

משוואת ההיפרבולה

כשהפרש המרחקים קבוע: מהגדרה גאומטרית אל המשוואה – בשתי דרכים

כ־15 דקות קריאה

2 הוכחות

מקומות גאומטריים

5 יח"ל

כיתה י"ב

מה כדאי לדעת קודם

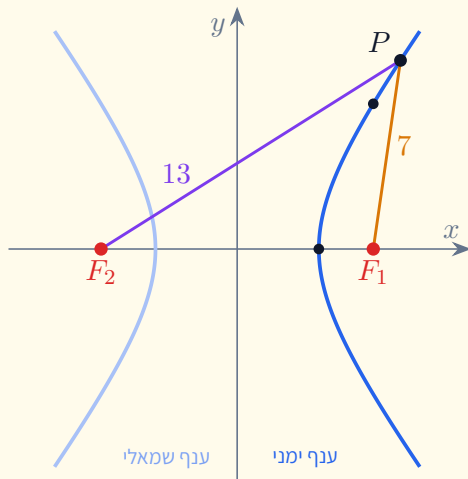
- נוסחת המרחק בין שתי נקודות.
- נוסחאות הכפל המקוצר.
- ערך מוחלט.
- פתרון משוואות עם שורשים.
- מומלץ: משוואת האליפסה.

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: שתי עמדות האזנה, פיצוץ אחד – ועקומה שלמה של מקומות אפשריים.
- הוכחה 1: מבודדים שורש ומעלים בריבוע – פעמיים.
- הוכחה 2: "הסכום וההפרש" – דרך שנותנת בחינם גם את המרחקים מהמוקדים.
- הכיוון ההפוך, האסימפטוטות והשוואה לאליפסה.
- דוגמאות, טעויות נפוצות ושאלות לבדיקה עצמית.

1 האינטואיציה: הפרש קבוע בין שני מרחקים

האינטואיציה



סרטוט 1: בענף הימני המרחק מ- F_2 גדול ב-6 מהמרחק מ- F_1 .

דמיינו שתי עמדות האזנה, F_1 ו- F_2 , במרחק 10 קילומטרים זו מזו. בלילה מתפוצץ זיקוק. העמדה F_1 שומעת את הפיצוץ 18 שניות לפני העמדה F_2 . הקול עובר כשליש קילומטר בשנייה, ולכן הזיקוק רחוק מ- F_2 ב-6 ק"מ יותר מאשר מ- F_1 . איפה הוא התפוצץ?

אין תשובה אחת. הזיקוק יכול להיות במרחק 2 ק"מ מ- F_1 ו-8 ק"מ מ- F_2 , או 7 ק"מ מ- F_1 ו-13 ק"מ מ- F_2 , או 12 ו-18, וכן הלאה. כל המקומות האלה יחד יוצרים עקומה פתוחה שמתעקלת סביב F_1 : **ענף של היפרבולה**. המקומות שקרובים ל- F_2 ב-6 ק"מ יותר מאשר ל- F_1 יוצרים ענף שני, תמונת ראי של הראשון. שתי העמדות הן **המוקדים** של ההיפרבולה.

דוגמה מספרית קטנה

נשים את העמדות על ציר ה- x , בנקודות $F_1(5, 0)$ ו- $F_2(-5, 0)$ (היחידות הן קילומטרים). הנה כמה נקודות של הענף הימני:

הנקודה	$(3, 0)$	$(5, \frac{16}{3})$	$(6, 4\sqrt{3})$	$(9, 8\sqrt{2})$
המרחק מ- F_1	2	$\frac{16}{3}$	7	12
המרחק מ- F_2	8	$\frac{34}{3}$	13	18
ההפרש	6	6	6	6

למשל, עבור $(6, 4\sqrt{3})$: המרחק מ- F_1 הוא $\sqrt{1^2 + 48} = 7$, והמרחק מ- F_2 הוא $\sqrt{11^2 + 48} = 13$. כל הנקודות האלה מקיימות את המשוואה $1 = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}$ ובהמשך נוכיח שזה לא מקרי.

2 ההגדרה והמשפט

היפרבולה היא המקום הגאומטרי של כל הנקודות במישור שההפרש בין מרחקיהן משתי נקודות קבועות הוא קבוע (בערך מוחלט). שתי הנקודות הקבועות נקראות **מוקדי ההיפרבולה**.

נמקם את מערכת הצירים כך שהמוקדים יהיו על ציר ה- x , סימטריים ביחס לראשית: $F_1(c, 0)$ מימין ו- $F_2(-c, 0)$ משמאל ($c > 0$). את ההפרש הקבוע נסמן ב- $2a$ ($a > 0$). לנקודה $P(x, y)$ נסמן $d_1 = PF_1$ ו- $d_2 = PF_2$. לפי ההגדרה, נמצאת על ההיפרבולה בדיוק כאשר

$$|d_1 - d_2| = 2a.$$

למה חייב להתקיים $a < c$? בכל משולש ההפרש בין שתי צלעות קטן מהצלע השלישית, ולכן במשולש PF_1F_2 מתקיים $|d_1 - d_2| < F_1F_2 = 2c$. גם כש- P נמצאת על ציר ה- x אין משולש, ההפרש לא עולה על $2c$. לכן אם $a > c$ אין אף נקודה שמקיימת את ההגדרה, ואם $a = c$ מתקבלות רק שתי קרניים על ציר ה- x (ראו שאלה 5 בסוף). ההיפרבולה "אמיתית" מתקבלת רק כש- $a < c$.

משוואת ההיפרבולה

ההיפרבולה שמוקדיה $F_1(c, 0)$ ו- $F_2(-c, 0)$, והפרש המרחקים בה הוא $2a$ (כאשר $0 < a < c$), היא בדיוק אוסף הנקודות שמקיימות

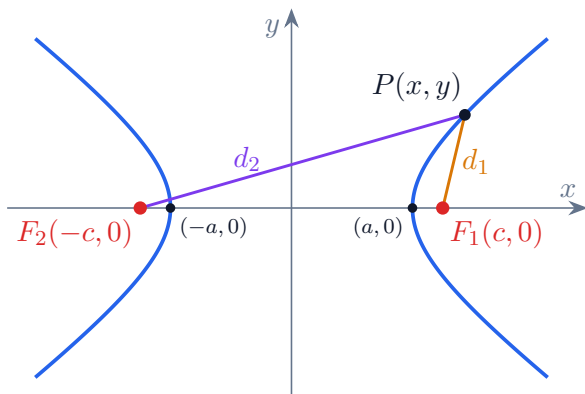
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

כאשר b הוא המספר החיובי שמקיים $b^2 = c^2 - a^2$.

במילים: כמו במשוואת האליפסה, אבל עם **מינוס** בין השברים: x^2 חלקי a^2 , פחות y^2 חלקי b^2 , שווה ל-1. והקשר בין שלושת המספרים: $c^2 = a^2 + b^2$.

מה אומרים המספרים?

- a – המרחק מהמרכז לכל אחד משני הקודקים $(\pm a, 0)$, הנקודות שבהן ההיפרבולה חותכת את ציר ה- x .
- c – המרחק מהמרכז לכל אחד מהמוקדים. המוקדים רחוקים מהמרכז יותר מהקודקים, כי $c > a$.
- b – מוגדר בעזרת $b^2 = c^2 - a^2$. המשמעות הגאומטרית שלו תגלה בסעיף על האסימפטוטות.



סרטוט 2: המוקדים, הקודקים ונקודה כללית P .

במשפט יש **שני כיוונים**: כל נקודה של ההיפרבולה מקיימת את המשוואה (הוכחות 1 ו-2), וכל נקודה שמקיימת את המשוואה נמצאת על ההיפרבולה (סעיף 6).

3 הוכחה 1: מבודדים שורש ומעלים בריבוע – פעמיים

הרעיון נכתוב את שני המרחקים בעזרת נוסחת המרחק, ונקבל משוואה עם שני שורשים. נבודד שורש אחד ונעלה בריבוע; אחר כך נחזור על אותו טריק עם השורש שנשאר. לפי נוסחת המרחק בין שתי נקודות:

$$d_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad d_2 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

את התנאי $|d_1 - d_2| = 2a$ נכתוב בלי ערך מוחלט: $d_2 - d_1 = \pm 2a$. הסימן $+$ מתאים לנקודות שקרובות יותר ל- F_1 (הענף הימני), והסימן $-$ לנקודות שקרובות יותר ל- F_2 (הענף השמאלי). נטפל בשני הענפים יחד.

נימוק	טענה
מההגדרה; בידוד השורש של d_2	① $\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \pm 2a$
העלאה בריבוע: $(u \pm v)^2 = u^2 \pm 2uv + v^2$	② $(x + c)^2 + y^2 = (x - c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + 4a^2$
העברת $(x - c)^2$ לאגף שמאל; y^2 מצטמצם	③ $(x + c)^2 - (x - c)^2 = \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + 4a^2$
$(x + c)^2 - (x - c)^2 = 4cx$; העברת $4a^2$ לאגף שמאל	④ $4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$
חילוק ב-4. נשאר שורש אחד	⑤ $cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$
העלאה שנייה בריבוע; הסימן $\pm$ נעלם	⑥ $(cx - a^2)^2 = a^2[(x - c)^2 + y^2]$
פתיחת סוגריים בשני האגפים	⑦ $c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$

צמצום $-2a^2cx$ והעברת אגפים

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \quad (8)$$

הוצאת גורם משותף

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad (9)$$

$c > a$, כי $b^2 = c^2 - a^2 > 0$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad (10)$$

חילוק ב- $a^2b^2 \neq 0$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (11)$$

מש"ל – כיוון ראשון

שימו לב לצעד 6: אחרי ההעלאה השנייה בריבוע שני הענפים "מתאחדים" – שני הסימנים מובילים לאותה משוואה. זה לא מפתיע: ההיפרבולה סימטרית ביחס לציר ה- y , ולכן משוואה אחת מתארת את שני הענפים.

✓ עצרו ובדקו

בצעדים 2 ו-6 העלינו בריבוע, והעלאה בריבוע עלולה להוסיף פתרונות "זרים". תנו דוגמה פשוטה למשוואה שנוסף לה פתרון זר אחרי העלאה בריבוע. מה זה אומר על מה שהוכחנו עד עכשיו?

4 הוכחה 2: הסכום וההפרש

הרעיון במקום להיאבק בשורשים, נחסר את **ריבועי** המרחקים. ההפרש $d_2^2 - d_1^2$ יוצא פשוט להפליא, ובעזרת הפרש ריבועים נמצא את d_1 ואת d_2 עצמם – ומשם הדרך למשוואה קצרה.

נתחיל בענף הימני, שבו $d_2 - d_1 = 2a$.

נימוק	טענה
נוסחת המרחק; y^2 מצטמצם	$d_2^2 - d_1^2 = (x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2 = 4cx \quad (1)$
הפרש ריבועים: $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$	$(d_2 - d_1)(d_2 + d_1) = 4cx \quad (2)$
הצבת $d_2 - d_1 = 2a$ וחילוק ב- $2a$	$d_2 + d_1 = \frac{2cx}{a}$ ולכן $2a(d_2 + d_1) = 4cx \quad (3)$
מהסכום ומההפרש: חיבור או חיסור, וחילוק ב-2	$d_1 = \frac{cx}{a} - a, d_2 = \frac{cx}{a} + a \quad (4)$
בשתי דרכים: נוסחת המרחק, וצעד 4	$(x-c)^2 + y^2 = \left(\frac{cx}{a} - a\right)^2 \quad (5)$
פתיחת סוגריים	$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2 \quad (6)$
צמצום $-2cx$ והעברת אגפים	$\frac{c^2x^2}{a^2} - x^2 - y^2 = c^2 - a^2 \quad (7)$

הוצאת x^2 כגורם משותף

$$\frac{c^2 - a^2}{a^2} x^2 - y^2 = c^2 - a^2 \quad (8)$$

הצבת $b^2 = c^2 - a^2$ וחילוק ב- b^2

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

מש"ל – כיוון ראשון

ומה עם הענף השמאלי? שם $d_2 - d_1 = -2a$, ואותו חישוב נותן

$$d_2 + d_1 = -\frac{2cx}{a}, \quad d_1 = a - \frac{cx}{a}, \quad d_2 = -\frac{cx}{a} - a.$$

בצעד 5 מעלים את d_1 בריבוע. הביטויים $a - \frac{cx}{a}$ ו- $\frac{cx}{a} - a$ נגדיים, ולכן הריבועים שלהם שווים – ומגיעים לאותה משוואה בדיוק.

מה קיבלנו בחינם

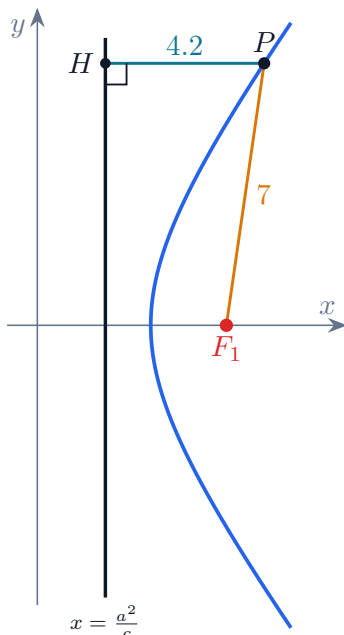
הוכחה 2 נתנה יותר ממשוואה: היא נתנה נוסחאות פשוטות, בלי שורשים, למרחקים מהמוקדים. בענף הימני

$$d_1 = PF_1 = \frac{c}{a}x - a, \quad d_2 = PF_2 = \frac{c}{a}x + a.$$

המספר $e = \frac{c}{a}$ נקרא **האקסצנטריות** של ההיפרבולה. מכיון ש- $c > a$, תמיד $e > 1$. נבדוק עם הדוגמה מסעיף 1, שבה $a = 3$, $c = 5$ ולכן $e = \frac{5}{3}$. בנקודה $(6, 4\sqrt{3})$ מקבלים בדיוק את המספרים שבטבלה:

$$d_1 = \frac{5}{3} \cdot 6 - 3 = 7, \quad d_2 = \frac{5}{3} \cdot 6 + 3 = 13.$$

להעמקה: המדריך – הקשר לפרבולה



את הנוסחה של d_1 אפשר לכתוב כך:

$$d_1 = \frac{c}{a}x - a = \frac{c}{a} \left(x - \frac{a^2}{c} \right).$$

הביטוי $x - \frac{a^2}{c}$ הוא בדיוק המרחק של P מהישר האנכי $x = \frac{a^2}{c}$ (בענף הימני $x \geq a > \frac{a^2}{c}$). אם H הוא עקב האנך מ- P לישר הזה, אז

$$PF_1 = e \cdot PH.$$

הישר $x = \frac{a^2}{c}$ נקרא **המדריך** של המוקד F_1 . בפרבולה המרחק מהמוקד **שווה** למרחק מהמדריך ($e = 1$); בהיפרבולה הוא **גדול** ממנו פי $e > 1$; ובאליפסה – **קטן** ממנו ($e < 1$). שלוש העקומות הן בנות של אותה משפחה.

בדוגמה המדריך הוא $x = \frac{9}{5} = 1.8$, ובנקודה $P(6, 4\sqrt{3})$:

סרטוט 3: $PF_1 = e \cdot PH$, כאשר $e = \frac{5}{3}$.

$$PH = 6 - 1.8 = 4.2, \quad e \cdot PH = \frac{5}{3} \cdot 4.2 = 7 = PF_1.$$

5 שתי הדרכים זו מול זו

הוכחה 1: שתי העלאות בריבוע	הוכחה 2: הסכום וההפרש	
הרעיון	לחשב את $d_2^2 - d_1^2$ ולהשתמש בהפרש ריבועים	לבודד שורש ולהעלות בריבוע, פעמיים
העלאות בריבוע	שתיים	אחת
מה עוד מקבלים	—	נוסחאות למרחקים מהמוקדים, ומהן המדריך
היתרון	שיטה כללית: מתאימה גם לאליפסה ולכל משוואה עם שני שורשים	קצרה, ומסבירה למה החישוב מסתדר כל כך יפה

6 הכיוון ההפוך: מהמשוואה אל ההגדרה

עד עכשיו הוכחנו: אם P נמצאת על ההיפרבולה, היא מקיימת את המשוואה. בדרך העלינו בריבוע, וזה עלול להוסיף פתרונות "זרים". נוכיח שאין כאן כאלה: כל נקודה (x, y) שמקיימת את המשוואה באמת מקיימת $|d_1 - d_2| = 2a$. נבודד את y^2 מהמשוואה, ונשתמש ב- $b^2 = c^2 - a^2$:

$$y^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{c^2 x^2}{a^2} - c^2 - x^2 + a^2.$$

נציב בנוסחת המרחק:

$$\begin{aligned} d_1^2 &= (x - c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} - c^2 - x^2 + a^2 \\ &= \frac{c^2 x^2}{a^2} - 2cx + a^2 = \left(\frac{cx}{a} - a \right)^2. \end{aligned}$$

באותו אופן (רק $-2cx$ מתחלף ב- $+2cx$) מקבלים $d_2^2 = \left(\frac{cx}{a} + a \right)^2$. עכשיו צריך להוציא שורש. תזכורת: $\sqrt{u^2} = |u|$, כלומר $\sqrt{u^2} = u$ כש- $u \geq 0$ ו- $\sqrt{u^2} = -u$ כש- $u < 0$. לכן חשוב לדעת את הסימן של מה שבתוך הסוגריים.

נימוק	טענה
מהמשוואה: $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$	$ x \geq a$ ①
כפל ב- $\frac{c}{a} > 0$	אם $x \geq a$ אז $\frac{cx}{a} \geq c > a$ ②
הביטויים בסוגריים חיוביים	$d_2 = \frac{cx}{a} + a$ ו- $d_1 = \frac{cx}{a} - a$ ולכן $d_2 - d_1 = 2a$ ③
באותו אופן	אם $x \leq -a$ אז $\frac{cx}{a} \leq -c < -a$ ④
הביטויים בסוגריים שליליים	$d_2 = -\frac{cx}{a} - a$ ו- $d_1 = a - \frac{cx}{a}$ ולכן $d_2 - d_1 = -2a$ ⑤

בשני המקרים $|d_1 - d_2| = 2a$, כלומר P נמצאת על ההיפרבולה.

מש"ל – כיוון שני

בדרך גילינו עוד עובדה: $|x| \geq a$. בין הישרים $x = a$ ו- $x = -a$ אין אף נקודה של ההיפרבולה, ולכן היא באמת בנויה משני ענפים נפרדים – ימני ($x \geq a$) ושמאלי ($x \leq -a$).

7 האסימפטוטות: הישרים שההיפרבולה רודפת אחריהם

נבודד את y מהמשוואה: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$. כש- x גדול מאוד, a^2 זניח לעומת x^2 , ולכן $\sqrt{x^2 - a^2} \approx x$. כלומר, הרחק מהמרכז ההיפרבולה "נצמדת" לשני הישרים

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

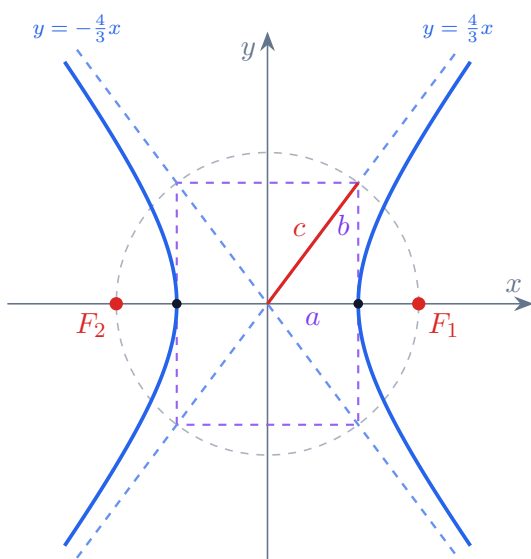
הישרים האלה נקראים **האסימפטוטות** של ההיפרבולה.

כמה קרובה ההיפרבולה לאסימפטוטה? ברביע הראשון נמדוד את הפער האנכי בין הישר לעקומה, ונכפול ונחלק בביטוי הצמוד:

$$\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a} \cdot \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

הפער **חיובי** תמיד. כש- $x > a$ המכנה גדול מ- x , ולכן הפער גם **קטן מ- $\frac{ab}{x}$** : ככל ש- x גדל, הפער שואף ל-0. למשל, בהיפרבולה מסעיף 1 ($b = 4, a = 3$), עם האסימפטוטה $y = \frac{4}{3}x$:

x	3	6	30	300
הישר $\frac{4}{3}x$	4	8	40	400
העקומה $\frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}$	0	≈ 6.93	≈ 39.80	≈ 399.98
הפער	4	≈ 1.07	≈ 0.20	≈ 0.02



סרטוט 4: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$: המלבן, האסימפטוטות והמעגל שעובר במוקדים.

המלבן של האסימפטוטות. נסרטט מלבן שקודקודיו $(\pm a, \pm b)$. האלכסונים שלו עוברים דרך הראשית בשיפועים $\pm \frac{b}{a}$, ולכן ההמשכים שלהם הם בדיוק האסימפטוטות.

ויש בונוס: חצי האלכסון של המלבן הוא $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. לכן מעגל שמרכזו בראשית ועובר דרך קודקודי המלבן חותך את ציר ה- x בדיוק ב**מוקדים**. ומה המשמעות הגאומטרית של $y = \frac{b}{a}x$? האסימפטוטה של $y = \frac{b}{a}x$ עוברת דרך הנקודה (a, b) , ולכן b הוא הגובה של האסימפטוטה מעל הקודקוד $(a, 0)$. ועוד עובדה יפה (להעמקה): המרחק מכל מוקד לכל אחת מהאסימפטוטות הוא בדיוק b .

מתכון לסרטוט ההיפרבולה:

1. מסרטטים את המלבן $(\pm a, \pm b)$.
2. ממשיכים את האלכסונים – אלה האסימפטוטות.
3. מסמנים את הקודקודים $(\pm a, 0)$.
4. מסרטטים ענפים שמתקרבים לאסימפטוטות.

✓ עצרו ובדקו

האם ההיפרבולה יכולה לחתוך את האסימפטוטה שלה? היעזרו בנוסחת הפער שמצאנו למעלה.

8 מה עושים עם המשפט?

שימוש 1: מהמוקדים אל המשוואה

דוגמה מספרית

המוקדים של היפרבולה הם $(\pm 5, 0)$, והפרש המרחקים הוא 8. מצאו את משוואתה ואת האסימפטוטות. $2a = 8$, ולכן $a = 4$. מ- $c = 5$ נקבל $c^2 = a^2 + b^2 = 25 - 16 = 9$. המשוואה והאסימפטוטות:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1, \quad y = \pm \frac{3}{4}x.$$

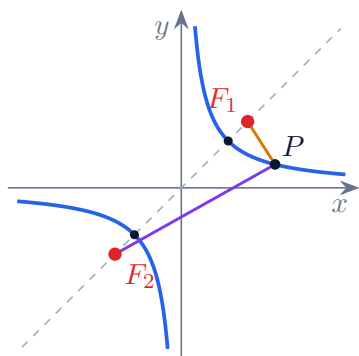
שימוש 2: מהמשוואה אל המוקדים

דוגמה מספרית

מצאו את המוקדים, את הקודקודים ואת האסימפטוטות של $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.
 $a = 2$ ו- $b = 2\sqrt{3}$, ולכן $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 12 = 16$, כלומר $c = 4$.
 • המוקדים: $(\pm 4, 0)$. הקודקודים: $(\pm 2, 0)$.
 • האסימפטוטות: $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{2}x = \pm \sqrt{3}x$.

בדיקה. הנקודה $(4, 6)$ נמצאת על ההיפרבולה, כי $\frac{16}{4} - \frac{36}{12} = 4 - 3 = 1$. המרחקים שלה מהמוקדים הם $\sqrt{0^2 + 6^2} = 6$ ו- $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$, וההפרש הוא $10 - 6 = 4 = 2a$. שימו לב: כאן $b > a$, ובכל זאת המוקדים על ציר ה- x .

שימוש 3: הגרף של $y = \frac{1}{x}$ הוא היפרבולה



סרטוט 5: $y = \frac{1}{x}$ גם כאן
 $PF_2 - PF_1 = 2\sqrt{2}$

הגרף של $y = \frac{1}{x}$ מוכר לכם – וגם השם שלו: "היפרבולה". מתברר שזו באמת היפרבולה במובן של המסמך הזה, רק מסובבת ב- 45° . המוקדים שלה הם $F_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ו- $F_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, הפרש המרחקים בה הוא $2\sqrt{2}$, והאסימפטוטות שלה הן הצירים עצמם.

בדיקה בקודקוד $(1, 1)$: המרחקים שלו מהמוקדים הם

$$\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}, \quad \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = 2 + \sqrt{2},$$

וההפרש הוא $2\sqrt{2}$.

להעמקה: כשמסובבים את מערכת הצירים ב- 45° , המשוואה $xy = 1$ הופכת ל- $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ – היפרבולה עם $a = b = \sqrt{2}$ ו- $c = 2$.

היפרבולה מול אליפסה

היפרבולה	אליפסה	
הפרש המרחקים קבוע: $ d_1 - d_2 = 2a$	סכום המרחקים קבוע: $d_1 + d_2 = 2a$	ההגדרה
$a < c$	$a > c$	a מול c
$b^2 = c^2 - a^2$	$b^2 = a^2 - c^2$	b
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	המשוואה
שני ענפים פתוחים	עקומה סגורה אחת	הצורה
שתי נקודות: $(\pm a, 0)$; את ציר ה- y אינה חותכת	ארבע נקודות: $(\pm a, 0)$ ו- $(0, \pm b)$	חיתוך עם הצירים
$y = \pm \frac{b}{a}x$	אין	אסימפטוטות
$e > 1$	$0 < e < 1$	אקסצנטריות

⚠ טעות נפוצה

- **בלבול בין $b^2 = c^2 - a^2$ ל- $b^2 = a^2 - c^2$.** בהיפרבולה c הוא הגדול מכולם ($c^2 = a^2 + b^2$); באליפסה a הוא הגדול.
- **"המכנה הגדול קובע את הכיוון".** באליפסה כן – בהיפרבולה לא. המוקדים נמצאים על הציר של האיבר החיובי: ב- $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ הם על ציר ה- x .
- **" a הוא המרחק למוקד".** a הוא המרחק מהמרכז לקודקוד. המוקד רחוק יותר, במרחק c .
- **שוכחים את הערך המוחלט.** בלי ערך מוחלט, התנאי $d_2 - d_1 = 2a$ מתאר רק את הענף הימני.
- **אסימפטוטות הפוכות.** ל- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ האסימפטוטות הן $y = \pm \frac{b}{a}x$, ולא $y = \pm \frac{a}{b}x$. דרך בטוחה לזכור: מחליפים את ה-1 ב-0. מ- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ מקבלים בדיוק $y = \pm \frac{b}{a}x$.

🕒 הידעתם?

את ההיפרבולה, יחד עם האליפסה והפרבולה, חקר לעומק המתמטיקאי היווני אפולוניוס מפרגה (בסביבות 200 לפני הספירה) בספרו "חתי חרוט", ושלוש העקומות קיבלו ממנו את שמותיהן. "היפרבולה" פירושו ביוונית "עודף" או "הגזמה" – זאת המילה שממנה בא גם המונח הספרותי "היפרבולה" (גזמה). כל שלוש העקומות מתקבלות כשחותכים חרוט במישור. ההיפרבולה מתקבלת כשהמישור תלול מספיק כדי לחתוך את שני החלקים של חרוט כפול – ומכאן שני הענפים.

היפרבולות מופיעות גם בשמיים: גוף שחולף על פני השמש במהירות גבוהה מספיק, ולא חוזר, נע לאורך ענף של היפרבולה. כך נע, למשל, הגוף אומאומאה, שהתגלה ב-2017 והיה הגוף הראשון שזוהה כמבקר שהגיע מחוץ למערכת השמש. ובמלחמת העולם השנייה פותחו מערכות ניווט רדיו, כמו LORAN, שמיקמו ספינות על היפרבולות – בדיוק לפי הרעיון של עמדות ההאזנה מתחילת המסמך.

9 בדקו את עצמכם

שבע שאלות קצרות

1. המוקדים של היפרבולה הם $(\pm 13, 0)$, והפרש המרחקים הוא 10. מצאו את משוואתה ואת האסימפטוטות.
2. מצאו את המוקדים, את הקודקודים ואת האסימפטוטות של $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.
3. הנקודה $P(9, 8\sqrt{2})$ נמצאת על ההיפרבולה מהשאלה הקודמת. חשבו את PF_1 ואת PF_2 בעזרת הנוסחאות שקיבלנו בהוכחה 2, ובדקו שההפרש הוא $2a$.
4. איפה נמצאים המוקדים של $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$?
5. מה מתקבל אם בהגדרה של ההיפרבולה $a = c$ ומה מתקבל אם $a = 0$?
6. השאלה מתיבת "עצרו ובדקו" שאחרי הוכחה 1: תנו דוגמה לפתרון זר שנוסף בגלל העלאה בריבוע. איך טיפלנו בבעיה הזאת?
7. השאלה מתיבת "עצרו ובדקו" בסעיף האסימפטוטות: האם ההיפרבולה חותכת את האסימפטוטה שלה?

תשובות

1. $a = 5$ ו- $c = 13$, ולכן $b^2 = 169 - 25 = 144$. המשוואה: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$; האסימפטוטות: $y = \pm \frac{12}{5}x$.
2. $a = 3$, $b = 4$, $c = \sqrt{9 + 16} = 5$. המוקדים: $(\pm 5, 0)$; הקודקודים: $(\pm 3, 0)$; האסימפטוטות: $y = \pm \frac{4}{3}x$.
3. $e = \frac{5}{3}$, ולכן $PF_1 = \frac{5}{3} \cdot 9 - 3 = 12$ ו- $PF_2 = \frac{5}{3} \cdot 9 + 3 = 18$. ההפרש: $18 - 12 = 6 = 2a$. בדיקה ישירה: $PF_1 = \sqrt{4^2 + 12^2} = 12$ ו- $PF_2 = \sqrt{14^2 + 12^2} = 18$.
4. האיבר החיובי הוא של y , ולכן המוקדים על ציר ה- y . כאן $c = \sqrt{9 + 16} = 5$, והמוקדים הם $(0, \pm 5)$.
5. אם $a = c$, אז $F_1 F_2 = |d_1 - d_2|$, וזה קורה בדיוק בנקודות של ציר ה- x שבהן $|x| \geq c$ – מתקבלות שתי קרניים שמתחילות במוקדים. אם $a = 0$, אז $d_1 = d_2$ – זה האנך האמצעי של $F_1 F_2$, כלומר ציר ה- y .
6. למשל המשוואה $x = 3$: אחרי העלאה בריבוע מקבלים $x^2 = 9$, שיש לה גם הפתרון הזר $x = -3$. לכן הוכחות 1 ו-2 הראו רק כיוון אחד (מההגדרה אל המשוואה), ובסעיף 6 הוכחנו את הכיוון ההפוך: כל נקודה שמקיימת את המשוואה נמצאת על ההיפרבולה.
7. לא. הפער $\frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$ חיובי תמיד, ולכן ברביע הראשון העקומה נמצאת מתחת לאסימפטוטה $y = \frac{b}{a}x$: היא מתקרבת אליה ולא נוגעת בה. מטעמי סימטריה כך גם בשאר הרביעים. ויש גם בדיקה של שורה אחת: אם נציב $y = \pm \frac{b}{a}x$ במשוואה, נקבל $1 \neq \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$. לכן להיפרבולה ולאסימפטוטות אין אף נקודה משותפת.