

תנאי הניצבות לשני ישרים

למה השיפועים של ישרים מאונכים "הופכיים וגדיים" – בשלוש דרכים

כ־15 דקות קריאה

3 הוכחות

גאומטריה אנליטית

3-5 יח"ל

כיתות י'-י"ב

מה כדאי לדעת קודם

- שיפוע ומשוואת ישר $y = mx + b$
- נוסחת המרחק בין שתי נקודות.
- משפט פיתגורס וההפוך לו.
- להוכחה 3: $\sin, \cos$ ו- $\tan$ של זווית קהה.

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: מסובבים ישר ב־ 90° .
- הוכחה 1: משפט פיתגורס וההפוך לו.
- הוכחה 2: מסובבים את "משולש השיפוע".
- הוכחה 3: השיפוע $\tan$ של זווית הנטייה.
- מקרים חריגים, דוגמאות, טעויות ושאלות.

1 האינטואיציה: מסובבים גרם מדרגות

האינטואיציה

השיפוע של ישר אומר כמה עולים כשמתקדמים צעד אחד ימינה. ישר ששיפועו 2 הוא כמו גרם מדרגות: צעד אחד ימינה – שני צעדים למעלה.

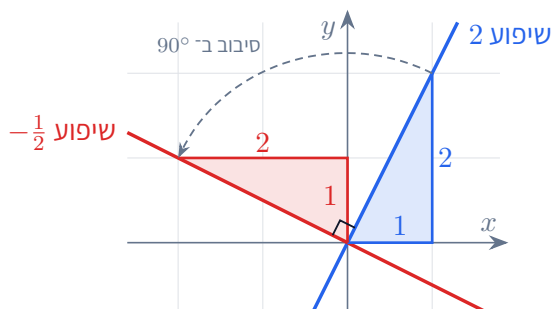
עכשיו נסובב את גרם המדרגות ב־ 90° נגד כיוון השעון. מה שהיה "ימינה" הופך ל"למעלה", ומה שהיה "למעלה" הופך ל"שמאלה". כלומר הצעד "1 ימינה, 2 למעלה" הופך לצעד "2 שמאלה, 1 למעלה". השיפוע של הישר החדש הוא כמה עולים חלקי כמה מתקדמים ימינה: $-\frac{1}{2}$.

שני דברים קרו לשיפוע: ה־2 עבר מהמונה למכנה – השיפוע **התהפך** (מ־2 ל־ $\frac{1}{2}$); והכיוון "שמאלה" הוסיף מינוס – השיפוע נעשה **נגדי**. זה בדיוק תנאי הניצבות: $2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$.

דוגמה מספרית קטנה

לכל שיפוע m_1 , השיפוע של הישר המאונך הוא ההופכי והנגדי שלו. המכפלה יוצאת תמיד -1 :

$m_1 \cdot m_2$	$m_2 = -\frac{1}{m_1}$	m_1
-1	$-\frac{1}{2}$	2
-1	$\frac{1}{3}$	-3
-1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$
-1	-1	1
-1	5	-0.2



סרטוט 1: סיבוב ב־ 90° מעביר את "משולש השיפוע" הכחול למשולש האדום.

2 המשפט

נתונים שני ישרים שאינם מקבילים לצירים, ושיפועיהם m_1 ו- m_2 .

תנאי הניצבות

שני ישרים שאינם מקבילים לצירים מאונכים זה לזה **אם ורק אם**

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

במילים: השיפוע של כל אחד מהם הוא ההופכי והנגדי של השיפוע של השני.

“אם ורק אם” פירושו שיש כאן **שתי** טענות:

1. אם הישרים מאונכים, אז $m_1 m_2 = -1$. בזה משתמשים כדי **למצוא** שיפוע של ישר מאונך.

2. אם $m_1 m_2 = -1$, אז הישרים מאונכים. בזה משתמשים כדי **לבדוק** אם יש זווית ישרה.

נוכיח את שתיהן.

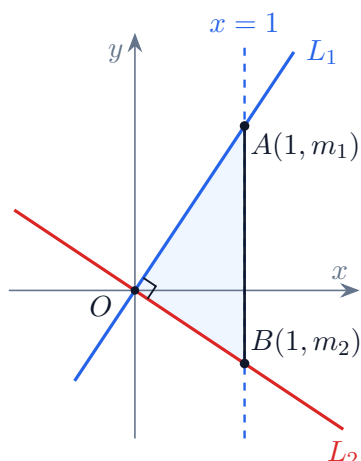
ומה עם ישרים שמקבילים לצירים?

לישר אנכי ($x = k$) אין שיפוע: בין שתי נקודות עליו ההפרש בשיעורי ה- x הוא 0, ואי אפשר לחלק ב-0. ישר אופקי ($y = c$) שיפועו 0, והישרים המאונכים לו הם בדיוק הישרים האנכיים. לכן במקרה הזה המשפט לא רלוונטי: ישר אופקי וישר אנכי מאונכים תמיד, בלי שום מכפלת שיפועים. ואכן, כש- $m_1 = 0$ מתקיים $m_1 m_2 = 0 \neq -1$ לכל m_2 : אין ישר משופע שמאונך לישר אופקי.

3 הוכחה 1: משפט פיתגורס – בשני הכיוונים

הרעיון נזיז את שני הישרים כך שיעברו בראשית הצירים, נבחר על כל אחד נקודה שבה $x = 1$, ונבדוק מתי המשולש שנוצר ישר-זווית – בעזרת משפט פיתגורס והמשפט ההפוך לו.

הכנה. אם $m_1 = m_2$, הישרים מקבילים או מתלכדים: הם לא מאונכים, וגם $m_1 m_2 = m_1^2 \geq 0$, כלומר לא -1. כאן שתי הטענות שמשני צדי ה-“אם ורק אם” שגויות, ו-“אם ורק אם” אומר בדיוק ששתיהן נכונות יחד או שגויות יחד – ולכן המשפט נכון גם במקרה הזה. מעכשיו נניח ש- $m_1 \neq m_2$. אז הישרים נחתכים.



הזזה של ישר במקביל לעצמו לא משנה את השיפוע שלו, וגם לא את הזווית בין שני ישרים. לכן נזיז את שניהם כך שנקודת החיתוך תהיה בראשית $O(0, 0)$:

$$L_1 : y = m_1x, \quad L_2 : y = m_2x.$$

על כל ישר נבחר נקודה שבה $x = 1$: הנקודה $A(1, m_1)$ על L_1 , והנקודה $B(1, m_2)$ על L_2 . שתיהן על הישר האנכי $x = 1$, שלא עובר בראשית, ולכן A ו- B הם קודקודים של משולש. הישרים מאונכים בדיוק כאשר $\angle AOB = 90^\circ$.

סרטוט 2: A על L_1 ו- B על L_2 , שתיהן על $x = 1$.

נימוק	טענה
נוסחת המרחק בין O ל- A	$OA^2 = (1 - 0)^2 + (m_1 - 0)^2 = 1 + m_1^2$ ①
באותה דרך, בין O ל- B	$OB^2 = 1 + m_2^2$ ②
ל- A ול- B אותו שיעור x , ולכן המרחק ביניהן הוא ההפרש בין שיעורי ה- y	$AB^2 = (m_1 - m_2)^2$ ③
בודקים מתי מתקיים $OA^2 + OB^2 = AB^2$: מציבים את צעדים 1-3 ופותרים סוגריים	$2 + m_1^2 + m_2^2 = m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2$ ④
חיסרנו משני האגפים $m_1^2 + m_2^2$	$2 = -2m_1m_2$ ⑤
חילקנו את שני האגפים ב- (-2)	$m_1m_2 = -1$ ⑥

כל מעבר כאן **הפיר**: מוסיפים לשני האגפים אותו ביטוי או מחסרים אותו משניהם, או מחלקים את שני האגפים במספר שאינו 0. לכן קיבלנו שרשרת של "אם ורק אם":

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \iff m_1m_2 = -1.$$

כיוון 1. נניח $L_1 \perp L_2$. אז $\angle AOB = 90^\circ$, ולכן לפי משפט פיתגורס $OA^2 + OB^2 = AB^2$, ולפי השרשרת $m_1m_2 = -1$.

כיוון 2. נניח $m_1m_2 = -1$. אז לפי השרשרת $OA^2 + OB^2 = AB^2$, ולפי **המשפט ההפוך למשפט פיתגורס** הזווית שמול הצלע AB , כלומר $\angle AOB$, ישרה. לכן $L_1 \perp L_2$.

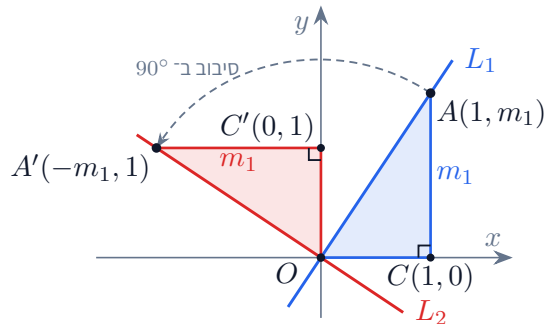
מש"ל

עצרו ובדקו

למה היה נוח לבחור את שתי הנקודות עם אותו שיעור x ? בדקו שגם עם $A(1, m_1)$ ו- $B(2, 2m_2)$ מגיעים בדיוק לאותה מסקנה.

4 הוכחה 2: מסובבים את "משולש השיפוע"

הרעיון סיבוב ב- 90° סביב נקודת החיתוך מעביר ישר לישר המאונך לו. נראה מה הסיבוב עושה ל"משולש השיפוע" – ומשם נקרא את השיפוע החדש.



סרטוט 3: סיבוב ב- 90° : הצלע האנכית CA הופכת לאופקית $C'A'$.

כמו בהוכחה 1, נניח שהישר L_1 עובר בראשית, ושיפועו $m_1 \neq 0$. הנקודה $A(1, m_1)$ נמצאת על L_1 , והנקודה $C(1, 0)$ על ציר ה- x . המשולש OCA הוא "משולש השיפוע": צעד אחד ימינה ($OC = 1$) ו- m_1 למעלה ($CA = |m_1|$); אם $m_1 < 0$ (למטה). נסובב את המשולש ב- 90° נגד כיוון השעון סביב O . סיבוב שומר על אורכים ועל זוויות, ולכן נקבל משולש חופף $OC'A'$. הסרטוט מראה את המקרה $m_1 > 0$.

נימוק	טענה
הסיבוב מעביר את החלק החיובי של ציר ה- x לחלק החיובי של ציר ה- y , ו- $OC' = OC = 1$	① $C' = (0, 1)$
סיבוב שומר על אורכים ועל זוויות	② $\triangle OC'A' \cong \triangle OCA$, ולכן $C'A' \perp OC'$ $C'A' = m_1 $
הצלע האנכית CA הופכת לאופקית: "למעלה" הופך ל"שמאלה" (וכש- $m_1 < 0$, "למטה" הופך ל"ימינה")	③ $A' = (-m_1, 1)$
זווית הסיבוב היא 90°	④ $OA' \perp OA$
הגדרת השיפוע (מותר לחלק, כי $m_1 \neq 0$)	⑤ השיפוע של OA' הוא $\frac{1-0}{-m_1-0} = -\frac{1}{m_1}$

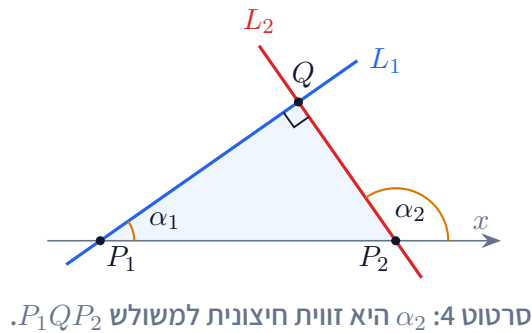
שני הכיוונים יחד. דרך הנקודה O עובר רק ישר אחד שמאונך ל- L_1 , והוא הישר OA' . לכן ישר L_2 שעובר דרך O מאונך ל- L_1 אם ורק אם הוא הישר OA' – כלומר אם ורק אם $m_2 = -\frac{1}{m_1}$, ובמילים אחרות $m_1 m_2 = -1$. אם הישרים אינם עוברים בראשית, מזיזים אותם קודם, כמו בהוכחה 1.

■ מש"ל

5 הוכחה 3: זווית הנטייה ו- $\tan$

הרעיון השיפוע של ישר שווה ל- $\tan$ של זווית הנטייה שלו. כששני ישרים מאונכים, זוויות הנטייה שלהם נבדלות ב- 90° – ונשאר לחשב את $\tan(\alpha + 90^\circ)$.

זווית הנטייה של ישר היא הזווית α שהישר יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , נגד כיוון השעון ($0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$). השיפוע שווה ל- $\tan$ שלה: $m = \tan \alpha$. בזווית חדה רואים את זה ב"משולש השיפוע": צעד אחד ימינה ו- m למעלה, ולכן $\tan \alpha = \frac{m}{1}$. בזווית קהה "משולש השיפוע" הוא צעד אחד ימינה ו- $|m|$ למטה, והזווית החדה שבו, בין הצלע האופקית לישר, היא $180^\circ - \alpha$. לכן $\tan(180^\circ - \alpha) = |m| = -m$, ומאחר ש- $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$, מקבלים שוב $m = \tan \alpha$.



נניח ש- $L_1 \perp L_2$. נזיז את הישרים (בלי לשנות את השיפועים) כך שנקודת החיתוך Q תהיה מעל ציר ה- x , ונסמן ב- P_1 וב- P_2 את נקודות החיתוך של L_1 ושל L_2 בהתאמה, עם ציר ה- x . את השמות נבחר כך ש- L_1 הוא הישר שזווית הנטייה שלו חדה, $0^\circ < \alpha_1 < 90^\circ$. (ישר כזה קיים: אם שתי זוויות הנטייה חדות, או ששתיהן קהות, ההפרש ביניהן קטן מ- 90° , והישרים אינם מאונכים.) במשולש P_1QP_2 הזווית ב- Q ישרה, והזווית α_2 היא **זווית חיצונית** בקודקוד P_2 .

נימוק	טענה
זווית חיצונית שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה	① $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$
$\tan = \frac{\sin}{\cos}$ ו- $m = \tan \alpha$	② $m_2 = \tan(\alpha_1 + 90^\circ) = \frac{\sin(\alpha_1 + 90^\circ)}{\cos(\alpha_1 + 90^\circ)}$
ולכן $\alpha_1 + 90^\circ = 180^\circ - (90^\circ - \alpha_1)$ הסינוס שווה ל- $\cos \alpha_1$	③ $\sin(\alpha_1 + 90^\circ) = \cos \alpha_1$
באותה דרך, עם $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$ $\cos(90^\circ - x) = \sin x$	④ $\cos(\alpha_1 + 90^\circ) = -\sin \alpha_1$
חילקנו מונה ומכנה ב- $\cos \alpha_1 \neq 0$	⑤ $m_2 = \frac{\cos \alpha_1}{-\sin \alpha_1} = -\frac{1}{\tan \alpha_1} = -\frac{1}{m_1}$
כפלנו ב- m_1	⑥ $m_1 m_2 = -1$

והכיוון השני? אם $m_1 m_2 = -1$, לאחד הישרים שיפוע חיובי, ונקרא לו L_1 (אז $0^\circ < \alpha_1 < 90^\circ$). לפי צעדים 2-5, לישר שעובר דרך נקודת החיתוך וזווית הנטייה שלו $\alpha_1 + 90^\circ$ יש שיפוע $m_2 = -\frac{1}{m_1}$. דרך נקודה עובר רק ישר אחד בעל שיפוע נתון, ולכן הישר הזה הוא L_2 עצמו, וזווית הנטייה של L_2 היא $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$. במשולש P_1QP_2 (סרטוט 4) הזווית החיצונית α_2 שווה גם ל- $\alpha_1 + \angle Q$, ומכאן $\angle Q = 90^\circ$, כלומר $L_1 \perp L_2$.

מש"ל

להעמקה: וקטורים (4-5 יח"ל)

הווקטור $\underline{u} = (1, m_1)$ הוא וקטור כיוון של L_1 (צעד אחד ימינה, m_1 למעלה), ו- $\underline{v} = (1, m_2)$ הוא וקטור כיוון של L_2 . שני וקטורים שונים מאפס מאונכים אם ורק אם המכפלה הסקלרית שלהם היא 0:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 1 \cdot 1 + m_1 m_2 = 1 + m_1 m_2 = 0 \iff m_1 m_2 = -1.$$

זאת עוד הוכחה, בשורה אחת – למי שכבר מכיר את המכפלה הסקלרית.

6 שלוש הדרכים זו מול זו

הוכחה 1: פיתגורס	הוכחה 2: סיבוב	הוכחה 3: טריגונומטריה	
המשולש AOB ישר-זווית בדיוק כש- $m_1 m_2 = -1$	סיבוב ב- 90° הופך "ימינה" ל"למעלה"	זוויות הנטייה נבדלות ב- 90°	הרעיון
נוסחת המרחק, פיתגורס וההפוך לו	סיבוב, משולשים חופפים	$m = \tan \alpha$, זווית חיצונית, זוויות קשורות	הכלים
שרשרת של מעברים הפיכים	דרך נקודה עובר אנך אחד בלבד לישר נתון	לשיפוע נתון יש זווית נטייה אחת	שני הכיוונים
אלגברה פשוטה, בלי טריגונומטריה	רואים בעיניים למה "הופכי ונגדי"	מחברת את השיפוע לטריגונומטריה	היתרון

7 מה עושים עם תנאי הניצבות?

שימוש 1: ישר מאונך שעובר דרך נקודה

דוגמה מספרית

מצאו את משוואת הישר שמאונך לישר $y = 2x + 1$ ועובר דרך הנקודה $(4, 3)$.
 השיפוע של הישר הנתון הוא 2, ולכן השיפוע של הישר המאונך הוא $-\frac{1}{2}$. נציב במשוואת ישר לפי נקודה
 ושיפוע: $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 4)$, כלומר $y = -\frac{1}{2}x + 5$.
 בדיקה: כשמציבים $x = 4$ מקבלים $y = -2 + 5 = 3$

שימוש 2: האם המשולש ישר-זווית?

דוגמה מספרית

קודקודי המשולש ABC הם $A(1, 1)$, $B(4, 3)$ ו- $C(2, 6)$. האם המשולש ישר-זווית?
 $m_{AB} = \frac{3-1}{4-1} = \frac{2}{3}$ ו- $m_{BC} = \frac{6-3}{2-4} = -\frac{3}{2}$. המכפלה: $\frac{2}{3} \cdot (-\frac{3}{2}) = -1$, ולכן $AB \perp BC$ והזווית ב- B ישרה.
 אפשר לוודא בפיתגורס: $AB^2 = 13$, $BC^2 = 13$ ו- $AC^2 = 26 = 13 + 13$. זה אפילו משולש ישר-זווית
 ושווה-שוקיים.

שימוש 3: האנך האמצעי לקטע

דוגמה מספרית

מצאו את משוואת האנך האמצעי לקטע שקצותיו $A(-1, 2)$ ו- $B(3, 4)$.
 אמצע הקטע: $M(1, 3)$. שיפוע הקטע: $m_{AB} = \frac{4-2}{3-(-1)} = \frac{1}{2}$, ולכן שיפוע האנך הוא -2 . משוואת האנך האמצעי: $y - 3 = -2(x - 1)$, כלומר $y = -2x + 5$. בדיקה: הנקודה $(0, 5)$ על האנך, והמרחק שלה מ- A ומ- B שווה $\sqrt{10}$ (בשני המקרים).

טעות נפוצה

- **רק הופכי, או רק נגדי.** אם שיפוע הישר הוא 2, שיפוע הישר המאונך לו אינו $\frac{1}{2}$ וגם אינו -2 , אלא $-\frac{1}{2}$: גם הופכי וגם נגדי.
- **בלבול עם ישרים מקבילים.** לישרים מקבילים יש שיפועים **שווים**; לישרים מאונכים — מכפלת שיפועים -1 .
- **ישר אופקי או אנכי.** התנאי לא חל עליהם, כי לישר אנכי אין שיפוע. הישרים המאונכים ל- $y = 5$ הם הישרים מהצורה $x = k$.
- **קריאת השיפוע.** במשוואה $2x + 3y = 6$ השיפוע אינו 2. קודם מבודדים את y ומקבלים $y = -\frac{2}{3}x + 2$, ולכן $m = -\frac{2}{3}$.
- **"נראה מאונך".** בסרטוט שבו היחידות בצירים שונות, ישרים מאונכים לא תמיד נראים מאונכים. סומכים על החישוב, לא על העין.

הידעתם?

הרעיון לתאר צורות בעזרת משוואות במערכת צירים — הגאומטריה האנליטית — פותח במאה ה-17, בעיקר בידי שני צרפתים: רנה דקארט ופייר דה פרמה, כל אחד בנפרד. דקארט פרסם את רעיונותיו ב-1637, בחיבור "הגאומטריה", ועל שמו — בצורתו הלטינית, Cartesius — נקראת מערכת הצירים "קרטזית" עד היום. ולמה מסמנים שיפוע באות m ? אף אחד לא יודע בוודאות. יש הסבר נפוץ שהאות באה מהמילה הצרפתית monter ("לטפס"), אבל היסטוריונים של המתמטיקה לא מצאו לו סימוכין בספרים הישנים.

8 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

1. מצאו את השיפוע של ישר שמאונך לישר $y = -\frac{3}{5}x + 7$.
2. האם הישרים $y = 4x - 1$ ו- $y = -\frac{1}{4}x + 3$ מאונכים? ומה לגבי $y = 4x - 1$ ו- $y = \frac{1}{4}x + 3$?
3. מצאו את משוואת הישר שעובר דרך הנקודה $(2, -1)$ ומאונך לישר $3x - y = 4$.
4. המשולש שקודקדיו $A(0, 0)$, $B(4, 2)$ ו- $C(k, 6)$ ישר־זווית בקודקוד B . מצאו את k .
5. הסבירו למה אין ישר משופע שמאונך לישר $y = 5$.
6. בדקו את הוכחה 1 עם הנקודות $A(1, m_1)$ ו- $B(2, 2m_2)$. (זאת השאלה מתיבת "עצרו ובדקו").

תשובות

1. ההופכי והנגדי של $-\frac{3}{5}$: השיפוע הוא $\frac{5}{3}$.
2. בזוג הראשון הישרים מאונכים: $4 \cdot (-\frac{1}{4}) = -1$. בזוג השני – לא: $4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \neq -1$.
3. $3x - y = 4$ פירושו $y = 3x - 4$, כלומר $m = 3$. שיפוע הישר המאונך הוא $-\frac{1}{3}$, ולכן $y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 2)$, כלומר $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.
4. $m_{BA} = \frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}$, ולכן $m_{BC} = -2$. מכאן $\frac{6-2}{k-4} = -2$, כלומר $4 = -2k + 8$, ו- $k = 2$.
5. השיפוע של $y = 5$ הוא 0, ולכל m_2 מתקיים $0 \cdot m_2 = 0 \neq -1$. הישרים המאונכים ל- $y = 5$ הם אנכיים $(x = k)$, ואין להם שיפוע.
6. $AB^2 = 1 + (2m_2 - m_1)^2 = 1 + m_1^2 - 4m_1m_2 + 4m_2^2$, $OB^2 = 4 + 4m_2^2$, $OA^2 = 1 + m_1^2$. $OA^2 + OB^2 = AB^2$ הופך ל- $5 + m_1^2 + 4m_2^2 = 1 + m_1^2 - 4m_1m_2 + 4m_2^2$, כלומר $4 = -4m_1m_2$, ושוב $m_1m_2 = -1$. אותו שיעור x פשוט חוסך חישוב, כי אז AB הוא הפרש של שיעורי y בלבד.