

משוואת אליפסה

”סכום מרחקים קבוע” – מחבל של גנן אל המשוואה הקנונית, בשתי דרכים

כ־15 דקות קריאה

2 הוכחות

מקומות גאומטריים

5 יח”ל

כיתה י”ב

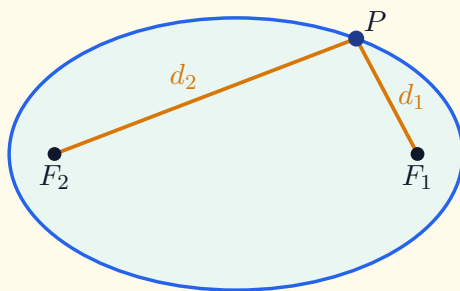
מה כדאי לדעת קודם

- נוסחת המרחק בין שתי נקודות.
- נוסחאות הכפל המקוצר, ובהן $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$.
- משוואת המעגל.
- (לא חובה) $\cos$ ו- $\sin$ במעגל היחידה.

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: איך גנן מסרטט אליפסה בעזרת חבל ושתי יתדות.
- הוכחה 1: מבודדים שורש ומעלים בריבוע – פעמיים.
- הוכחה 2: ”טריק ההפרש” – העלאה בריבוע אחת בלבד.
- הכיוון ההפוך, ונוסחאות פשוטות, בלי שורשים, למרחקים של נקודה מהמוקדים.
- אליפסה כ”מעגל מעוך”, האקסצנטריות, דוגמאות ושאלות.

1 האינטואיציה: הגנן, החבל ושתי היתדות



סרטוט 1: היתדות הן המוקדים F_1 ו- F_2 , והמקל הוא P . החבל מתוח, ולכן $d_1 + d_2$ שווה תמיד לאורך החבל.

האינטואיציה

גנן רוצה ערוגה בצורת אליפסה. הוא נועץ באדמה שתי יתדות, קושר אליהן את שני הקצוות של חבל ארוך, ומותח את החבל בעזרת מקל. עכשיו הוא מסתובב סביב היתדות ומקפיד שהחבל יישאר מתוח כל הזמן. המקל משאיר באדמה קו סגור וחלק – אליפסה.

למה דווקא אליפסה? בכל רגע החבל מורכב משני קטעים: מיתד אחת אל המקל, ומהמקל אל היתד השנייה. אורך החבל לא משתנה, ולכן **סכום שני המרחקים** מהמקל אל היתדות הוא תמיד אותו מספר. זאת בדיוק ההגדרה של אליפסה, והיתדות נקראות **המוקדים** שלה.

ומה אם נועצים את שתי היתדות באותו חור? אז שני הקטעים של החבל שווים, כל אחד מהם הוא חצי מאורך החבל, והמקל מסרטט מעגל. מעגל הוא אליפסה ”מיוחדת”, ששני המוקדים שלה מתלכדים.

דוגמה מספרית קטנה

היתדות במרחק 8 מטרים זו מזו, והחבל באורך 10 מטרים. נשים את היתדות בנקודות $F_1(4, 0)$ ו- $F_2(-4, 0)$, ונבדוק כמה מהנקודות שהמקל עובר בהן:

הנקודה	(5, 0)	(0, 3)	(-5, 0)	(4, 1.8)
$d_1 = PF_1$	1	5	9	1.8
$d_2 = PF_2$	9	5	1	8.2
הסכום	10	10	10	10

הערוגה ארוכה 10 מטרים (מ-5 עד 5) ורחבה 6 מטרים (מ-3 עד 3).

2 ההגדרה והמשפט

אליפסה היא המקום הגאומטרי של כל הנקודות במישור שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות הוא קבוע. שתי הנקודות הקבועות הן **המוקדים** של האליפסה.

כדי שהמשוואה תצא פשוטה, נמקם את מערכת הצירים בצורה נוחה: את המוקדים נשים על ציר ה- x , משני צדי ראשית הצירים ובמרחק שווה ממנה – המוקד הימני $F_1(c, 0)$ והמוקד השמאלי $F_2(-c, 0)$, כאשר $c > 0$. את הסכום הקבוע נסמן ב- $2a$. לכל נקודה $P(x, y)$ נסמן $d_1 = PF_1$ ו- $d_2 = PF_2$. לפי ההגדרה, נמצאת על האליפסה בדיוק כאשר $d_1 + d_2 = 2a$.

למה $a > c$? אם P אינה על הישר F_1F_2 , נוצר משולש PF_1F_2 , ובמשולש סכום של שתי צלעות גדול מהצלע השלישית: $d_1 + d_2 > F_1F_2$, כלומר $2a > 2c$. לכן נניח ש- $a > c$. (אם $a = c$, "האליפסה" מתכווצת לקטע F_1F_2 . עצמו, ואם $a < c$ אין אף נקודה כזאת.) מכאן ש- $a^2 - c^2 > 0$, ואפשר להגדיר מספר חיובי b כך ש- $b^2 = a^2 - c^2$.

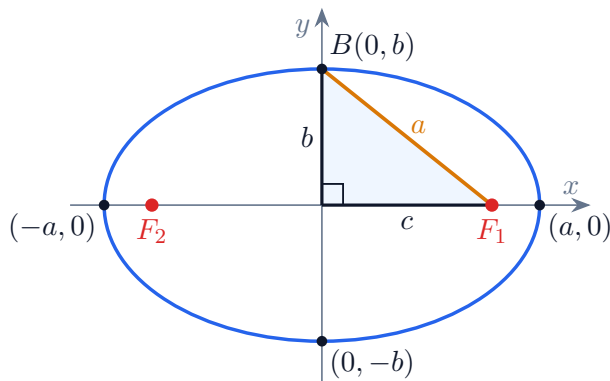
המשוואה הקנונית של האליפסה

יהיו $F_1(c, 0)$ ו- $F_2(-c, 0)$ שני מוקדים, ויהי $a > c > 0$. נגדיר $b > 0$ כך ש- $b^2 = a^2 - c^2$. אוסף כל הנקודות P שמקיימות $PF_1 + PF_2 = 2a$ הוא העקומה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

במילים: מתחת ל- x^2 כתוב הריבוע של חצי האורך של האליפסה, ומתחת ל- y^2 – הריבוע של חצי הרוחב שלה.

מה אומרים המספרים?



סרטוט 2: המשולש $OB F_1$: הניצבים b ו- c , והיתר a .

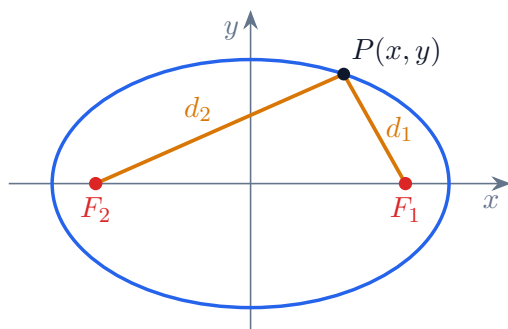
- a – חצי הציר הראשי (הגדול). הציר הראשי הוא הקטע מ- $(-a, 0)$ עד $(a, 0)$. אורכו $2a$. בדיוק הסכום הקבוע.
- b – חצי הציר המשני (הקטן). הציר המשני הוא הקטע מ- $(0, -b)$ עד $(0, b)$, ואורכו $2b$.
- c – חצי המרחק בין המוקדים. המוקדים נמצאים תמיד על הציר הראשי.
- הנקודות $(\pm a, 0)$ ו- $(0, \pm b)$ הן קודקודי האליפסה.

למשל, בקודקוד $(a, 0)$ מתקיים $d_1 = a - c$ ו- $d_2 = a + c$, והסכום הוא $2a$.

מאיפה בא $b^2 = a^2 - c^2$? נסתכל על הנקודה $B(0, b)$. לפי משפט פיתגורס, המרחק שלה מכל אחד מהמוקדים הוא $\sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{a^2} = a$. לכן סכום המרחקים הוא $2a$, ו- B נמצאת על האליפסה – זה הקודקוד העליון. במשולש ישר-הזווית $OB F_1$ הניצבים הם b ו- c , והיתר הוא a . שימו לב: באליפסה a הוא היתר, הגדול מבין שלושת המספרים.

3 הוכחה 1: מבודדים שורש ומעלים בריבוע – פעמיים

הרעיון נכתוב את שני המרחקים בעזרת נוסחת המרחק, ונקבל משוואה עם שני שורשים. כדי להיפטר מהם, נשאיר בכל פעם שורש אחד לבד באגף אחד ונעלה בריבוע. נצטרך לעשות את זה פעמיים.



תהי $P(x, y)$ נקודה על האליפסה. לפי נוסחת המרחק:

$$d_1 = PF_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$d_2 = PF_2 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

ולפי ההגדרה, $d_1 + d_2 = 2a$.

סרטוט 3: d_1 – המרחק מהמוקד הימני $F_1(c, 0)$ ו- d_2 – מהמוקד השמאלי $F_2(-c, 0)$.

נימוק

טענה

$$d_1 + d_2 = 2a \text{ :ההגדרה}$$

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a \quad (1)$$

מעבירים את השורש הראשון לאגף השני

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \quad (2)$$

מעלים בריבוע.
 $(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2 \quad (3)$$

פותרים סוגריים: x^2 ו- y^2 מצטמצמים

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \quad (4)$$

מחלקים ב (-4)	$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ ⑤
מעלים בריבוע פעם שנייה	$(a^2 - cx)^2 = a^2 [(x-c)^2 + y^2]$ ⑥
פותחים סוגריים	$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$ ⑦
מצמצמים את $-2a^2cx$ ומעבירים אגפים	$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$ ⑧
מוציאים גורם משותף	$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ ⑨
$b^2 = a^2 - c^2$	$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ⑩
מחלקים ב a^2b^2 , שאינו אפס	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ⑪

מש"ל

עצרו ובדקו ✓

בצעד 5 אגף ימין הוא $a \cdot d_1$, ולכן הוא אינו שלילי. מכאן שגם $a^2 - cx$ אינו שלילי. בדקו את זה בקודקוד הימני $(a, 0)$: מה ערכו של $a^2 - cx$ שם, ולמה הוא חיובי? מה ערכו של d_1 בנקודה הזאת, והאם שני האגפים בצעד 5 שווים?

הכיוון ההפוך: מהמשוואה אל ההגדרה

העלינו בריבוע פעמיים, וכל העלאה בריבוע עלולה להוסיף פתרונות "זרים". לכן נוכיח גם את הכיוון ההפוך: כל נקודה שמקיימת את המשוואה באמת נמצאת על האליפסה.

תהי $P(x, y)$ נקודה שמקיימת את המשוואה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. מכאן נובע ש- $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$, כלומר $-a \leq x \leq a$, וגם ש- $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. נחשב את d_1^2 , ונציב בו את y^2 ואת $b^2 = a^2 - c^2$:

$$\begin{aligned} d_1^2 &= (x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + (a^2 - c^2) \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\ &= x^2 - 2cx + c^2 + a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} = a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2. \end{aligned}$$

מכיוון ש- $x \leq a$ ו- $c < a$, מתקיים $\frac{c}{a}x \leq c < a$, ולכן $a - \frac{c}{a}x > 0$, והשורש הוא $d_1 = a - \frac{c}{a}x$. באותו אופן (מחליפים את c ב- $-c$) מקבלים $d_2 = a + \frac{c}{a}x$. לכן $d_1 + d_2 = 2a$, ו- P נמצאת על האליפסה.

מש"ל

בדרך קיבלנו מתנה 🔑

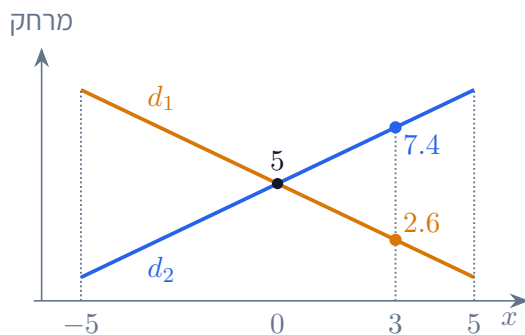
המרחקים של נקודה $P(x, y)$ על האליפסה מהמוקדים הם

$$d_1 = a - \frac{c}{a}x, \quad d_2 = a + \frac{c}{a}x.$$

אלה ביטויים **קויים** ב- x (ממעלה ראשונה), בלי שורשים בכלל! ככל ש- P זזה ימינה, היא מתקרבת למוקד הימני ומתרחקת מהשמאלי באותה מידה. נפגוש את הנוסחאות האלה שוב בהוכחה 2.

4 הוכחה 2: "טריק ההפרש" – העלאה בריבוע אחת בלבד

הרעיון זוכרים את החידה "סכום שני מספרים הוא 10 וההפרש ביניהם הוא 4; מהם המספרים?" (התשובה: $\frac{10+4}{2} = 7$ ו- $\frac{10-4}{2} = 3$). כאן אנחנו יודעים את הסכום $d_1 + d_2 = 2a$. אם נמצא גם את ההפרש $d_2 - d_1$, נדע כל מרחק בנפרד – בלי שורשים. את ההפרש ייתן לנו טריק: ההפרש בין הריבועים $d_2^2 - d_1^2$ פשוט מאוד, כי y^2 ו- c^2 מצטמצמים בו.



בסרטוט רואים את שני המרחקים כפונקציות של x , באליפסה של הגנן ($c = 4, a = 5$). הגרף של כל אחד מהם הוא **קו ישר**: d_1 יורד ו- d_2 עולה באותו קצב, ולכן הסכום שלהם נשאר 10. למשל, ב- $x = 3$ הסכום הוא $2.6 + 7.4 = 10$. ב- $x = 0$ שני המרחקים שווים ל- $a = 5$. ההוכחה תסביר למה זה כך.

סרטוט 4: d_1 ו- d_2 לאורך האליפסה $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

נימוק

טענה

נוסחת המרחק

$$d_2^2 - d_1^2 = [(x + c)^2 + y^2] - [(x - c)^2 + y^2] \quad (1)$$

y^2 מצטמצם,
 $(x + c)^2 - (x - c)^2 = 4cx$

$$d_2^2 - d_1^2 = 4cx \quad (2)$$

הפרש ריבועים:
 $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$

$$(d_2 - d_1)(d_2 + d_1) = 4cx \quad (3)$$

ההגדרה: $d_1 + d_2 = 2a$

$$(d_2 - d_1) \cdot 2a = 4cx \quad (4)$$

מחלקים ב- $2a$

$$d_2 - d_1 = \frac{2c}{a}x \quad (5)$$

הסכום $2a$ וההפרש $\frac{2c}{a}x$: מחברים או מחסרים, ומחלקים ב- 2

$$d_1 = a - \frac{c}{a}x, \quad d_2 = a + \frac{c}{a}x \quad (6)$$

מעלים בריבוע
 $d_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

$$(x - c)^2 + y^2 = \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2 \quad (7)$$

פותחים סוגריים

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2} x^2 \quad (8)$$

מצמצמים את $-2cx$ ומעבירים אגפים

$$\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \quad (9)$$

$$1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}, \text{ ולכן } a^2 - c^2 = b^2$$

$$\frac{b^2}{a^2} x^2 + y^2 = b^2 \quad (10)$$

מחלקים ב- b^2

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (11)$$

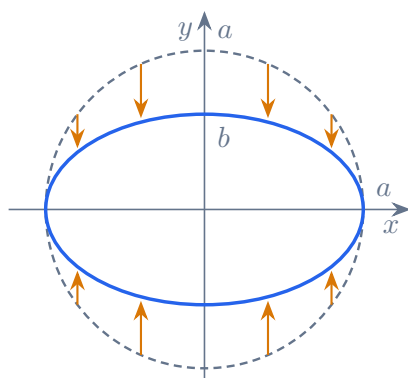
מש"ל

הכיוון ההפוך כבר בידינו: בסוף הוכחה 1 ראינו שכל נקודה על העקומה מקיימת $d_1 = a - \frac{c}{a}x$ ו- $d_2 = a + \frac{c}{a}x$, ולכן $d_1 + d_2 = 2a$.

5 שתי הדרכים זו מול זו

הוכחה 1: שתי העלאות בריבוע	הוכחה 2: טריק ההפרש	
לבודד שורש ולהעלות בריבוע – פעמיים	לחשב את $d_2^2 - d_1^2$ ולמצוא כל מרחק בנפרד	הרעיון
נוסחת המרחק, כפל מקוצר, הרבה אלגברה	נוסחת המרחק, הפרש ריבועים, "סכום והפרש"	הכלים
רק את המשוואה	גם את $d_1 = a - \frac{c}{a}x$ ו- $d_2 = a + \frac{c}{a}x$	מה מקבלים בדרך
שיטה כללית לכל משוואה עם שני שורשים	קצרה, עם העלאה בריבוע אחת בלבד	היתרון

6 מבט נוסף: אליפסה היא מעגל "מעוך"



סרטוט 5: מקווקו: המעגל $x^2 + y^2 = a^2$. כל נקודה זזה אנכית אל האליפסה.

קחו את המעגל $x^2 + y^2 = a^2$ ו"מעכו" אותו לכיוון ציר ה- x : כל נקודה (X, Y) על המעגל עוברת לנקודה $(X, \frac{b}{a}Y)$. שיעור ה- x לא משתנה, ושיעור ה- y מוכפל ב- $\frac{b}{a}$, מספר קטן מ-1. איזו עקומה מתקבלת? נסמן את הנקודה החדשה ב- (x, y) . אז $X = x$ ו- $Y = \frac{a}{b}y$. הנקודה (X, Y) נמצאת על המעגל, ולכן

$$x^2 + \left(\frac{a}{b}y\right)^2 = a^2.$$

נחלק ב- a^2 ונקבל $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ – משוואת האליפסה!

כלומר, כל אליפסה היא מעגל שכיווצו אותו בכיוון אחד. מהרעיון הזה נובעות שתי עובדות יפות:

- **הצגה פרמטרית.** נקודה על המעגל היא $(a \cos t, a \sin t)$, ולכן נקודה על האליפסה היא $(a \cos t, b \sin t)$. ואכן, הצבה במשוואת האליפסה נותנת $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.
- **שטח האליפסה (להעמקה).** כשמכפילים את כל האורכים האנכיים של צורה במספר k , גם השטח שלה מוכפל ב- k , כי כל רצועה אנכית דקה "מתכווצת" באותו יחס. כאן $k = \frac{b}{a}$, ולכן שטח האליפסה הוא $\pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab$. כאשר $a = b$ מקבלים את שטח העיגול, πa^2 .

7 מה עושים עם המשוואה?

שימוש 1: ממוקדים וסכום – אל המשוואה

דוגמה מספרית

מצאו את משוואת האליפסה שמוקדיה $(\pm 4, 0)$, וסכום המרחקים של כל נקודה עליה מהמוקדים הוא 10. $2a = 10$, ולכן $a = 5$. כמו כן $c = 4$, ולכן $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$. המשוואה היא $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. הערוגה של הגנן!

שימוש 2: מהמשוואה – אל הקודקודים והמוקדים

דוגמה מספרית

מצאו את הקודקודים ואת המוקדים של האליפסה $4x^2 + 9y^2 = 36$. כדי שאגף ימין יהיה 1, ונקבל $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. לכן $a = 3$ ו- $b = 2$, והקודקודים הם $(\pm 3, 0)$ ו- $(0, \pm 2)$. בנוסף, $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$, ולכן המוקדים הם $(\pm\sqrt{5}, 0)$.

ואם המכנה הגדול מתחת ל- y^2 ? אם המוקדים על ציר ה- y , בנקודות $(0, \pm c)$, אותו חישוב בדיוק – כשהתפקידים של x ו- y מתחלפים – נותן $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. הכלל: המוקדים נמצאים תמיד על ציר המשתנה שהמכנה שלו גדול יותר.

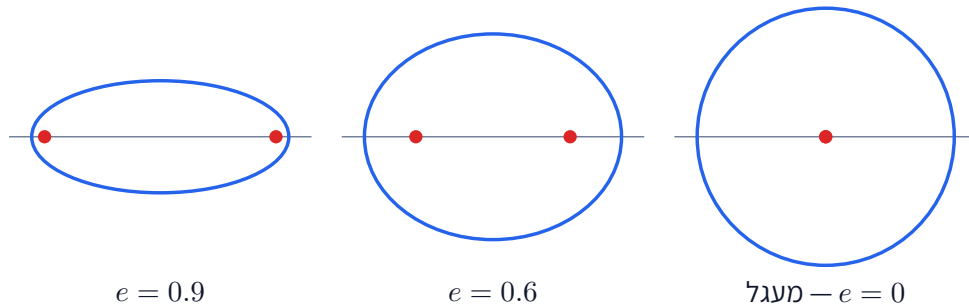
שימוש 3: מרחק ממוקד – בלי שורשים

דוגמה מספרית

על האליפסה $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ נמצאת נקודה P ששיעור ה- x שלה הוא 3. מה המרחקים שלה מהמוקדים? כאן $a = 5$ ו- $c = 4$, ולכן $d_1 = 5 - \frac{4}{5} \cdot 3 = 2.6$ ו- $d_2 = 5 + \frac{4}{5} \cdot 3 = 7.4$. בדיקה: $2.6 + 7.4 = 10 = 2a$. ובדרך הארוכה: $y^2 = 9 \left(1 - \frac{9}{25}\right) = \frac{144}{25}$, ולכן $d_1 = \sqrt{(3-4)^2 + \frac{144}{25}} = \sqrt{6.76} = 2.6$.

עד כמה האליפסה "שטוחה"? האקסצנטריות

המספר $e = \frac{c}{a}$ נקרא **האקסצנטריות** של האליפסה (eccentricity). מכיוון ש- $0 < c < a$, מתקיים $0 < e < 1$. כאשר e קרוב ל-0, המוקדים קרובים למרכז, b כמעט שווה ל- a , והאליפסה כמעט מעגל (במעגל עצמו $c = 0$, ולכן $e = 0$). כאשר e קרוב ל-1, המוקדים קרובים לקודקודים, b קטן, והאליפסה שטוחה. בעזרת e הנוסחאות למרחקים מהמוקדים מתקצרות: $d_1 = a - ex$ ו- $d_2 = a + ex$.



סרטוט 6: אותו a ושלושה ערכים של e . הנקודות האדומות הן המוקדים.

⚠ טעות נפוצה

- **בלבול בין a ו- b .** באליפסה $a^2 = b^2 + c^2$, ו- a הוא הגדול מבין השלושה. מי שכותב $c^2 = a^2 + b^2$ ("כמו בפיתגורס, c הוא היתר") מקבל מוקדים מחוץ לאליפסה.
- **a או $2a$?** הסכום הקבוע הוא $2a$ – אורך הציר הראשי כולו. אם החבל של הגנן באורך 10 מטרים, אז $a = 5$.
- **על איזה ציר המוקדים?** על ציר המשתנה שהמכנה שלו גדול יותר. ב- $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ המוקדים הם $(0, \pm 4)$, ולא $(\pm 4, 0)$.
- **אגף ימין חייב להיות 1.** את $4x^2 + 9y^2 = 36$ מחלקים קודם ב-36, ורק אז קוראים מהמכנים את a^2 ואת b^2 .

🕒 הידעתם?

את המילה "אליפסה" קיבלנו מהמתמטיקאי היווני אפולוניוס מפרגה, שחי בסביבות 200 לפני הספירה. בספרו "חתכי חרוט" הוא חקר את העקומות שמתקבלות כשחותכים חרוט במישור, ונתן להן את השמות אליפסה, פרבולה והיפרבולה. ביוונית, "אליפסה" פירושה "חסר".
ב-1609 פרסם יוהנס קפלר את אחד הגילויים החשובים בתולדות המדע: מסלולו של מאדים סביב השמש הוא אליפסה, והשמש נמצאת באחד המוקדים. בהמשך הכליל קפלר את המסקנה לכל כוכבי הלכת. המסלול של כדור הארץ כמעט עגול (האקסצנטריות שלו כ-0.017), ואילו המסלול של שביט האלי מוארך מאוד: האקסצנטריות שלו כ-0.97.
לאליפסה יש גם תכונת החזרה: קרן שיוצאת ממוקד אחד ופוגעת באליפסה מוחזרת אל המוקד השני. על התכונה הזאת בנויים כמה "אולמות לחישות" אליפטיים: לחישה ליד מוקד אחד נשמעת בהם היטב ליד המוקד השני. עליה בנויים גם מכשירים רפואיים שמרסקים אבנים בכליות: גלי הלם שנוצרים במוקד אחד מתרכזים באבן, שנמצאת במוקד השני.

8 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

1. מצאו את a, b, c , את הקודקודים ואת המוקדים של האליפסה $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.
2. כתבו את משוואת האליפסה שמוקדיה $(\pm 6, 0)$ ואורך הציר הראשי שלה 20.
3. הנקודה P נמצאת על האליפסה $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, והמרחק שלה מהמוקד F_1 הוא 4. מה המרחק שלה מהמוקד F_2 ? מה שיעור ה־ x שלה?
4. לגן יש חבל באורך 10 מטרים, והוא נועץ את היתדות במרחק 6 מטרים זו מזו. מה מידות הערוגה? כתבו את משוואתה.
5. מה יסרטט הגן אם אורך החבל שווה בדיוק למרחק בין היתדות?
6. השאלה מתיבת "עצרו ובדקו" (הקודקוד הימני $(a, 0)$).

תשובות

1. $a = 4, b = \sqrt{7}, c = \sqrt{16 - 7} = 3$. הקודקודים: $(\pm 4, 0)$ ו־ $(0, \pm \sqrt{7})$. המוקדים: $(\pm 3, 0)$.
2. $a = 10, c = 6$ ולכן $b^2 = 100 - 36 = 64$, והמשוואה היא $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.
3. $d_2 = 2a - d_1 = 10 - 4 = 6$. כאן $c = \sqrt{25 - 16} = 3$, ומ־ $\frac{3}{5}x = 4 - d_1 = 5 - \frac{5}{3}$ מקבלים $x = \frac{5}{3}$ (ואז $y = \pm \frac{8\sqrt{2}}{3}$).
4. $2a = 10$ ו־ $2c = 6$, ולכן $a = 5, c = 3$, ו־ $b = \sqrt{25 - 9} = 4$. הערוגה ארוכה 10 מטרים ורחבה 8 מטרים, ומשוואתה $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
5. אז $a = c$: החבל מתוח לאורך הקטע שבין היתדות, והמקל יכול לזוז רק לאורכו. "האליפסה" היא הקטע F_1F_2 (ובנוסחה $b = 0$).
6. בקודקוד $(a, 0)$ מתקיים $0 < a(a - c) = a^2 - cx = a^2 - ca$, כי $a > c$. המרחק מהקודקוד הימני למוקד הימני הוא $d_1 = a - c$, ושני האגפים שווים: $a \cdot d_1 = a(a - c)$.