u} - \underline{v}| = ||\underline{u}| - |\underline{v}||$. אגף ימין של צעד 1 הוא $|\underline{u} - \underline{v}|^2 = (|\underline{u}| - |\underline{v}|)^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 - 2|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|$, וזה בדיוק $|\underline{u} - \underline{v}|^2$. אם $\alpha = 180^\circ$, הנקודות משני צדי O , ו- $|\underline{u} - \underline{v}| = |\underline{u}| + |\underline{v}|$, ואגף ימין הוא $(|\underline{u}| + |\underline{v}|)^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 + 2|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|$, שוב בדיוק $|\underline{u} - \underline{v}|^2$. כלומר צעד 1 נכון גם בלי משולש, ושאר ההוכחה לא משתנה.