

משוואת המעגל

"כל הנקודות שנמצאות באותו מרחק מהמרכז" – במשוואה אחת, בשלוש דרכים

כ־15 דקות קריאה

3 הוכחות

גאומטריה אנליטית

4-5 יח"ל

כיתות י'-י"ב

מה כדאי לדעת קודם

- שיעורי נקודה במערכת צירים.
- משפט פיתגורס.
- נוסחת המרחק (להוכחה 1).
- נוסחאות הכפל המקוצר.
- להוכחה 3: זווית היקפית ותנאי הניצבות.

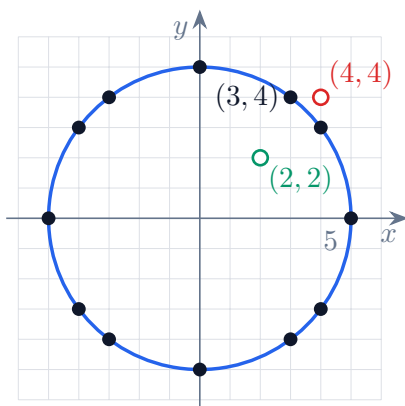
מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: מחוגה, חבל ומשוואה כ"מבחן".
- הוכחה 1: נוסחת המרחק, בשני הכיוונים.
- הוכחה 2: משולש ישר-זווית ומשפט פיתגורס.
- הוכחה 3: זווית ישרה על קוטר – בלי מרחקים.
- הצורה המפותחת והשלמה לריבוע.
- דוגמאות, טעויות נפוצות ושאלות.

1 האינטואיציה: מחוגה וחבל

האינטואיציה

סרטטו מעגל במחוגה. החוד של המחוגה לא זז – זה **המרכז**. העיפרון זז, אבל מרחקו מהחוד קבוע – זה **הרדיוס**. לכן מעגל הוא בדיוק אוסף כל הנקודות שנמצאות באותו מרחק מהמרכז: לא פחות ולא יותר. אותו דבר קורה בחצר: כלב קשור לעמוד בחבל באורך 3 מטרים. כשהוא מותח את החבל עד הסוף ומסתובב סביב העמוד, הוא עובר בדיוק על מעגל שרדיוסו 3 מטרים. בגאומטריה אנליטית רוצים לכתוב את הטענה "המרחק מהמרכז שווה לרדיוס" בשפה של x ו- y . משוואת המעגל היא מעין **מבחן**: נותנים לה נקודה (x, y) , והיא עונה אם הנקודה נמצאת על המעגל. למשל, כדי להגיע מראשית הצירים לנקודה $(3, 4)$ זזים 3 צעדים ימינה ו-4 צעדים למעלה. לפי משפט פיתגורס המרחק שלה מהראשית הוא $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, ולכן היא נמצאת על המעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 5.



סרטוט 1: על המעגל שרדיוסו 5 נמצאות 12 נקודות ששיעוריהן שלמים.

דוגמה מספרית קטנה

נקודה (x, y) נמצאת על המעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 5 בדיוק כאשר $x^2 + y^2 = 25$:

איפה היא?	$x^2 + y^2$	הנקודה
על המעגל	$9 + 16 = 25$	$(3, 4)$
על המעגל	$16 + 9 = 25$	$(-4, 3)$
בתוך המעגל	$4 + 4 = 8$	$(2, 2)$
מחוץ למעגל	$16 + 16 = 32$	$(4, 4)$

2 ההגדרה והמשפט

מעגל הוא המקום הגאומטרי של כל הנקודות במישור שמרחקן מנקודה קבועה שווה למספר חיובי קבוע. הנקודה הקבועה היא **מרכז המעגל**, והמספר הקבוע הוא **הרדיוס**. נסמן את המרכז ב- $M(a, b)$, את הרדיוס ב- R ($R > 0$), ונקודה כלשהי במישור ב- $P(x, y)$.

משוואת המעגל

המעגל שמרכזו $M(a, b)$ ורדיוסו R הוא אוסף כל הנקודות (x, y) שמקיימות

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

ובמקרה הפרטי שבו המרכז נמצא בראשית הצירים:

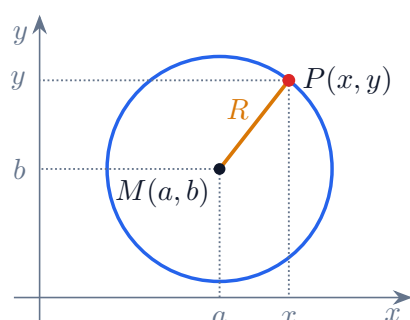
$$x^2 + y^2 = R^2$$

במילים: נקודה נמצאת על המעגל בדיוק כאשר סכום הריבועים של ההפרש האופקי ושל ההפרש האנכי בינה לבין המרכז שווה לריבוע הרדיוס.

במשפט יש שני כיוונים: (1) כל נקודה שעל המעגל מקיימת את המשוואה; (2) כל נקודה שמקיימת את המשוואה נמצאת על המעגל. רק שניהם יחד אומרים שהמשוואה מתארת את המעגל – לא פחות ולא יותר. המשוואה $x^2 + y^2 = R^2$ נקראת לפעמים **המשוואה הקנונית** של המעגל.

3 הוכחה 1: נוסחת המרחק

הרעיון ההגדרה של המעגל מדברת על מרחק, ולמרחק בין שתי נקודות יש נוסחה. נכתוב את ההגדרה בעזרת הנוסחה, ואחר כך ניפטר מהשורש.



סרטוט 2: P על המעגל בדיוק כאשר $MP = R$.

לפי נוסחת המרחק, המרחק בין הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) הוא

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

נשתמש בנוסחה עבור המרכז $M(a, b)$ והנקודה $P(x, y)$.

לפי ההגדרה, נמצאת P על המעגל בדיוק כאשר המרחק שלה מהמרכז שווה לרדיוס, כלומר כאשר $MP = R$.

נימוק

טענה

נוסחת המרחק בין $M(a, b)$ ל- $P(x, y)$

$$MP = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \quad (1)$$

P נמצאת על המעגל (הגדרת המעגל)

$$MP = R \quad (2)$$

הצבה של צעד 1 בצעד 2

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R \quad (3)$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (4)$$

העלאה בריבוע של שני האגפים

מש"ל

הכיוון השני: מהמשוואה אל המעגל

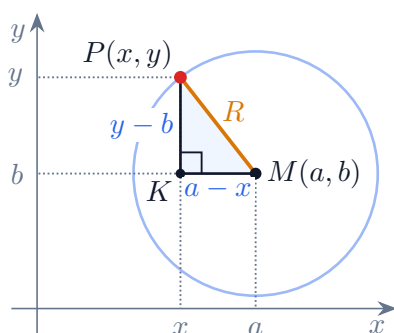
תהי $P(x, y)$ נקודה שמקיימת $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. לפי נוסחת המרחק $MP^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$, כלומר $MP^2 = R^2$. המרחק MP אינו שלילי ו- $R > 0$, ולכן $MP = R$ – הנקודה נמצאת על המעגל.

מש"ל

למה צריך לבדוק את הכיוון השני? העלאה בריבוע עלולה להוסיף פתרונות "זרים": $x = -3$ אינו מקיים את המשוואה $x = 3$, אבל הוא כן מקיים את $x^2 = 9$. אצלנו זה לא קורה, כי שני האגפים בצדד 3 אינם שליליים: שורש ריבועי אינו שלילי, ו- $R > 0$. לשני מספרים אי-שליליים u ו- v מתקיים $u = v$ אם ורק אם $u^2 = v^2$. בדיוק את זה ניצלנו בכיוון השני.

4 הוכחה 2: משולש ישר-זווית ומשפט פיתגורס

הרעיון נבנה משולש ישר-זווית שהרדיוס MP הוא היתר שלו, והניצבים שלו מקבילים לצירים. את אורכי הניצבים נקרא מתוך השיעורים, ואת השאר ייתן משפט פיתגורס. ההוכחה הזאת "פותחת את הקופסה" של נוסחת המרחק ומראה מה קורה בתוכה.



סרטוט 3: כאן P משמאל ל- M , ולכן הניצב האופקי הוא

$$a - x = |x - a|$$

דרך P נעביר ישר מקביל לציר ה- y , ודרך M נעביר ישר מקביל לציר ה- x . הישרים נפגשים בנקודה K . ל- K יש שיעור ה- x של P ושיעור ה- y של M , כלומר $K(x, b)$.

המשולש MKP ישר-זווית ב- K , כי הישרים שהעברנו מקבילים לצירים, והצירים מאונכים זה לזה. בסרטוט, P נמצאת משמאל ל- M ומעליה. שימו לב: במקרה הזה $x - a$ שלילי, ואורך הניצב האופקי הוא $a - x$.

נימוק	טענה
MK מקביל לציר ה- x , ו- KP מקביל לציר ה- y	$\angle MKP = 90^\circ$ (1)
M ו- K על אותו ישר אופקי: הפרש שיעורי ה- x , בערך מוחלט	$MK = x - a $ (2)
K ו- P על אותו ישר אנכי: הפרש שיעורי ה- y , בערך מוחלט	$KP = y - b $ (3)
משפט פיתגורס ב- $\triangle MKP$	$MK^2 + KP^2 = MP^2$ (4)
הצבה של צעדים 2 ו-3, ו- $MP = R$	$ x - a ^2 + y - b ^2 = R^2$ (5)

לכל מספר t מתקיים $|t|^2 = t^2$

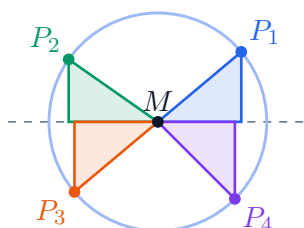
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (6)$$

מש"ל

את הכיוון השני – מהמשוואה אל המעגל – מוכיחים בדיוק כמו בהוכחה 1.

למה הסימן של $x - a$ לא משנה?

הנקודה P יכולה להיות מימין למרכז או משמאלו, מעליו או מתחתיו. ממקום למקום משתנים הסימנים של $x - a$ ושל $y - b$, אבל אורכי הניצבים הם תמיד $|x - a|$ ו- $|y - b|$. אחרי העלאה בריבוע הערך המוחלט כבר לא נחוץ: אם, למשל, $x - a = -3$, אז אורך הניצב הוא 3, ו- $|-3| = 3$, ו- $(-3)^2 = 3^2 = 9$. הריבוע "מוחק" את הסימן.



סרטוט 4: ארבעה מקומות של P – ובכולם אותו משפט פיתגורס.

איפה P ביחס ל- M ?	$x - a$	$y - b$
P_1 : ימינה ולמעלה	+	+
P_2 : שמאלה ולמעלה	-	+
P_3 : שמאלה ולמטה	-	-
P_4 : ימינה ולמטה	+	-

בכל ארבעת המקרים: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

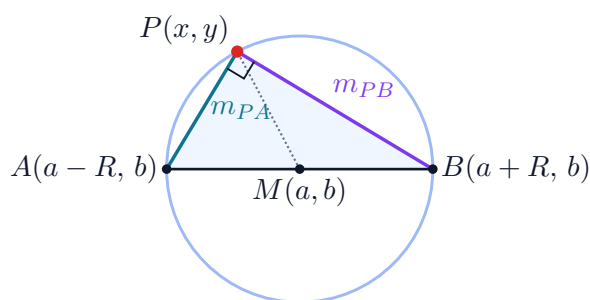
ומה אם אין משולש? אם P נמצאת בדיוק מימין למרכז, כלומר $P(a + R, b)$, הניצב האנכי "מתאפס" והמשולש נעלם. גם אז הנקודה מקיימת את המשוואה: $(a + R - a)^2 + (b - b)^2 = R^2 + 0 = R^2$. אותו דבר קורה בשלוש הנקודות $(a - R, b)$, $(a, b + R)$ ו- $(a, b - R)$. כך כיסינו את כל הנקודות שעל המעגל.

✓ עצרו ובדקו

המרכז הוא $M(2, 1)$, והנקודה היא $P(-1, 5)$. (א) באיזה מארבעת המקומות שבסרטוט 4 נמצאת P ? (ב) מה אורכי הניצבים, ומה הרדיוס? (ג) בדקו ש- P מקיימת את משוואת המעגל.

5 הוכחה 3: זווית ישרה שנשענת על קוטר

הרעיון הפעם לא נמדוד אף מרחק. שני משפטים מהגאומטריה של המעגל מתרגמים את " P על המעגל" ל"זווית ישרה", ואת הזווית הישרה נבדוק בעזרת השיפועים: $m_1 m_2 = -1$.



סרטוט 5: P על המעגל בדיוק כאשר $PA \perp PB$.

יהי AB קוטר של המעגל, ותהי P נקודה במישור, שונה מ- A ומ- B .

- אם P על המעגל, אז $\angle APB = 90^\circ$: **זווית היקפית שנשענת על קוטר היא ישרה**.
- אם $\angle APB = 90^\circ$, אז P על המעגל: במשולש ישר-זווית **התיכון ליתר שווה למחצית היתר**, ולכן $MP = \frac{1}{2}AB = R$.

כלומר P נמצאת על המעגל **אם ורק אם** $PA \perp PB$. וכשהישרים PA ו- PB אינם מקבילים לצירים, לפי תנאי הניצבות זה קורה בדיוק כאשר $m_{PA} \cdot m_{PB} = -1$.

ניקח את הקוטר האופקי: $A(a - R, b)$ ו- $B(a + R, b)$. אם $P(x, y)$ אינה על הישר $y = b$ ואינה על הישרים $x = a \pm R$, אז הישרים PA ו- PB אינם מקבילים לצירים, ומכפלת השיפועים שלהם היא

$$m_{PA} \cdot m_{PB} = \frac{y - b}{x - (a - R)} \cdot \frac{y - b}{x - (a + R)} = \frac{(y - b)^2}{(x - a)^2 - R^2}.$$

(במכנה השתמשנו בכפל המקוצר: $((x - a) + R)((x - a) - R) = (x - a)^2 - R^2$). לכן P נמצאת על המעגל בדיוק כאשר $m_{PA} \cdot m_{PB} = -1$, כלומר כאשר

$$(y - b)^2 = -((x - a)^2 - R^2) \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

והנקודות שנשארו בחוץ? על הישר $y = b$ המעגל פוגש רק את A ואת B , וגם המשוואה נותנת שם $(x - a)^2 = R^2$, כלומר $x = a \pm R$ שוב רק A ו- B . על הישרים $x = a \pm R$ אין עוד נקודות של המעגל (הם משיקים לו ב- A וב- B), וגם המשוואה נותנת שם $(y - b)^2 = 0$, כלומר שוב רק את A ואת B . כך הוכחנו את שני הכיוונים לכל נקודה במישור.

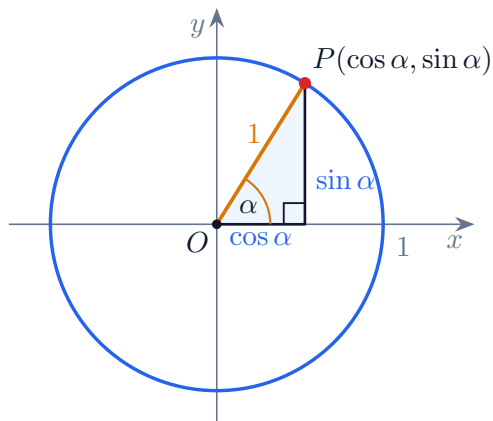
מש"ל ■

6 שלוש הדרכים זו מזו

הוכחה 1: נוסחת המרחק	הוכחה 2: משולש ופיתגורס	הוכחה 3: זווית על קוטר	
לכתוב את $MP = R$ בעזרת הנוסחה	לבנות משולש ישר-זווית שהרדיוס הוא היתר שלו	זווית היקפית שנשענת על קוטר היא ישרה	הרעיון
נוסחת המרחק, העלאה בריבוע	משפט פיתגורס, ערך מוחלט	זווית היקפית, התיכון ליתר, תנאי הניצבות	הכלים
איך מוכיחים את שני הכיוונים	למה הסימנים לא משנים, ומאיפה בא כל ריבוע	שהמשוואה "יודעת" גם את הגאומטריה של המעגל	מה רואים
קצרה – ארבע שורות	לא צריך לזכור את נוסחת המרחק: היא "נבנית" בדרך	בלי מרחקים בכלל – רק זווית ישרה ושיפועים	היתרון

למעשה, הוכחה 2 היא ההוכחה של נוסחת המרחק עצמה, כשאחת הנקודות היא מרכז המעגל. הוכחה 3 שונה באמת: אין בה אף מרחק – רק זווית ישרה ושני שיפועים.

7 מקרה פרטי: המרכז בראשית – ומעגל היחידה



סרטוט 6: במעגל היחידה המשוואה $x^2 + y^2 = 1$ הופכת ל- $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

כשהמרכז נמצא בראשית הצירים, $a = b = 0$, והמשוואה מתקצרת ל- $x^2 + y^2 = R^2$. כאן משפט פיתגורס "גלוי לעין": הניצבים של המשולש הם פשוט $|x|$ ו- $|y|$.
 המעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 1 נקרא **מעגל היחידה**:
 $x^2 + y^2 = 1$. ניקח עליו נקודה P , כך שהרדיוס OP יוצר זווית α עם הכיוון החיובי של ציר ה- x . לפי ההגדרה של הפונקציות הטריגונומטריות, $P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. נציב את P במשוואת המעגל, ונקבל מייד את אחת הזהויות החשובות בטריגונומטריה:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

8 מה עושים עם המשוואה?

שימוש 1: כותבים משוואה של מעגל

דוגמה מספרית

מצאו את משוואת המעגל שמרכזו $M(2, -3)$ והוא עובר דרך הנקודה $A(5, 1)$.
 הרדיוס הוא המרחק MA , ולכן $R^2 = (5 - 2)^2 + (1 - (-3))^2 = 9 + 16 = 25$. לכן המשוואה היא $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$. שימו לב לסימן: $y - (-3) = y + 3$.

שימוש 2: מוצאים מרכז ורדיוס – הצורה המפותחת

אם נפתח את הסוגריים במשוואת המעגל, נקבל $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - R^2) = 0$. כלומר משוואה מהצורה

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

כאשר $D = -2a$, $E = -2b$, ו- $F = a^2 + b^2 - R^2$. במשוואה כזאת המקדמים של x^2 ושל y^2 שווים (שניהם 1), ואין איבר עם xy . השאלה ההפוכה מעניינת יותר: נתונה משוואה מהצורה הזאת – איך מוצאים את המרכז ואת הרדיוס? עושים **השלמה לריבוע**, פעם עבור x ופעם עבור y .

דוגמה מספרית

מצאו את המרכז ואת הרדיוס של המעגל $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.
 נשלם לריבוע בכל משתנה בנפרד: $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$ ו- $y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4$. נציב במשוואה ונקבל $(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 - 12 = 0$, כלומר $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$. לכן המרכז הוא $(3, -2)$ והרדיוס הוא 5.

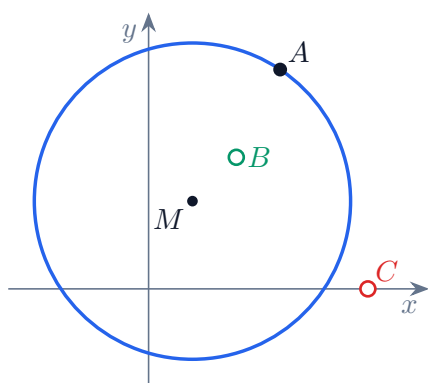
באופן כללי, השלמה לריבוע נותנת $(x + \frac{D}{2})^2 + (y + \frac{E}{2})^2 = k$, כאשר $k = \frac{D^2 + E^2}{4} - F$. יש שלוש אפשרויות:

אגף ימין	מה מתארת המשוואה?
$k > 0$	מעגל שמרכזו $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ ורדיוסו $\sqrt{k}$
$k = 0$	נקודה אחת בלבד: $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$
$k < 0$	אף נקודה: סכום של שני ריבועים אינו יכול להיות שלילי

שתי משוואות שנראות כמו משוואות מעגל

המשוואה $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$ הופכת ל- $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 0$. סכום של שני ריבועים שווה לאפס רק כששניהם אפס, ולכן הפתרון היחיד הוא הנקודה $(-2, 1)$.
 המשוואה $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 10 = 0$ הופכת ל- $(x+2)^2 + (y-1)^2 = -5$. אין אף נקודה שמקיימת אותה.

שימוש 3: בתוך המעגל, עליו או מחוצה לו?



סרטוט 7: A על המעגל, B בתוכו ו-C מחוצה לו.

הביטוי $(x-a)^2 + (y-b)^2$ הוא ריבוע המרחק של הנקודה (x, y) מהמרכז. כדי לדעת איפה הנקודה, משווים אותו ל- R^2 :

• קטן מ- R^2 – הנקודה **בתוך** המעגל;

• שווה ל- R^2 – הנקודה **על** המעגל;

• גדול מ- R^2 – הנקודה **מחוץ** למעגל.

דוגמה: המעגל $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$.

• עבור $A(3, 5)$ מקבלים $4 + 9 = 13$ – על המעגל.

• עבור $B(2, 3)$ מקבלים $1 + 1 = 2 < 13$ – בתוכו.

• עבור $C(5, 0)$ מקבלים $16 + 4 = 20 > 13$ – מחוצה לו.

⚠ טעות נפוצה

- **הסימן של המרכז.** במשוואה $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 16$ המרכז הוא $(-3, 1)$ ולא $(3, 1)$, כי $x+3 = x-(-3)$.
- **רדיוס או רדיוס בריבוע?** באגף ימין כתוב R^2 . במשוואה $(x-1)^2 + y^2 = 9$ הרדיוס הוא 3, לא 9.
- **מקדם שונה מ-1.** את $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 10 = 0$ מחלקים קודם ב-2, ורק אחר כך משלימים לריבוע. ואם המקדמים של x^2 ושל y^2 שונים זה מזה, כמו ב- $x^2 + 4y^2 = 4$, זה בכלל לא מעגל.
- **לא כל משוואה כזאת מתארת מעגל.** את $x^2 + y^2 + 2x + 5 = 0$ אי אפשר לקיים, כי היא שקולה ל- $(x+1)^2 + y^2 = -4$. בסוף ההשלמה לריבוע בדקו תמיד שאגף ימין חיובי.

הידעתם?

את ההגדרה "כל הנקודות שבמרחק שווה ממרכז אחד" אפשר למצוא כבר בספר הראשון של "יסודות" לאוקלידס (בערך 300 לפני הספירה). אבל רק כעבור כמעט אלפיים שנה התחילו לתאר מעגלים – ובכלל קווים – בעזרת משוואות.

במאה ה-17 פיתחו שני מתמטיקאים צרפתים, רנה דקארט ופייר דה פרמה, כל אחד בנפרד, את הרעיון לתאר קווים בעזרת משוואות שמקשרות בין שיעורי הנקודות שעליהם. חיבורו של דקארט, "הגאומטריה", יצא לאור ב-1637 כנספח לספרו "מאמר על המתודה". על שמו – בצורה הלטינית, קרטזיוס – נקראת מערכת הצירים "קרטזית", והתחום כולו נקרא היום גאומטריה אנליטית.

9 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

1. כתבו את משוואת המעגל שמרכזו $(-1, 4)$ ורדיוסו 3.
2. מצאו את המרכז ואת הרדיוס של המעגל $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$.
3. האם הנקודה $(4, -1)$ נמצאת על המעגל $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$, בתוכו או מחוצה לו?
4. לאילו ערכים של k המשוואה $x^2 + y^2 - 4x + 2y + k = 0$ מתארת מעגל? ומה כש- $k = 5$?
5. מצאו את נקודות החיתוך של המעגל $x^2 + y^2 = 25$ עם הישר $y = x + 1$.
6. ענו על השאלה מתיבת "עצרו ובדקו" (המרכז $M(2, 1)$ והנקודה $P(-1, 5)$).

תשובות

1. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$.
2. $(x + 4)^2 - 16 + (y - 5)^2 - 25 + 5 = 0$, כלומר $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 36$: המרכז $(-4, 5)$ והרדיוס 6.
3. $(4 - 1)^2 + (-1 - 3)^2 = 9 + 16 = 25$. הנקודה נמצאת על המעגל.
4. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - k$. המשוואה מתארת מעגל כאשר $k < 5$ (והרדיוס הוא $\sqrt{5 - k}$). כאשר $k = 5$ היא מתארת נקודה אחת, $(2, -1)$, וכאשר $k > 5$ – אף נקודה.
5. נציב $y = x + 1$ ונקבל $x^2 + (x + 1)^2 = 25$, כלומר $2x^2 + 2x - 24 = 0$, ומכאן $x^2 + x - 12 = 0$. לכן $x = 3$ או $x = -4$, ונקודות החיתוך הן $(3, 4)$ ו- $(-4, -3)$.
6. (א) $x - a = -1 - 2 = -3 < 0$ ו- $y - b = 5 - 1 = 4 > 0$, כלומר P נמצאת משמאל ל- M ומעליה, כמו P_2 .
(ב) אורכי הניצבים הם $|-3| = 3$ ו- $|4| = 4$, והרדיוס הוא $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
(ג) $(-1 - 2)^2 + (5 - 1)^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.