משוואת הפרבולה והמשיק

מרחק שווה מנקודה ומישר — ומשם, בשתי דרכים, אל המשיק

כיתה י״ב | 5 יח״ל | מקומות גאומטריים | 4 הוכחות | כ־15 דקות קריאה

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: אילו נקודות רחוקות מנקודה בדיוק כמו מישר?
- הוכחה של משוואת הפרבולה $y^2 = 2px$ מתוך ההגדרה — בשני הכיוונים.
- משוואת המשיק $y \cdot y_1 = p(x + x_1)$ בשתי דרכים: בנגזרת ובדיסקרימיננטה.
- בונוס: למה פנסים וצלחות לוויין בנויים כמו פרבולה.
- דוגמאות, טעויות נפוצות ושאלות לבדיקה עצמית.

מה כדאי לדעת קודם

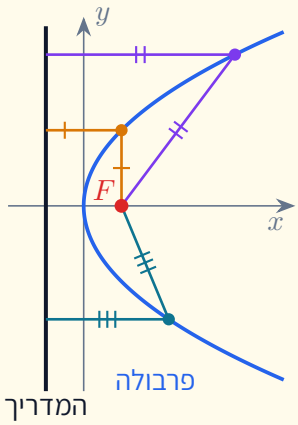
- נוסחת המרחק בין שתי נקודות.
- נוסחאות הכפל המקוצר.
- נגזרת ומשוואת משיק לגרף של פונקציה.
- הדיסקרימיננטה: $\Delta = b^2 - 4ac$.

1 האינטואיציה: עמוד, גדר ומרחקים שווים

האינטואיציה

דמיינו מגרש גדול. לאורך צד אחד שלו עוברת גדר ישרה וארוכה, ובתוך המגרש, כמה מטרים ממנה, נעוץ עמוד. אתם מחפשים את כל המקומות במגרש שבהם אתם רחוקים מהעמוד בדיוק כמו מהגדר (את המרחק מהגדר מודדים בניצב לה).

מקום אחד קל למצוא: באמצע הדרך בין הגדר לעמוד. עכשיו זוזו מעט הצידה, במקביל לגדר. המרחק מהגדר לא השתנה, אבל התרחקתם מהעמוד — ולכן, כדי לאזן, צריך להתרחק גם מהגדר. ככל שזזים יותר הצידה, צריך להתרחק יותר. המקומות שמתקבלים יוצרים עקומה שעוטפת את העמוד ונפתחת הרחק מהגדר: **פרבולה**. העמוד נקרא **המוקד**, והגדר — **המדריך**.



סרטוט 1: קטעים באותו צבע שווים.

דוגמה מספרית קטנה

נשים את המוקד בנקודה $F(1,0)$ ואת המדריך על הישר $x=-1$, כמו בסרטוט. הנה כמה נקודות של הפרבולה:

הנקודה	$(0,0)$	$(1,2)$	$(2.25,-3)$	$(4,4)$	$(9,6)$
המרחק מ־F	1	2	3.25	5	10
המרחק מהמדריך	1	2	3.25	5	10

למשל, עבור הנקודה $(4,4)$: המרחק מ־F הוא $\sqrt{3^2+4^2}=5$, והמרחק מהמדריך הוא $4-(-1)=5$. כל הנקודות האלה מקיימות $y^2=4x$ — ובהמשך נוכיח שזה לא מקרי.

2 ההגדרה והמשפט

פרבולה היא המקום הגאומטרי של כל הנקודות במישור שמרחקן מנקודה קבועה שווה למרחקן מישר קבוע שאינו עובר דרך הנקודה. הנקודה הקבועה נקראת **מוקד הפרבולה**, והישר הקבוע נקרא **המדריך**.

כדי שהמשוואה תצא פשוטה, נמקם את מערכת הצירים בצורה נוחה: ציר ה־x עובר דרך המוקד וניצב למדריך, וראשית הצירים נמצאת באמצע הדרך בין המוקד למדריך. נסמן ב־p את המרחק בין המוקד למדריך ($p>0$). אז המוקד הוא $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, המדריך הוא הישר $x=-\frac{p}{2}$, וראשית הצירים היא **קודקוד הפרבולה**. המספר p נקרא **הפרמטר** של הפרבולה.

משוואת הפרבולה ומשוואת המשיק

משפט 1. המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהמוקד $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ שווה למרחקן מהמדריך $x=-\frac{p}{2}$ הוא העקומה

$$\boxed{y^2=2px}$$

משפט 2. המשיק לפרבולה $y^2=2px$ בנקודה (x_1,y_1) שעליה הוא הישר

$$\boxed{y\cdot y_1=p\,(x+x_1)}$$

במילים: כדי לכתוב את המשיק, "מפצלים" את משוואת הפרבולה: את y^2 כותבים כ־$y\cdot y_1$, ואת $2px$ כותבים כ־$p(x+x_1)$.

משפט 1 כולל שני כיוונים: כל נקודה שמקיימת את ההגדרה מקיימת את המשוואה, וגם להפך. רק שניהם יחד מבטיחים שהמשוואה מתארת את הפרבולה — לא פחות ולא יותר. (בספרים אחדים מסמנים את נקודת ההשקה ב־(x_0,y_0).)

3 משוואת הפרבולה: ההוכחה

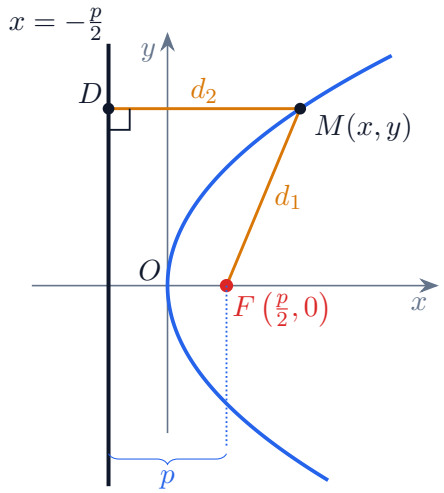
הרעיון נתרגם את ההגדרה — "שני מרחקים שווים" — לשפה של שיעורים: נכתוב כל אחד מהמרחקים בעזרת x ו־y, נשווה ביניהם ונפשט.

כיוון א': מההגדרה אל המשוואה

תהי $M(x,y)$ נקודה כלשהי במישור. נסמן:

- $d_1 = MF$ — המרחק של M מהמוקד;
- d_2 — המרחק של M מהמדריך.

המרחק מנקודה לישר הוא אורך האנך מהנקודה אל הישר. המדריך אנכי, ולכן האנך מ־M אליו אופקי, ועקב כך הוא הנקודה $D\left(-\frac{p}{2},\, y\right)$. לכן $d_2 = MD$.
הנקודה M נמצאת על הפרבולה בדיוק כאשר $d_1 = d_2$.



סרטוט 2: d_1 — המרחק מהמוקד, d_2 — המרחק מהמדריך.

	טענה	נימוק
1	$d_1 = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$	נוסחת המרחק בין $M(x,y)$ ל־$F\left(\frac{p}{2},0\right)$
2	$d_2 = \left\lvert x+\frac{p}{2}\right\rvert$	המרחק בין $M(x,y)$ ל־$D\left(-\frac{p}{2},y\right)$: הפרש שיעורי ה־$x$, בערך מוחלט
3	$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left\lvert x+\frac{p}{2}\right\rvert$	ההגדרה: $d_1 = d_2$
4	$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2$	העלאה בריבוע של שני האגפים, ו־$\lvert t\rvert^2 = t^2$
5	$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$	נוסחאות הכפל המקוצר
6	$y^2 = 2px$	מחסרים x^2 ו־$\frac{p^2}{4}$ משני האגפים, ומעבירים את $-px$ לאגף השני

מש"ל

למה מותר להעלות בריבוע בצעד 4? בדרך כלל העלאה בריבוע עלולה להוסיף פתרונות זרים ($x=-2$ אינו מקיים $x^2=4$, אבל מקיים $x=2$). כאן שני האגפים בצעד 3 אינם שליליים, ושני מספרים אי־שליליים שווים אם ורק אם הריבועים שלהם שווים. לכן אפשר "להפוך" כל צעד, ובעצם הוכחנו גם את הכיוון השני. בכל זאת נבדוק אותו ישירות, כי בדרך נקבל נוסחה שימושית.

כיוון ב׳: מהמשוואה אל ההגדרה

תהי $M(x,y)$ נקודה שמקיימת $y^2=2px$. נראה שהמרחק שלה מהמוקד שווה למרחק שלה מהמדריך. קודם כול, $x=\frac{y^2}{2p}\geq 0$. עכשיו נחשב את MF^2 בנוסחת המרחק, ובמקום y^2 נציב $2px$:

$$MF^2=\left(x-\tfrac{p}{2}\right)^2+y^2=x^2-px+\tfrac{p^2}{4}+2px=x^2+px+\tfrac{p^2}{4}=\left(x+\tfrac{p}{2}\right)^2.$$

כיוון ש־$x\geq 0$, המספר $x+\frac{p}{2}$ חיובי, ולכן $MF=x+\frac{p}{2}$. מצד שני, M נמצאת מימין למדריך ($x\geq 0>-\frac{p}{2}$), ולכן גם $MD=x-\left(-\frac{p}{2}\right)=x+\frac{p}{2}$. כלומר $MF=MD$.

מש״ל ■

שימו לב: לא הנחנו מראש ש־M נמצאת מימין למדריך — זה נובע מהמשוואה (ראינו ש־$x\geq 0$). ובדרך קיבלנו נוסחה שימושית: המרחק של נקודה על הפרבולה מהמוקד הוא $\boxed{MF=x+\frac{p}{2}}$. נשתמש בה בבונוס ובשאלות.

הפרבולה ״העומדת״ והקשר ל־$y=ax^2$

את הפרבולות הראשונות פגשתם כגרפים של פונקציות ריבועיות, כמו $y=x^2$. בפרבולות האלה ציר הסימטריה אנכי. אם נסובב את כל הבנייה — נשים את המוקד על ציר ה־y בנקודה $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ ואת המדריך על הישר $y=-\frac{p}{2}$ — אותו חישוב בדיוק, כשהתפקידים של x ו־y מתחלפים, ייתן $x^2=2py$, כלומר $y=\frac{1}{2p}x^2$.

	פרבולה ״שוכבת״	פרבולה ״עומדת״
המשוואה	$y^2=2px$	$x^2=2py$ (או $y=ax^2$ עם $a=\frac{1}{2p}$)
המוקד	$\left(\frac{p}{2},0\right)$	$\left(0,\frac{p}{2}\right)=\left(0,\frac{1}{4a}\right)$
המדריך	$x=-\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}=-\frac{1}{4a}$
המשיק ב־(x_1,y_1)	$y\cdot y_1=p(x+x_1)$	$x\cdot x_1=p(y+y_1)$

למשל, לפרבולה $y=x^2$ המוקד הוא $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ והמדריך הוא $y=-\frac{1}{4}$. הנוסחאות שכתובות בעזרת a נכונות גם כש־$a<0$: אז הפרבולה פונה כלפי מטה, המוקד מתחת לקודקוד והמדריך מעליו.

4 המשיק, הוכחה 1: בעזרת הנגזרת

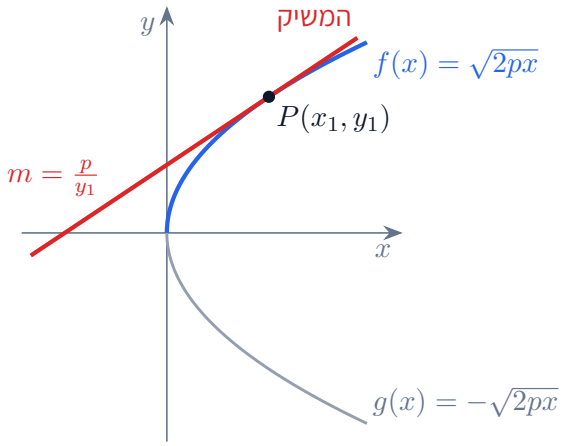
הרעיון השיפוע של משיק לגרף של פונקציה שווה לערך הנגזרת בנקודת ההשקה. הפרבולה $y^2=2px$ אינה גרף של פונקציה (לכל $x>0$ יש עליה שתי נקודות), אבל כל אחד משני החצאים שלה הוא גרף של פונקציה.

נבודד את y ממשוואת הפרבולה:

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

לכן החצי העליון ($y \geq 0$) הוא הגרף של $f(x) = \sqrt{2px}$, והחצי התחתון ($y \leq 0$) הוא הגרף של $g(x) = -\sqrt{2px}$. שתי הפונקציות מוגדרות בתחום $x \geq 0$.

נתחיל בנקודה $P(x_1, y_1)$ שעל החצי העליון, כלומר $y_1 > 0$. אז $x_1 > 0$ ו־$y_1 = \sqrt{2px_1}$.



סרטוט 3: החצי העליון הוא גרף של f, והתחתון — גרף של g.

	טענה	נימוק
1	$f'(x) = \dfrac{2p}{2\sqrt{2px}} = \dfrac{p}{\sqrt{2px}}$	גזירת שורש: $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, בתחום $x > 0$
2	$m = f'(x_1) = \dfrac{p}{\sqrt{2px_1}} = \dfrac{p}{y_1}$	$y_1 = \sqrt{2px_1}$
3	$y - y_1 = \dfrac{p}{y_1}(x - x_1)$	משוואת ישר לפי נקודה ושיפוע
4	$y \cdot y_1 - y_1^2 = px - px_1$	כפל שני האגפים ב־$y_1 \neq 0$
5	$y \cdot y_1 - 2px_1 = px - px_1$	P על הפרבולה, ולכן $y_1^2 = 2px_1$
6	$y \cdot y_1 = px + px_1 = p(x + x_1)$	מעבירים את $-2px_1$ לאגף השני ומוציאים גורם משותף

מש״ל

החצי התחתון ($y_1 < 0$). כאן $g'(x_1) = -\frac{p}{\sqrt{2px_1}}$, אבל גם $y_1 = -\sqrt{2px_1}$, ולכן שוב $g'(x_1) = \frac{p}{y_1}$. ממשיכים כמו בצעדים 3–6, ומקבלים אותה משוואה.

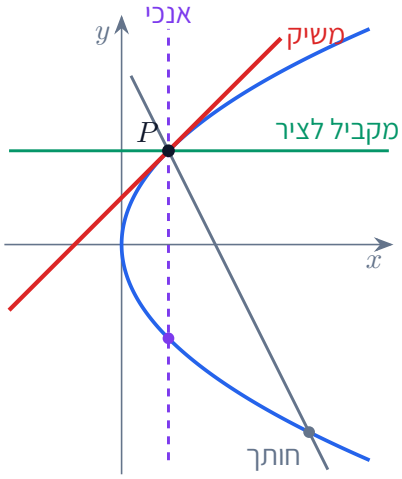
הקודקוד ($y_1 = 0$). שם $\sqrt{2px}$ אינה גזירה: ככל שמתקרבים לקודקוד, הערך המוחלט של השיפוע $\frac{p}{y_1}$ גדל בלי גבול, והמשיקים נעשים כמעט אנכיים. המשיק בקודקוד הוא הישר האנכי $x = 0$ (ציר ה־y), וגם הנוסחה נותנת שם $y \cdot 0 = p(x + 0)$, כלומר $x = 0$. את המקרה הזה נוכיח במדויק בהוכחה 2.

להעמקה: גזירה סתומה

אפשר לקבל את השיפוע בבת אחת, בלי לחלק לחצאים: גוזרים את שני האגפים של $y^2 = 2px$ לפי x, וזוכרים ש־y הוא פונקציה של x (כלל השרשרת). מקבלים $2y \cdot y' = 2p$, כלומר $y' = \frac{p}{y}$ (כש־$y \neq 0$) — אותו שיפוע $\frac{p}{y_1}$ בנקודה (x_1, y_1). השיטה נקראת **גזירה סתומה**.

5 המשיק, הוכחה 2: ישר עם נקודה משותפת אחת

הרעיון בלי נגזרות, ועם הגדרה אחרת של משיק: מבין כל הישרים שעוברים דרך $P(x_1,y_1)$ נחפש את הישר שיש לו עם הפרבולה נקודה משותפת אחת בלבד. כדי לספור נקודות משותפות, נפתור מערכת משוואות ונבדוק את הדיסקרימיננטה.



סרטוט 4: ארבעה ישרים דרך P. רק האדום משיק.

זהירות: "נקודה משותפת אחת" לא מספיקה. במעגל, ישר עם נקודה משותפת אחת הוא תמיד משיק.
בפרבולה — לא: ישר שמקביל לציר הפרבולה פוגש אותה בנקודה אחת בלבד, אבל חותך אותה ונכנס לתוכה (הישר הירוק בסרטוט). לכן **משיק לפרבולה** הוא ישר שיש לו נקודה משותפת אחת עם הפרבולה **ואינו מקביל לציר שלה**.
כל ישר דרך P הוא אנכי, אופקי (מקביל לציר הפרבולה), או ישר ששיפועו $m\neq 0$. נבדוק את שלושת הסוגים.

ישר אנכי, $x=x_1$**.** נציב במשוואת הפרבולה: $y^2=2px_1=y_1^2$, ולכן $y=\pm y_1$. אם $y_1\neq 0$, יש שתי נקודות משותפות, והישר אינו משיק. אם $y_1=0$ (הקודקוד), יש נקודה משותפת אחת: $x=0$ הוא המשיק בקודקוד — בדיוק מה שנותנת הנוסחה.

ישר אופקי, $y=y_1$**.** נציב: $y_1^2=2px$, ולכן $x=\frac{y_1^2}{2p}=x_1$. יש נקודה משותפת אחת, אבל הישר מקביל לציר הפרבולה — ולכן אינו משיק.

ישר ששיפועו $m\neq 0$**.** נבודד את x ממשוואת הישר $y-y_1=m(x-x_1)$ ונציב במשוואת הפרבולה. כל פתרון y נותן נקודה משותפת אחת בדיוק (את x מקבלים מצעד 1), ולכן **מספר הנקודות המשותפות שווה למספר הפתרונות**.

	טענה	נימוק
1	$x=x_1+\dfrac{y-y_1}{m}$	מבודדים את x ממשוואת הישר (מותר, כי $m\neq 0$)
2	$y^2=2px_1+\dfrac{2p}{m}(y-y_1)$	מציבים ב־$y^2=2px$
3	$my^2-2py+(2py_1-my_1^2)=0$	כפל ב־m, והצבת $2px_1=y_1^2$
4	$\Delta=4p^2-4m(2py_1-my_1^2)=4(p-my_1)^2$	הדיסקרימיננטה b^2-4ac של משוואה ריבועית ב־y
5	$\Delta=0 \iff m=\dfrac{p}{y_1}$	ריבוע מתאפס רק כשהבסיס אפס (כאן $y_1\neq 0$)
6	$y-y_1=\dfrac{p}{y_1}(x-x_1) \implies y\cdot y_1=p(x+x_1)$	אותו ישר כמו בהוכחה 1, אף שהגדרת ה"משיק" שם אחרת; הפישוט — כמו בצעדים 4–6 שם

מש"ל ■

בצעד 5 הנחנו $y_1 \neq 0$. בקודקוד ($y_1 = 0$) מתקבל $\Delta = 4p^2 > 0$ לכל m: כל ישר משופע דרך הקודקוד חותך את הפרבולה פעמיים, והמשיק היחיד שם הוא $x = 0$. כך כיסינו את כל הנקודות של הפרבולה.

עצרו ובדקו

הדיסקרימיננטה בצעד 4 יצאה ריבוע שלם, $4(p-my_1)^2$. זה לא מקרי. מהו פתרון אחד של המשוואה בצעד 3 שמובטח לנו מראש, בלי לחשב? מה זה אומר על הפתרון השני?

6 שתי הדרכים זו מול זו

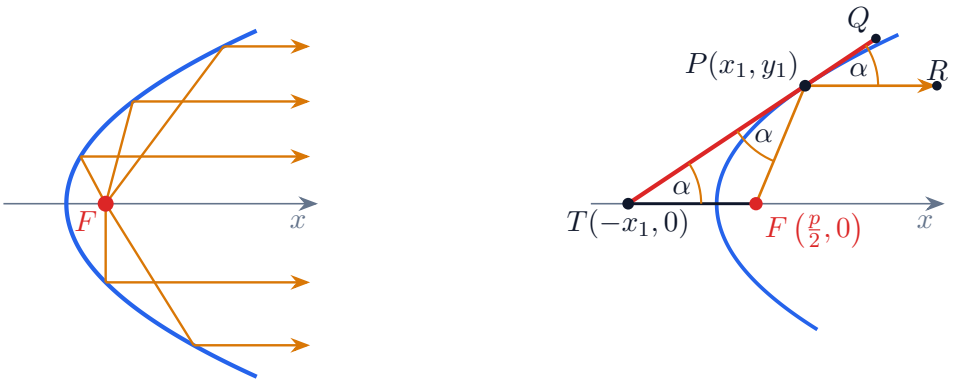
	הוכחה 1: נגזרת	הוכחה 2: נקודה משותפת אחת
הרעיון	שיפוע המשיק הוא ערך הנגזרת	המשיק "נוגע" בפרבולה בנקודה אחת
הכלים	גזירת שורש, משוואת ישר	מערכת משוואות, דיסקרימיננטה
מקרים	חצי עליון, חצי תחתון, קודקוד	ישר אנכי, ישר אופקי, ישר משופע
היתרון	קצרה; מתאימה לכל גרף של פונקציה	בלי נגזרות; מסבירה מה זה "להשיק"

7 בונוס: למה פנסים וצלחות לוויין בנויים כמו פרבולה

מראה מעוקלת מחזירה אור כמו מראה מישורית שמונחת לאורך המשיק בנקודת הפגיעה. לכן לפי חוק ההחזרה, הקרן הפוגעת והקרן המוחזרת יוצרות **זוויות שוות עם המשיק**, משני צדי נקודת הפגיעה.

תכונת ההחזרה של הפרבולה

קרן אור שיוצאת מהמוקד ופוגעת בפרבולה מבפנים מוחזרת **במקביל לציר הפרבולה**. ולהפך: קרניים שמגיעות במקביל לציר ופוגעות בפרבולה מבפנים מוחזרות כולן אל המוקד.



סרטוט 5: משמאל: כל הקרניים שיוצאות מהמוקד מוחזרות במקביל לציר. מימין: ההוכחה.

ההוכחה. תהי $P(x_1, y_1)$ נקודה על הפרבולה שאינה הקודקוד, ונניח $y_1 > 0$ (בחצי התחתון הכול סימטרי). המשיק ב־P חותך את ציר ה־x בנקודה T. נסמן ב־Q נקודה על המשיק מעבר ל־P, וב־R נקודה על הקרן שיוצאת מ־P במקביל לציר, ימינה.

	טענה	נימוק
1	$T(-x_1,\,0)$	מציבים $y=0$ במשוואת המשיק $y\cdot y_1=p(x+x_1)$
2	$FT=\frac{p}{2}-(-x_1)=x_1+\frac{p}{2}=FP$	$FP=x_1+\frac{p}{2}$ לפי הנוסחה $MF=x+\frac{p}{2}$ (פרק 3)
3	$\angle FTP=\angle FPT$	$\triangle TFP$ שווה־שוקיים ($FT=FP$)
4	$\angle RPQ=\angle FTP=\angle FPT$	זוויות מתאימות ($PR\parallel TF$), וצעד 3

מש״ל ■

הקרן הפוגעת FP והקרן PR יוצרות זוויות שוות, α, עם המשיק TQ, משני צדי P — זה בדיוק חוק ההחזרה. לכן הקרן שיוצאת מ־F מוחזרת לאורך PR, במקביל לציר. מסלול של קרן אור הפיך, ולכן גם הכיוון ההפוך נכון. (קרן שיוצאת מ־F לאורך הציר פוגעת בקודקוד וחוזרת לאורך הציר.)

איפה פוגשים את זה? בפנס כיס, או בפנס קלאסי של מכונית, הנורה נמצאת במוקד של מראה פרבולית, והאור יוצא באלומה כמעט מקבילה. (בפנסי מכוניות מודרניים משתמשים גם במראות בצורות מורכבות יותר ובעדשות.) צלחת לוויין פועלת בכיוון ההפוך: האותות מגיעים מרחוק כמעט במקביל, והצלחת מרכזת אותם במוקד, שם נמצא המקלט. (המשטח של פנס או של צלחת מתקבל מסיבוב של פרבולה סביב הציר שלה.)

8 מה עושים עם הנוסחאות?

דוגמה פתורה

א. מצאו את המוקד ואת המדריך של הפרבולה $y^2=8x$. **ב.** מצאו את משוואת המשיק לפרבולה בנקודה $(2,-4)$.

א. משווים ל־$y^2=2px$ ומקבלים $2p=8$, ולכן $p=4$. המוקד הוא $F\left(\frac{p}{2},0\right)=(2,0)$, והמדריך הוא $x=-2$.

ב. קודם בודקים שהנקודה על הפרבולה: $(-4)^2=16=8\cdot 2$. לפי הנוסחה, $y\cdot(-4)=4(x+2)$, כלומר $y=-x-2$.

בדיקה: הצבת $y=-x-2$ במשוואת הפרבולה נותנת $(x+2)^2=8x$, כלומר $(x-2)^2=0$. יש פתרון אחד בלבד, והישר אינו מקביל לציר — ולכן הוא אכן משיק.

טעות נפוצה

- p **או** $2p$**?** ב־$y^2=12x$ המספר 12 הוא $2p$. לכן $p=6$, והמוקד הוא $(3,0)$ — לא $(6,0)$ ולא $(12,0)$.
- **נקודה שאינה על הפרבולה.** הנוסחה $y\cdot y_1=p(x+x_1)$ נכונה רק כש־(x_1,y_1) **על** הפרבולה. בדקו קודם ש־$y_1^2=2px_1$.
- **בלבול בין שתי הצורות.** ב־$x^2=2py$ המוקד הוא $\left(0,\frac{p}{2}\right)$, והמשיק הוא $x\cdot x_1=p(y+y_1)$.

הידעתם?

את הפרבולה, האליפסה וההיפרבולה חקרו היוונים לפני יותר מ־2,000 שנה, כ"חתכי חרוט" — הקווים שמתקבלים כשחותכים חרוט במישור. השמות שלהן מופיעים בספר "חתכי חרוט" של אפולוניוס מפרגה (בערך 200 לפני הספירה). "פרבולה" פירושו ביוונית "הנחת דבר לצד דבר", או "השוואה". את המונח focus (בלטינית "אֶח" — המקום שבו בוערת האש; בעברית: "מוקד") הכניס יוהנס קפלר בתחילת המאה ה־17. השם מתאים: מראה פרבולית שמופנית אל השמש מרכזת את קרני האור במוקד, ושם נעשה חם מאוד.

9 בדקו את עצמכם

חמש שאלות קצרות

1. מצאו את המוקד ואת המדריך של הפרבולה $y^2 = 6x$, ושל הפרבולה $y = 2x^2$.
2. כתבו את משוואת המשיק לפרבולה $y^2 = 4x$ בנקודה $(9, -6)$, ובדקו בעזרת הדיסקרימיננטה שיש לו נקודה משותפת אחת בלבד עם הפרבולה.
3. באיזו נקודה של הפרבולה $y^2 = 8x$ המשיק מקביל לישר $y = 2x + 5$? מהי משוואת המשיק?
4. הנקודה M נמצאת על הפרבולה $y^2 = 10x$, במרחק 7 מהמוקד. מצאו את שיעורי M.
5. למה הדיסקרימיננטה בהוכחה 2 יצאה ריבוע שלם? (זאת השאלה מתיבת "עצרו ובדקו".)

תשובות

1. בפרבולה $y^2 = 6x$ מתקיים $2p = 6$, כלומר $p = 3$: המוקד $(1.5, 0)$ והמדריך $x = -1.5$. בפרבולה $y = 2x^2$ מתקיים $a = 2$, ולכן המוקד $\left(0, \frac{1}{4a}\right) = \left(0, \frac{1}{8}\right)$ והמדריך $y = -\frac{1}{8}$.
2. כאן $p = 2$, והמשיק הוא $-6y = 2(x + 9)$, כלומר $y = -\frac{x}{3} - 3$. הצבת $x = -3y - 9$ במשוואת הפרבולה נותנת $y^2 + 12y + 36 = 0$, ו־$\Delta = 144 - 144 = 0$: פתרון יחיד, $y = -6$.
3. השיפוע בנקודה (x_1, y_1) הוא $\frac{4}{y_1} = \frac{p}{y_1}$. משווים את השיפוע ל־2 ומקבלים $y_1 = 2$, ואז $x_1 = \frac{y_1^2}{8} = \frac{1}{2}$. המשיק: $2y = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)$, כלומר $y = 2x + 1$.
4. $p = 5$, ולכן $MF = x + \frac{p}{2} = x + 2.5 = 7$, ומכאן $x = 4.5$. אז $y^2 = 45$, ולכן $y = \pm 3\sqrt{5}$. יש שתי נקודות: $\left(4.5,\ 3\sqrt{5}\right)$ ו־$\left(4.5,\ -3\sqrt{5}\right)$.
5. P נמצאת גם על הישר וגם על הפרבולה, ולכן $y = y_1$ הוא תמיד פתרון. ואכן:

$$my^2 - 2py + 2py_1 - my_1^2 = (y - y_1)(my + my_1 - 2p),$$

והפתרון השני הוא $y = \frac{2p}{m} - y_1$. שני הפתרונות מתלכדים בדיוק כש־$m = \frac{p}{y_1}$.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את המסמך בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנו קטעים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.