נוסחת המרחק בין שתי נקודות

משפט פיתגורס במערכת צירים – במישור ובמרחב

כיתות י׳–י״ב | 3–5 יח״ל | גאומטריה אנליטית | 3 הוכחות | כ־14 דקות קריאה

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: למה הדרך ״בקו אווירי״ קצרה מההליכה ברגל.
- הוכחה 1: משולש ישר־זווית ומשפט פיתגורס.
- הוכחה 2: ריבוע בתוך ריבוע, בלי משפט פיתגורס.
- הוכחה 3: המרחק במרחב — פיתגורס פעמיים.
- נוסחת אמצע הקטע, דוגמאות, טעויות נפוצות ושאלות.

מה כדאי לדעת קודם

- משפט פיתגורס.
- שיעורי נקודה במערכת צירים.
- ערך מוחלט.
- צירים במרחב (להוכחה 3).

1 האינטואיציה: בקו אווירי

האינטואיציה

דמיינו עיר שהרחובות שלה מסודרים כמו המשבצות במחברת. אתם עומדים בצומת A ורוצים להגיע לצומת B, שנמצא 4 רחובות מזרחה ו־3 רחובות צפונה. ברגל אין ברירה: צריך ללכת $4+3=7$ רחובות.

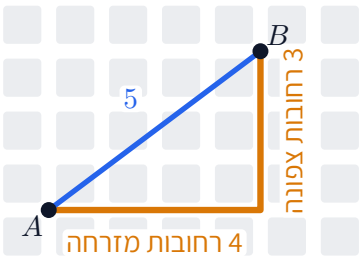
ציפור לא צריכה רחובות: היא עפה מ־A ל־B בקו ישר — ״בקו אווירי״. הדרך שלכם והדרך שלה יוצרות משולש ישר־זווית: 4 ו־3 הם הניצבים, והמסלול של הציפור הוא היתר. לפי משפט פיתגורס היא עפה רק $\sqrt{4^2+3^2}=5$ רחובות.

נוסחת המרחק היא בדיוק החשבון הזה. במקום רחובות יש קווי משבצות של מערכת צירים, ובמקום ״4 מזרחה ו־3 צפונה״ יש הפרשים בין שיעורים.

דוגמה מספרית קטנה

עוד כמה מסלולים. בכל אחד מהם הדרך בקו אווירי קצרה מהדרך ברגל:

מזרחה	צפונה	ברגל	בקו אווירי
4	3	7	$\sqrt{16+9}=5$
6	8	14	$\sqrt{36+64}=10$
5	12	17	$\sqrt{25+144}=13$
1	1	2	$\sqrt{2}\approx 1.41$



סרטוט 1: ברגל: $4+3=7$ רחובות (בכתום). בקו אווירי: 5 (בכחול).

2 הנוסחה

נתונות שתי נקודות במישור: $A(x_1, y_1)$ ו־$B(x_2, y_2)$. המרחק ביניהן הוא האורך של הקטע AB, ונסמן אותו ב־d.

⬟ נוסחת המרחק במישור

המרחק בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו־$B(x_2, y_2)$ הוא

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

במילים: מחסרים את שיעורי ה־x זה מזה ואת שיעורי ה־y זה מזה, מעלים כל הפרש בריבוע, מחברים, ומוציאים שורש.

הסדר של הנקודות לא משנה: $(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2$, כי למספר ולנגדי שלו יש אותו ריבוע. לכן אפשר להתחיל מכל אחת משתי הנקודות — המרחק מ־A ל־B שווה למרחק מ־B ל־A, כמו שצריך.

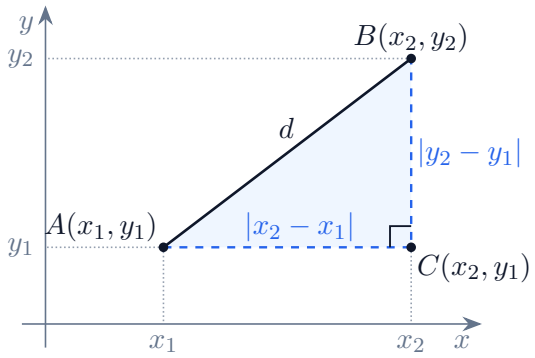
3 הוכחה 1: משולש ישר־זווית ומשפט פיתגורס

הרעיון נבנה משולש ישר־זווית שהקטע AB הוא היתר שלו, והניצבים שלו מקבילים לצירים. את אורכי הניצבים קל לקרוא מתוך השיעורים, ואת אורך היתר ייתן לנו משפט פיתגורס.

דרך הנקודה A נעביר ישר אופקי (מקביל לציר ה־x), ודרך הנקודה B נעביר ישר אנכי (מקביל לציר ה־y). שני הישרים נחתכים בנקודה C.

- C נמצאת על הישר האופקי שעובר דרך A, ולכן שיעור ה־y שלה הוא y_1.
- C נמצאת על הישר האנכי שעובר דרך B, ולכן שיעור ה־x שלה הוא x_2.

כלומר $C(x_2, y_1)$. בסרטוט, B נמצאת מימין ל־A ומעליה, אבל ההוכחה לא משתמשת בזה.



סרטוט 2: המשולש ACB: הניצבים מקבילים לצירים, והיתר הוא d.

	טענה	נימוק
1	$C(x_2,\ y_1)$	על הישר האופקי דרך A ועל הישר האנכי דרך B
2	$\angle ACB = 90°$	ישר אופקי ניצב לישר אנכי
3	$AC = \lvert x_2 - x_1 \rvert$	ל־A ול־C אותו שיעור y, ולכן המרחק ביניהן הוא הערך המוחלט של ההפרש בין שיעורי ה־x — כמו על ציר המספרים
4	$BC = \lvert y_2 - y_1 \rvert$	ל־B ול־C אותו שיעור x, ולכן המרחק ביניהן הוא הערך המוחלט של ההפרש בין שיעורי ה־y
5	$AB^2 = AC^2 + BC^2$	משפט פיתגורס ב־$\triangle ACB$

6	$d^2 = \lvert x_2 - x_1 \rvert^2 + \lvert y_2 - y_1 \rvert^2$	הצבה של צעדים 3 ו־4
7	$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$	$\lvert t \rvert^2 = t^2$ לכל מספר t
8	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	d הוא אורך, ולכן $d \geq 0$: לוקחים את השורש החיובי

מש"ל ■

עצרו ובדקו

ההוכחה הניחה, בלי לומר זאת במפורש, ש־A ו־B אינן על ישר אופקי אחד ואינן על ישר אנכי אחד. באיזה צעד השתמשנו בזה? והאם הנוסחה נכונה גם כאשר $y_1 = y_2$?

לאן נעלמו הערכים המוחלטים?

בצעד 3 כתבנו $AC = \lvert x_2 - x_1 \rvert$, ולא סתם $x_2 - x_1$. הסיבה: אורך של קטע הוא תמיד מספר חיובי, ואילו ההפרש $x_2 - x_1$ יוצא שלילי כש־B נמצאת משמאל ל־A. בצעד 7 הערך המוחלט נעלם, כי ההעלאה בריבוע "מוחקת" את הסימן: $(-6)^2 = 6^2 = 36$.

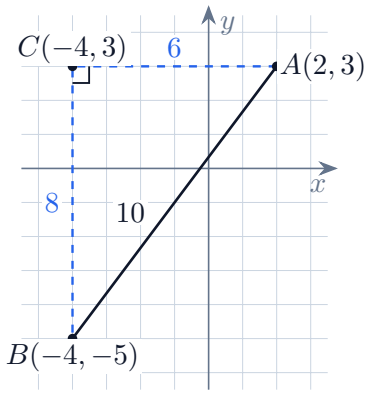
דוגמה: $A(2,3)$ נמצאת ברביע הראשון, ו־$B(-4,-5)$ ברביע השלישי.

- $x_2 - x_1 = -4 - 2 = -6$, אבל האורך האופקי הוא $AC = \lvert -6 \rvert = 6$.
- $y_2 - y_1 = -5 - 3 = -8$, אבל האורך האנכי הוא $BC = \lvert -8 \rvert = 8$.

בנוסחה אפשר להציב את ההפרשים כמו שהם, עם הסימן:

$$d = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$$

לכן לא צריך לבדוק איזו נקודה ימנית יותר, איזו גבוהה יותר, או באיזה רביע כל נקודה נמצאת. הנוסחה מטפלת בכל המקרים בבת אחת.

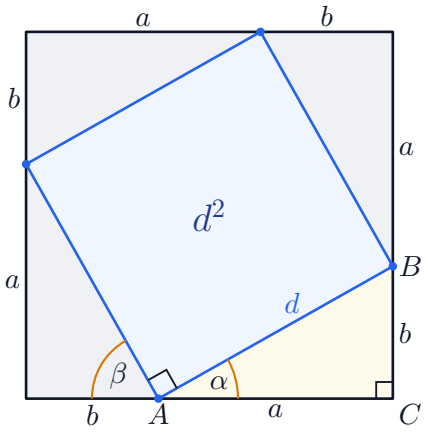


סרטוט 3: הפרשים שליליים, אורכים חיוביים.

4 הוכחה 2: ריבוע בתוך ריבוע — בלי משפט פיתגורס

הרעיון נבנה סביב הקטע AB ריבוע גדול שצלעותיו מקבילות לצירים, ונחשב את השטח שלו בשתי דרכים. משוויון השטחים תצא נוסחת המרחק — בלי להשתמש במשפט פיתגורס.

נסמן $a = |x_2 - x_1|$ ו־$b = |y_2 - y_1|$ — אלה אורכי הניצבים של המשולש ACB מהוכחה 1. נבנה ריבוע שאורך צלעו $a + b$ ואחד מקודקודיו הוא C, כך שהניצבים CA ו־CB מונחים על שתיים מצלעותיו (סרטוט 4).
על כל צלע של הריבוע הגדול נסמן נקודה שמחלקת אותה לשני קטעים שאורכיהם b ו־a, תמיד באותו סדר כשמתקדמים סביב הריבוע. נחבר את ארבע הנקודות, ונקבל מרובע פנימי וארבעה משולשים ישרי־זווית בפינות. אחד מהם הוא $\triangle ACB$.
נסמן ב־α וב־β את הזוויות החדות של $\triangle ACB$, ליד A וליד B.



סרטוט 4: ריבוע גדול שאורך צלעו $a + b$: ארבעה משולשים ומרובע פנימי.

	טענה	נימוק
1	ארבעת המשולשים בפינות חופפים ל־$\triangle ACB$	צ.ז.צ: ניצבים a ו־b, וזווית ישרה ביניהם
2	כל צלעות המרובע הפנימי שוות ל־d	כל צלע היא יתר של אחד המשולשים החופפים
3	בכל משולש בפינה, הזווית החדה שליד הקטע a שווה ל־α והזווית שליד הקטע b שווה ל־β	זוויות מתאימות במשולשים חופפים
4	כל זווית של המרובע הפנימי שווה ל־$180° - \alpha - \beta = 90°$	היא משלימה את α ואת β לזווית שטוחה, ו־$\alpha + \beta = 90°$ במשולש ישר־זווית
5	המרובע הפנימי הוא ריבוע, ושטחו d^2	ארבע צלעות שוות וארבע זוויות ישרות
6	$(a+b)^2 = d^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$	השטח של הריבוע הגדול הוא סכום השטחים של הריבוע הפנימי ושל ארבעת המשולשים
7	$a^2 + 2ab + b^2 = d^2 + 2ab$	פתיחת סוגריים: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
8	$d^2 = a^2 + b^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$	מחסרים $2ab$ משני האגפים, ו־$\lvert t\rvert^2 = t^2$

מש"ל ■

השתמשנו רק בחפיפת משולשים, בסכום הזוויות במשולש ובשטחים — ובדרך הוכחנו גם את משפט פיתגורס עצמו: $d^2 = a^2 + b^2$ לכל משולש ישר־זווית שניצביו a ו־b. במובן הזה נוסחת המרחק ומשפט פיתגורס הם שני ניסוחים של אותה עובדה: אחד בשפה של צלעות, ואחד בשפה של שיעורים.

5 שתי הדרכים זו מול זו

	הוכחה 1: פיתגורס	הוכחה 2: ריבוע בתוך ריבוע
הרעיון	הקטע הוא יתר במשולש ישר־זווית שניצבים מקבילים לצירים	מחשבים שטח של ריבוע בשתי דרכים
הכלים	משפט פיתגורס, ערך מוחלט	חפיפת משולשים, סכום זוויות במשולש, שטחים
מה מניחים	את משפט פיתגורס	כמעט כלום — ומקבלים את פיתגורס בחינם
היתרון	קצרה, ואותה בנייה עובדת גם במרחב	מראה למה פיתגורס נכון, לא רק שהוא נכון

6 נוסחת המרחק במרחב

במרחב יש לכל נקודה שלושה שיעורים. מתווסף ציר שלישי, ציר ה־z, שניצב למישור xy. אפשר לחשוב על שיעור ה־z כעל "גובה" מעל הרצפה.

⬟ נוסחת המרחק במרחב

המרחק בין הנקודות $A(x_1, y_1, z_1)$ ו־$B(x_2, y_2, z_2)$ הוא

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

במילים: אותה נוסחה כמו במישור, עם איבר אחד נוסף — ההפרש בין שיעורי ה־z, בריבוע.

הוכחה 3: אלכסון של תיבה – פיתגורס פעמיים

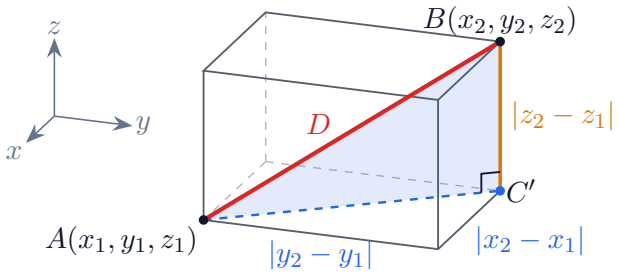
הרעיון נבנה תיבה שהמקצועות שלה מקבילים לצירים, ו־A ו־B הם שני קודקודים נגדיים שלה. הקטע AB הוא אלכסון התיבה. נחשב אותו בשני שלבים: קודם את האלכסון של "רצפת" התיבה, ואחר כך את האלכסון של התיבה כולה.

אורכי המקצועות של התיבה הם $|x_2 - x_1|$, $|y_2 - y_1|$ ו־$|z_2 - z_1|$. נסמן ב־C' את הנקודה שנמצאת בדיוק מתחת ל־B (או מעליה), באותו גובה כמו A:

$$C'(x_2,\ y_2,\ z_1)$$

שלב 1: A ו־C' נמצאות שתיהן בגובה z_1, כלומר במישור אופקי אחד — רצפת התיבה. במישור הזה אפשר להשתמש בנוסחת המרחק שכבר הוכחנו.

שלב 2: הקטע BC' אנכי, ולכן הוא ניצב לרצפה. כך נוצר משולש ישר־זווית $AC'B$ (צבוע בסרטוט), שהיתר שלו הוא D.



סרטוט 5: הקטע AB הוא אלכסון התיבה, ו־AC' הוא אלכסון הרצפה.

	טענה	נימוק
1	$AC'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$	פיתגורס בפעם הראשונה: נוסחת המרחק במישור הרצפה $z = z_1$
2	$BC' = \lvert z_2 - z_1 \rvert$	ל־B ול־C' אותם שיעורי x ו־y, ולכן הקטע ביניהן אנכי
3	$\angle AC'B = 90°$	קטע אנכי ניצב לכל ישר במישור אופקי, ובפרט ל־AC'
4	$D^2 = AC'^2 + BC'^2$	פיתגורס בפעם השנייה, ב־$\triangle AC'B$
5	$D^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$	הצבה של צעדים 1 ו־2, ו־$\lvert t \rvert^2 = t^2$

מש"ל ■

למה מותר להשתמש בנוסחה של המישור בצעד 1? נטיל את A ואת C' אנכית אל מישור xy. ההיטלים הם $A'(x_1, y_1, 0)$ ו־$B'(x_2, y_2, 0)$ — אותם שיעורי x ו־y, וגובה 0. (ההיטל של C' הוא גם ההיטל של B, ולכן קראנו לו B'.) המרובע $AC'B'A'$ הוא מלבן: הצלעות AA' ו־$C'B'$ אנכיות, ושתיהן באורך $\lvert z_1 \rvert$. לכן $AC' = A'B'$. ואת $A'B'$ כבר יודעים לחשב: אלה שתי נקודות במישור xy. (אם $z_1 = 0$, אין צורך בהיטל: A ו־C' כבר נמצאות במישור xy.) ואם $z_1 = z_2$, או אם הקטע AB אנכי, המשולש $AC'B$ מתנוון — אבל הנוסחה נכונה גם אז, כמו בשאלה 6.

מבט וקטורי (להעמקה, 4–5 יח"ל)

הדרך מ־A ל־B מורכבת משלוש תנועות שניצבות זו לזו, בכיווני שלושת הצירים — כמו ההליכה ברחובות, רק עם קומה נוספת: $\underline{AB} = \underline{u_1} + \underline{u_2} + \underline{u_3}$, כאשר $\underline{u_1} = (p, 0, 0)$, $\underline{u_2} = (0, q, 0)$, $\underline{u_3} = (0, 0, r)$, ו־$p$, q, r הם ההפרשים $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$, בהתאמה. לכן

$$|\underline{AB}|^2 = \underline{AB} \cdot \underline{AB} = (\underline{u_1} + \underline{u_2} + \underline{u_3}) \cdot (\underline{u_1} + \underline{u_2} + \underline{u_3}).$$

בפתיחת הסוגריים מתקבלים תשעה איברים: $\underline{u_1} \cdot \underline{u_1} = p^2$, $\underline{u_2} \cdot \underline{u_2} = q^2$, $\underline{u_3} \cdot \underline{u_3} = r^2$, ועוד שישה איברים שמתאפסים, כי המכפלה הסקלרית של וקטורים ניצבים היא 0. נשאר $|\underline{AB}|^2 = p^2 + q^2 + r^2$ — נוסחת המרחק, בלי ערכים מוחלטים ובלי סרטוט.

7 מה עושים עם הנוסחה?

דוגמה 1: נקודה על ציר ה־x במרחק שווה משתי נקודות

מצאו על ציר ה־x נקודה P במרחק שווה מ־$A(1, 4)$ ומ־$B(5, 2)$.

כל נקודה על ציר ה־x היא מהצורה $P(t, 0)$. נדרוש $PA^2 = PB^2$ (נוח יותר להשוות ריבועים, בלי שורשים):

$$(t-1)^2 + (0-4)^2 = (t-5)^2 + (0-2)^2 \implies t^2 - 2t + 17 = t^2 - 10t + 29 \implies 8t = 12$$

ולכן $t = 1.5$ והנקודה היא $P(1.5,\ 0)$.

בדיקה: $PA^2 = 0.25 + 16 = 16.25$ וגם $PB^2 = 12.25 + 4 = 16.25$.

דוגמה 2: איזה משולש זה?

הוכיחו שהמשולש שקודקודיו $A(-1,1)$, $B(3,3)$ ו־$C(1,7)$ הוא ישר־זווית ושווה־שוקיים.

$AB^2 = 4^2 + 2^2 = 20$, $BC^2 = (-2)^2 + 4^2 = 20$, $AC^2 = 2^2 + 6^2 = 40$.

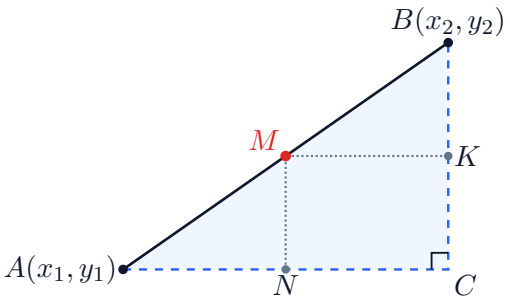
מכאן $AB = BC$, ולכן המשולש שווה־שוקיים. בנוסף $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40 = AC^2$, ולכן לפי המשפט ההפוך למשפט פיתגורס הזווית B ישרה.

בונוס: נוסחת אמצע הקטע

אמצע הקטע שבין $A(x_1, y_1)$ ל־$B(x_2, y_2)$ הוא הנקודה

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

הוכחה. נחזור למשולש ACB. דרך M נעביר ישר אנכי, שחותך את AC בנקודה N. הישר MN עובר דרך אמצע הצלע AB ומקביל לצלע BC, ולכן הוא חוצה גם את הצלע AC (קטע אמצעים במשולש). לכן N היא אמצע AC.



סרטוט 6: N היא אמצע AC, ו־K היא אמצע BC.

הנקודה N נמצאת על הישר האופקי $y = y_1$, באמצע הדרך בין x_1 ל־x_2. לכן שיעור ה־x שלה הוא $x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2}$, כלומר $\frac{x_1 + x_2}{2}$, ולנקודה M, שנמצאת איתה על אותו ישר אנכי, יש אותו שיעור x. באותו אופן, ישר אופקי דרך M חוצה את BC בנקודה K, ומקבלים ששיעור ה־y של M הוא $\frac{y_1 + y_2}{2}$. **במילים:** שיעורי אמצע הקטע הם הממוצעים של שיעורי קצותיו. במרחב מתקבל באותה דרך גם שיעור ה־z של האמצע: $\frac{z_1 + z_2}{2}$.

טעות נפוצה

- **"השורש מתפרק".** $\sqrt{a^2 + b^2}$ אינו $a + b$. למשל, $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, ולא 7 — זה ההבדל בין קו אווירי להליכה ברחובות.
- **ערבוב שיעורים.** מחסרים x מ־x ו־y מ־y. "$(x_2 - y_1)^2$" הוא טעות.
- **מינוס בריבוע.** כשההפרש שלילי, שמים אותו בסוגריים: $(-6)^2 = 36$. במחשבון, -6^2 נותן -36.
- **שוכחים את השורש.** אם קיבלתם $d^2 = 25$, המרחק הוא 5 ולא 25.
- **הסדר.** בנוסחת המרחק מותר להחליף את סדר הנקודות. בנוסחת השיפוע $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ — חייבים לשמור על אותו סדר במונה ובמכנה.

הידעתם?

את הרעיון לתאר נקודות בעזרת מספרים, וקווים בעזרת משוואות, פרסם הפילוסוף והמתמטיקאי הצרפתי רנה דקארט בשנת 1637, בחיבור "הגאומטריה" שצורף לספרו "מאמר על המתודה". בערך באותן שנים הגיע לרעיונות דומים, באופן עצמאי, גם פייר דה פרמה, אבל עבודתו פורסמה רק אחרי מותו. על שמו הלטיני של דקארט, קרטזיוס, נקראת מערכת הצירים "קרטזית" עד היום. מערכת הצירים בצורה שאנחנו מכירים — שני צירים ניצבים, עם מספרים שליליים — התגבשה בהדרגה רק אחריו.

ונוסחת המרחק? היא פשוט משפט פיתגורס, שהיה ידוע כבר יותר מאלפיים שנה קודם לכן, "מתורגם" לשפה של שיעורים.

8 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

1. חשבו את המרחק בין $A(-1,7)$ ל־$B(5,-1)$.
2. המרחק בין $P(a,3)$ ל־$Q(1,-1)$ הוא 5. מצאו את a. למה יש שתי תשובות?
3. חשבו את המרחק בין $A(2,-1,3)$ ל־$B(4,1,2)$.
4. מצאו את אמצע הקטע שבין $A(-3,4)$ ל־$B(5,-2)$, ובדקו בעזרת נוסחת המרחק שהוא באמת נמצא במרחק שווה משני הקצוות.
5. בהוכחה 2, למה לא הסתפקנו בכך שכל צלעות המרובע הפנימי שוות? למה היינו צריכים גם את הזוויות?
6. באיזה צעד בהוכחה 1 השתמשנו בכך ש־A ו־B אינן על ישר אופקי אחד או על ישר אנכי אחד? האם הנוסחה נכונה גם כאשר $y_1 = y_2$? (זאת השאלה מתיבת "עצרו ובדקו".)

תשובות

1. $d = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$.
2. $(a-1)^2 + 4^2 = 25$, ולכן $(a-1)^2 = 9$, כלומר $a-1 = 3$ או $a-1 = -3$, ומכאן $a = 4$ או $a = -2$. יש שתי תשובות כי על הישר $y = 3$ יש שתי נקודות במרחק 5 מ־Q — אחת מימין ואחת משמאל (שתי נקודות החיתוך של הישר עם מעגל שמרכזו Q ורדיוסו 5).
3. $D = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$.
4. $M\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = M(1,1)$. בדיקה: $MA^2 = (-4)^2 + 3^2 = 25$ וגם $MB^2 = 4^2 + (-3)^2 = 25$, כלומר $MA = MB = 5$. וגם $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 = 2 \cdot 5$.
5. מרובע שכל צלעותיו שוות הוא מעוין, ושטח של מעוין שאורך צלעו d קטן מ־d^2 אם הזוויות שלו אינן ישרות. רק כשהזוויות ישרות השטח הוא בדיוק d^2, וזה מה שהיינו צריכים בצעד 6.
6. בצעדים 2 ו־5: הזווית ACB ומשפט פיתגורס דורשים משולש של ממש. אם $y_1 = y_2$, הנקודה C מתלכדת עם B, ואז אין זווית ACB ואין משולש. אבל הנוסחה עדיין נכונה: $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + 0} = |x_2 - x_1|$, וזה בדיוק המרחק בין שתי נקודות על ישר אופקי (כי $\sqrt{t^2} = |t|$). כך גם כאשר $x_1 = x_2$, וכאשר A ו־B הן אותה נקודה מקבלים $d = 0$.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את המסמך בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנו קטעים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.

אינסוף
מתמטיקה