מעגל היחידה

איך מעגל אחד הפך את הסינוס והקוסינוס מיחסים במשולש לפונקציות של כל זווית

כיתות י׳–י״א | 5 יח״ל | טריגונומטריה | 9 הוכחות קצרות | כ־20 דקות קריאה

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: גלגל ענק, ולמה משולש ישר־זווית "נתקע" ב־ 90°.
- ההגדרה $\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$ — ולמה היא מרחיבה את ההגדרה הישנה.
- זהות פיתגורס $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ בשתי דרכים.
- זוויות קשורות בעזרת שיקופים, סימנים ברביעים ו־$\tan$ כשיפוע.
- רדיאנים, היסטוריה, שימושים, טעויות נפוצות ושאלות לבדיקה עצמית.

מה כדאי לדעת קודם

- $\sin$, $\cos$ ו־$\tan$ במשולש ישר־זווית.
- משפט פיתגורס.
- שיעורי נקודה ונוסחת המרחק בין שתי נקודות.
- שיקוף של נקודה בציר.

1 האינטואיציה: גלגל ענק

האינטואיציה

במשולש ישר־זווית הגדרנו את $\sin$ ואת $\cos$ כיחסים בין צלעות. ההגדרה עובדת יפה, אבל יש לה מגבלה: במשולש ישר־זווית אפשר לדבר רק על זוויות חדות, כלומר קטנות מ־ 90°. אין משולש ישר־זווית עם זווית של 120°, ולכן לפי ההגדרה הישנה $\sin 120^\circ$ הוא ביטוי חסר משמעות.

עכשיו דמיינו גלגל ענק בלונה־פארק. נמקם את המרכז שלו בראשית הצירים, ונמדוד אורכים "ברדיוסים" — כך הרדיוס של הגלגל הוא בדיוק 1. אתם בקרון שמתחיל בנקודה $(1, 0)$, והגלגל מסתובב נגד כיוון השעון. בכל רגע אפשר לשאול: כמה רחוק מימין למרכז אתם נמצאים (מספר שלילי — משמאל לו), וכמה גבוה מעליו (מספר שלילי — מתחתיו)? התשובות הן שני השיעורים של הקרון.

הגלגל לא עוצר ב־ 90°, וגם לא ב־ 360° — הוא יכול להמשיך לסיבוב שני — ובכל זווית יש לקרון מקום מוגדר. זה כל הרעיון של מעגל היחידה: אם הגלגל הסתובב בזווית θ, לשיעור ה־x של הקרון נקרא $\cos\theta$, ולשיעור ה־y שלו — $\sin\theta$. כך יש ל־$\sin$ ול־$\cos$ משמעות בכל זווית.

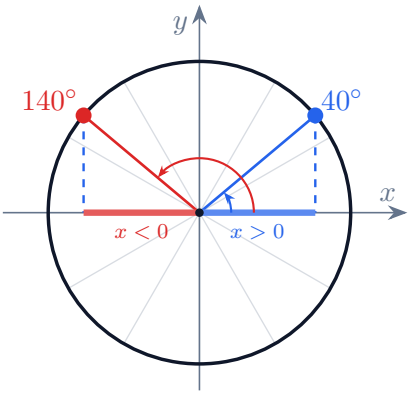
© אור בן שטרית · אינסוף

דוגמה מספרית קטנה

כמה מקומות של הקרון. שיעורי הנקודות מעוגלים:

θ **הזווית**	P **הנקודה**	$\cos\theta$	$\sin\theta$
$0°$	$(1,\,0)$	1	0
$30°$	$\approx (0.87,\,0.5)$	≈ 0.87	0.5
$150°$	$\approx (-0.87,\,0.5)$	≈ -0.87	0.5
$180°$	$(-1,\,0)$	-1	0
$270°$	$(0,\,-1)$	0	-1

שימו לב: $\sin 30° = \sin 150°$ — אותו גובה — ו־$\cos 180° = -1$, ערך שלא יכול להופיע במשולש ישר־זווית.



סרטוט 1: הקרון אחרי סיבוב של $40°$ ושל $140°$: אותו גובה, אבל פעם מימין למרכז ופעם משמאלו.

2 ההגדרה

נסרטט מעגל שמרכזו בראשית הצירים $O(0,0)$ ורדיוסו 1. זה **מעגל היחידה**, והמשוואה שלו היא $x^2+y^2=1$. את הזווית θ (האות היוונית תטא) מודדים מהחלק החיובי של ציר ה־x: זווית חיובית — נגד כיוון השעון, וזווית שלילית — בכיוון השעון. הקרן שיוצרת את הזווית חותכת את המעגל בנקודה אחת, ונקרא לה P.

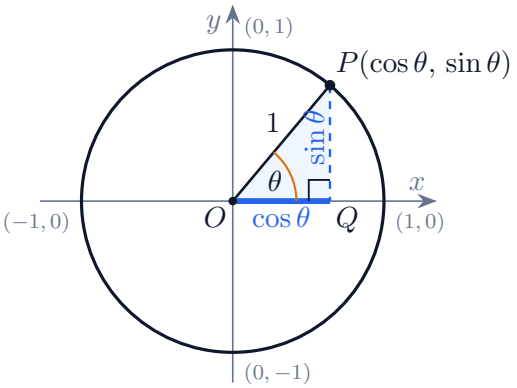
הגדרת סינוס וקוסינוס

לכל זווית θ: אם $P(x,y)$ היא הנקודה שבה הקרן של θ חותכת את מעגל היחידה, אז

$$\boxed{\cos\theta = x \qquad \sin\theta = y}$$

וכאשר $x \neq 0$ מגדירים גם $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

במילים: הקוסינוס של הזווית הוא שיעור ה־x של הנקודה על המעגל, והסינוס שלה הוא שיעור ה־y. כלומר $P = (\cos\theta,\,\sin\theta)$.



סרטוט 2: מעגל היחידה. $P = (\cos\theta,\,\sin\theta)$.

ההגדרה החדשה לא סותרת את הישנה

טענה. כאשר $0° < \theta < 90°$, ההגדרה במעגל היחידה נותנת בדיוק את הערכים שנותן משולש ישר־זווית.

הוכחה. θ חדה, ולכן $P(x,y)$ ברביע הראשון: $x>0$ ו־$y>0$. נוריד אנך מ־P לציר ה־x ונסמן את עקבו $Q(x,0)$ (סרטוט 2). במשולש OQP, שהוא ישר־זווית ב־Q, היתר הוא רדיוס, $OP=1$, והניצבים הם $OQ=x$ ו־$QP=y$. לכן

$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{1} = x, \qquad \sin\theta = \frac{QP}{OP} = \frac{y}{1} = y.$$

מש"ל ■

כלומר לא המצאנו "סינוס חדש" — הרחבנו את הישן. בזוויות חדות שום דבר לא השתנה, ובשאר הזוויות יש סוף־סוף ערכים.

ולמה דווקא רדיוס 1? במעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו r, הקרן של θ פוגשת את המעגל בנקודה $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$, כלומר כל השיעורים פשוט גדלים פי r (בזוויות חדות זה דמיון משולשים ביחס r). כדי לקבל סינוס וקוסינוס היה צריך לחלק ב־r. ברדיוס 1 החילוק נעלם, וקוראים את הערכים ישר מהשיעורים. טבלאות עתיקות השתמשו ברדיוס 60 ואפילו ברדיוס 3438 (ראו בתיבת "הידעתם?").

3 זהות פיתגורס: $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

זהות פיתגורס

לכל זווית θ:

$$\boxed{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$$

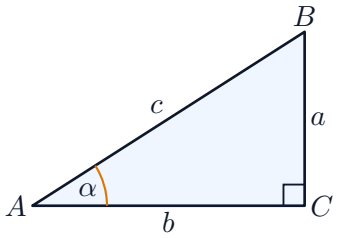
במילים: אם מעלים בריבוע את הסינוס ואת הקוסינוס של אותה זווית ומחברים, מקבלים תמיד 1. (הסימון $\sin^2\theta$ פירושו $(\sin\theta)^2$, ולא הסינוס של θ^2.)

הוכחה 1: משפט פיתגורס במשולש ישר־זווית

הרעיון נחלק את משפט פיתגורס בריבוע של היתר.

במשולש ABC הזווית C ישרה, ו־α היא הזווית שבקודקוד A.
לפי ההגדרות במשולש ישר־זווית:

$$\sin\alpha=\frac{a}{c},\qquad \cos\alpha=\frac{b}{c}.$$



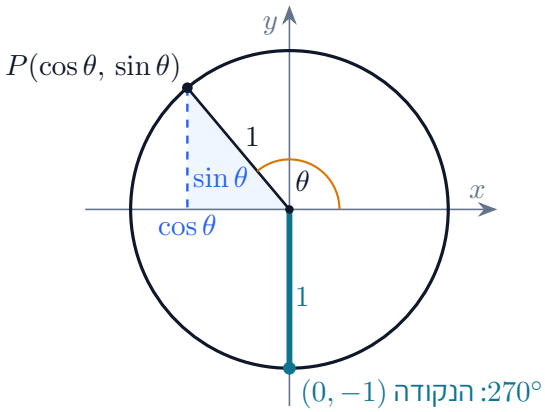
סרטוט 3: משולש ישר־זווית: c הוא היתר.

	טענה	נימוק
1	$a^2+b^2=c^2$	משפט פיתגורס
2	$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$	חילקנו את שני האגפים ב־ c^2 (מותר, כי $c>0$)
3	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	הצבנו $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ ו־$\cos\alpha=\frac{b}{c}$

מש"ל

ההוכחה קצרה, אבל היא תקפה רק לזוויות חדות, כי רק להן יש משולש ישר־זווית. בשביל $\sin^2 120^\circ+\cos^2 120^\circ$ צריך את ההוכחה הבאה.

הוכחה 2: מעגל היחידה – לכל זווית



סרטוט 4: גם ברביע השני וגם על ציר, המרחק מהראשית הוא 1.

הרעיון הנקודה $P(\cos\theta, \sin\theta)$ נמצאת על מעגל היחידה, ולכן המרחק שלה מהראשית הוא 1. נכתוב את העובדה הזאת בעזרת נוסחת המרחק.

נבחר זווית θ כלשהי: חדה, קהה, גדולה מ־$180°$ או שלילית. בסרטוט $\theta = 130°$, ולכן $\cos\theta < 0$. מסומנת שם גם הנקודה של $270°$: היא נמצאת על ציר ה־y, ולכן אין לה משולש ישר־זווית בכלל.

	טענה	נימוק
1	$P = (\cos\theta,\ \sin\theta)$	הגדרת $\sin$ ו־$\cos$ במעגל היחידה
2	$OP = 1$	P על מעגל שמרכזו O ורדיוסו 1
3	$OP^2 = (\cos\theta - 0)^2 + (\sin\theta - 0)^2$	נוסחת המרחק בין $O(0,0)$ ל־P
4	$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	$OP^2 = 1^2 = 1$, לפי צעדים 2 ו־3

מש"ל ■

איפה פיתגורס? הוא מתחבא בנוסחת המרחק, שהיא בעצמה משפט פיתגורס על מערכת צירים. ההבדל הוא שנוסחת המרחק נכונה לכל שתי נקודות, בכל רביע: גם כשאחד השיעורים שלילי (בריבוע הסימן נעלם), וגם כשהנקודה נמצאת על ציר ואין בכלל משולש. לכן הזהות נכונה לכל זווית.

עצרו ובדקו

בעזרת הזהות, הוכיחו שלכל זווית θ מתקיים $-1 \le \sin\theta \le 1$. האם אפשר לראות את זה גם ישירות מהסרטוט?

שתי ההוכחות זו מול זו

	הוכחה 1: משולש ישר־זווית	הוכחה 2: מעגל היחידה
הכלי	משפט פיתגורס במשולש	נוסחת המרחק (פיתגורס על מערכת צירים)
תקפה	רק לזוויות חדות	לכל זווית
היתרון	לא צריך מערכת צירים	הוכחה אחת לכל המקרים, בלי לבדוק רביעים

דוגמה: הזהות נותנת שתי אפשרויות, והמעגל בוחר

נתון ש־$\sin\theta = \frac{3}{5}$ ו־θ זווית קהה. מצאו את $\cos\theta$ ואת $\tan\theta$.

לפי הזהות: $\cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, ולכן $\cos\theta = \frac{4}{5}$ או $\cos\theta = -\frac{4}{5}$. הזווית קהה, ולכן P ברביע השני, ושיעור ה־x שלה שלילי: $\cos\theta = -\frac{4}{5}$. מכאן $\tan\theta = \dfrac{3/5}{-4/5} = -\dfrac{3}{4}$.

4 זוויות קשורות: שלושה שיקופים

למעגל יש סימטריה: אם משקפים אותו בציר ה־x, בציר ה־y או בישר $y = x$, הוא עובר על עצמו. שיקוף שומר על מרחקים, ולכן נקודה על מעגל היחידה עוברת בשיקוף כזה לנקודה שגם היא על מעגל היחידה. מכאן נקבל זהויות שמחזירות כל זווית לזווית חדה.

זהויות של זוויות קשורות

לכל זווית α:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

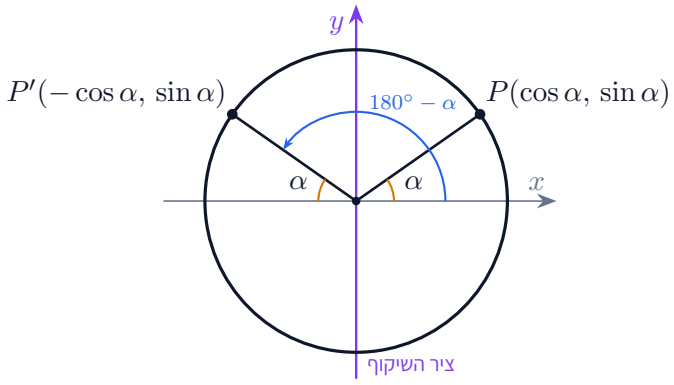
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha \qquad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

שיקוף בציר ה־y: הזווית $180^\circ - \alpha$

הרעיון בשיקוף בציר ה־y שיעור ה־x מחליף סימן, ושיעור ה־y לא משתנה. נבדוק לאיזו זווית מתאימה הנקודה החדשה.

בסרטוט α חדה, אבל הנימוק תקף לכל זווית: שיקוף הופך את כיוון הסיבוב. זווית α שנמדדת נגד כיוון השעון מהחלק החיובי של ציר ה־x הופכת לזווית α שנמדדת בכיוון השעון מהחלק השלילי — וזאת בדיוק הזווית $180^\circ - \alpha$.



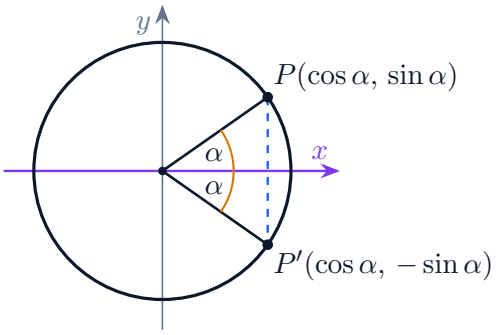
סרטוט 5: P' היא השיקוף של P בציר ה־y.

	טענה	נימוק
1	$P' = (-\cos\alpha,\ \sin\alpha)$	P' היא השיקוף של $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ בציר ה־y: שיעור ה־x מחליף סימן
2	$OP' = OP = 1$	שיקוף שומר על מרחקים, והראשית O על ציר השיקוף. לכן P' על מעגל היחידה

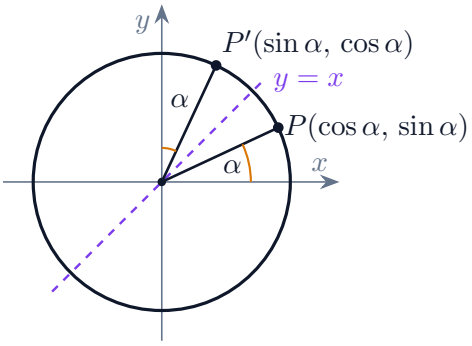
(3)	P' מתאימה לזווית $180^\circ - \alpha$	שיקוף שומר על זוויות ומעביר את החלק החיובי של ציר ה־x לחלק השלילי. לכן OP' יוצר זווית α עם החלק השלילי, ו־$180^\circ - \alpha$ עם החלק החיובי
(4)	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	ההגדרה עבור P', והשיעורים מצעד 1

מש"ל ■

עוד שני שיקופים: בציר ה־x ובישר $y = x$



שיקוף בציר ה־x



שיקוף בישר $y = x$

סרטוט 6: מימין: שיקוף בציר ה־x נותן את הזווית $-\alpha$. משמאל: שיקוף בישר $y = x$ נותן את הזווית $90^\circ - \alpha$.

בשני המקרים P' שוב נמצאת על מעגל היחידה, כי שיקוף שומר על מרחקים והראשית נמצאת על ציר השיקוף. הישר $y = x$ חוצה את הזווית שבין הצירים, ולכן השיקוף בו מחליף בין תפקידי הצירים — ומכאן שהשיעורים מתחלפים.

	שיקוף בציר ה־x	שיקוף בישר $y = x$
התמונה של P	$P' = (\cos\alpha,\ -\sin\alpha)$: שיעור ה־$y$ מחליף סימן	$P' = (\sin\alpha,\ \cos\alpha)$: השיעורים מתחלפים
הזווית של P'	$-\alpha$: השיקוף הופך את כיוון הסיבוב, ו־α נגד כיוון השעון הופכת ל־α בכיוון השעון	$90^\circ - \alpha$: החלק החיובי של ציר ה־x עובר לחלק החיובי של ציר ה־y, והשיקוף הופך את כיוון הסיבוב: מגיעים ל־OP' מהחלק החיובי של ציר ה־y בסיבוב של α בכיוון השעון
ולכן	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$

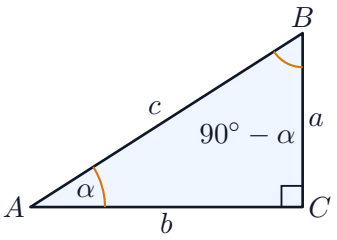
מש"ל ■

הוכחה שנייה לזהות של $90^\circ - \alpha$: אותו משולש, זווית אחרת

בזוויות חדות יש לזהות הזאת הוכחה של שורה אחת. במשולש ישר־זווית סכום שתי הזוויות החדות הוא 90°: אם בקודקוד A הזווית היא α, אז בקודקוד B היא $90^\circ - \alpha$. הניצב a נמצא **מול** α, אבל **ליד** $90^\circ - \alpha$. לכן

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos(90^\circ - \alpha),$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin(90^\circ - \alpha).$$

מכאן גם השם: "קוסינוס" הוא הסינוס של הזווית המשלימה ל־90°.



סרטוט 7: a הוא ניצב מול α וניצב ליד $90^\circ - \alpha$.

דוגמה: מחשבים בלי מחשבון

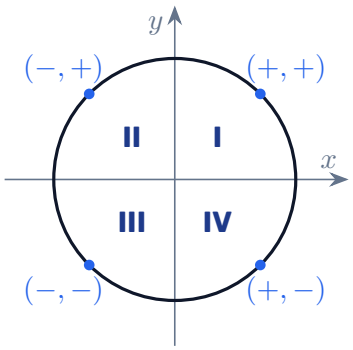
$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \tfrac{1}{2}$$
$$\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \tfrac{1}{2}$$
$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 135^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{-\cos 45^\circ} = -1$$

5 סימנים ברביעים, ו־$\tan$ כשיפוע

באיזה רביע מה חיובי?

הסימן של $\cos\theta$ הוא הסימן של שיעור ה־x של P, והסימן של $\sin\theta$ הוא הסימן של שיעור ה־y. השבר $\tan\theta = \frac{y}{x}$ חיובי כששני השיעורים באותו סימן, ושלילי כשהסימנים שונים.

רביע	הזווית	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\tan\theta$
ראשון	$0^\circ < \theta < 90^\circ$	$+$	$+$	$+$
שני	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	$-$	$+$	$-$
שלישי	$180^\circ < \theta < 270^\circ$	$-$	$-$	$+$
רביעי	$270^\circ < \theta < 360^\circ$	$+$	$-$	$-$



סרטוט 8: הסימנים של (x, y) בכל רביע.

$\tan\theta$ הוא שיפוע

טענה. $\tan\theta$ שווה לשיפוע של הישר OP.

הוכחה. השיפוע של ישר שעובר דרך $O(0,0)$ ודרך $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$ הוא

$$m = \frac{\sin\theta - 0}{\cos\theta - 0} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta.$$

מש"ל ■

מסקנה: השיפוע של כל ישר שאינו אנכי שווה ל־$\tan$ של **זווית הנטייה** שלו — הזווית שהישר יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה־x. (מזיזים את הישר במקביל לעצמו עד שיעבור בראשית; השיפוע וזווית הנטייה לא משתנים.) למשל, לישר שזווית הנטייה שלו 135° יש שיפוע -1.

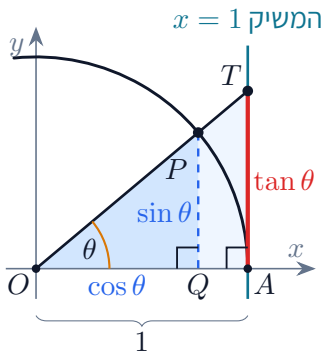
ולמה קוראים לזה "טנגנס"?

נעביר משיק למעגל היחידה בנקודה $A(1,0)$. זה הישר האנכי $x=1$. הישר OP חותך את המשיק בנקודה T.

דרך א' (דמיון). Q הוא עקב האנך מ־P לציר ה־x. בזווית חדה, המשולשים OQP ו־OAT ישרי־זווית ויש להם זווית משותפת θ, ולכן הם דומים (ז.ז). מכאן

$$\frac{AT}{OA}=\frac{QP}{OQ}\implies AT=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta.$$

דרך ב' (שיפוע). T נמצאת על OP, שמשוואתו $y=x\tan\theta$, ולכן $T=(1,\tan\theta)$ — בכל זווית שבה $\cos\theta\neq 0$.



סרטוט 9: הקטע AT על המשיק שווה ל־$\tan\theta$.

כלומר $\tan\theta$ נמדד על **המשיק**: בזווית חדה הוא אורך הקטע AT, ובכל זווית — שיעור ה־y של T. המילה הלטינית tangens פירושה "נוגע" — ומכאן השם. וזה גם מסביר למה $\tan 90^\circ$ לא מוגדר: בזווית של 90° הישר OP אנכי, מקביל למשיק, ולא פוגש אותו בכלל.

6 רדיאנים

עד עכשיו מדדנו זוויות במעלות. מעגל היחידה מציע מדידה טבעית יותר: כשהנקודה P מסתובבת בזווית θ, היא מתארת על המעגל קשת, ולאורך הקשת הזאת קוראים **גודל הזווית ברדיאנים**. סיבוב שלם הוא היקף מעגל היחידה, 2π, ולכן 360° הם 2π רדיאנים, 180° הם π רדיאנים ו־90° הם $\frac{\pi}{2}$. כדי להמיר ממעלות לרדיאנים כופלים ב־$\frac{\pi}{180}$; למשל $60^\circ=\frac{\pi}{3}\approx 1.05$. רדיאן אחד הוא הזווית שהקשת שלה ארוכה בדיוק כמו הרדיוס — בערך 57.3°.

ברדיאנים הזווית היא אורך — מספר ממשי רגיל — ולכן $\sin$ ו־$\cos$ הופכים לפונקציות של מספר, כמו x^2. בחשבון דיפרנציאלי זה משתלם: הנגזרת של $\sin x$ היא $\cos x$ רק כשמודדים את x ברדיאנים.

7 מה עושים עם מעגל היחידה?

למה מעגל היחידה חשוב גם מחוץ לכיתה?

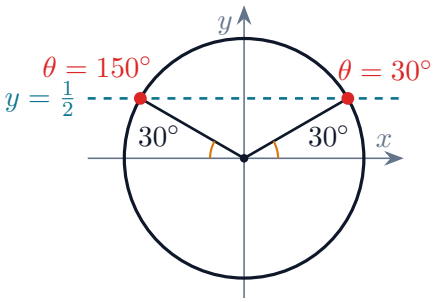
- **מחזוריות וגלים.** כשהנקודה מסתובבת שוב ושוב, $\sin$ ו־$\cos$ חוזרים על עצמם כל 360°. כך מתארים גלי קול ואור, זרם חילופין ותנודות של מטוטלת.
- **מספרים מרוכבים (5 יח"ל).** כל נקודה על מעגל היחידה מתאימה למספר המרוכב $\cos\theta+i\sin\theta$, ולפי נוסחת אוילר, $\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$.
- **טורי פורייה.** ז'וזף פורייה (תחילת המאה ה־19) טען שכמעט כל אות הוא סכום של פונקציות $\sin$ ו־$\cos$, ומתמטיקאים אחריו הוכיחו מתי זה נכון. על כך נשענות התקשורת הסלולרית ודחיסת שמע ותמונה.

פתרון משוואות: כמה פתרונות יש ל־$\sin\theta = \frac{1}{2}$?

הנקודות על מעגל היחידה שהגובה שלהן $\frac{1}{2}$ נמצאות על הישר האופקי $y = \frac{1}{2}$, שחותך את המעגל פעמיים. לכן למשוואה $\sin\theta = \frac{1}{2}$ יש שני פתרונות בתחום $0^\circ \le \theta < 360^\circ$:

$$\theta = 30^\circ \qquad \text{או} \qquad \theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

באותו אופן, הפתרונות של $\cos\theta = \frac{1}{2}$ נמצאים על הישר האנכי $x = \frac{1}{2}$, ולכן $\theta = 60^\circ$ או $\theta = 300^\circ$ (השיקוף של 60° בציר ה־x הוא -60°, אותה קרן כמו 300°).



סרטוט 10: הישר $y = \frac{1}{2}$ חותך את המעגל פעמיים.

⚠ טעות נפוצה

- **מאיפה מודדים.** מהחלק **החיובי** של ציר ה־x, נגד כיוון השעון — לא מציר ה־y ולא בכיוון השעון.
- **מי זה מי.** $\sin\theta$ הוא שיעור ה־y (הגובה), ו־$\cos\theta$ הוא שיעור ה־x.
- **"זווית קהה — סינוס שלילי".** לא נכון: $\sin 150^\circ = \frac{1}{2} > 0$. ברביע השני הסינוס חיובי, והקוסינוס שלילי.
- **זווית שלילית.** $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, אבל $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ — בלי מינוס.
- **המחשבון.** במעלות — מצב DEG, ברדיאנים — מצב RAD.

🕒 הידעתם? מהמיתרים של היפרכוס ועד אוילר

הטריגונומטריה נולדה מצרכים של אסטרונומיה, ורק מאות שנים אחר כך הפכה גם לכלי של ניווט ומדידת קרקעות. היפרכוס (המאה ה־2 לפני הספירה), שנחשב לאבי הטריגונומטריה, חישב כנראה את טבלת **המיתרים** הראשונה, ותלמי (המאה ה־2 לספירה) פרסם בספרו "אלמגסט" טבלת מיתרים במעגל שרדיוסו 60.

בהודו עברו לחשב **חצי מיתר** — וזה בדיוק הסינוס שלנו, כפול הרדיוס. אריאבהטה (בסביבות שנת 500) עבד במעגל שרדיוסו 3438. ההסבר המקובל: ברדיוס הזה היקף המעגל הוא כמעט בדיוק 21,600, מספר דקות הקשת בסיבוב שלם $(60 \cdot 360)$, כך שאורך של קשת נמדד באותן יחידות כמו הרדיוס — הרעיון של הרדיאנים.

גם השם הגיע מהודו: חצי מיתר נקרא שם "ג'יה" (jya), ובערבית — "ג'יבה". בכתב הערבי לא כותבים בדרך כלל תנועות, ולפי ההסבר המקובל המילה נקראה בטעות "ג'יב" — כיס או קפל בבגד. בתרגומים ללטינית במאה ה־12 היא הפכה ל־sinus, מילה בעלת משמעות דומה. "קוסינוס" הוא קיצור של צירוף לטיני שפירושו "הסינוס של הזווית המשלימה".

מתמטיקאים בעולם המוסלמי, כמו אבו אל־וֹפא (המאה ה־10), המשיכו לפתח את התחום. את התמונה המודרנית — רדיוס 1, ו־$\sin$ ו־$\cos$ כפונקציות של כל מספר ממשי — ביסס בעיקר לאונרד אוילר, באמצע המאה ה־18.

8 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

1. חשבו בלי מחשבון: $\sin 135^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\sin(-30^\circ)$, $\cos(-45^\circ)$ ו־$\sin 270^\circ$.
2. נתון ש־$\cos\theta = -\frac{5}{13}$, ו־$\theta$ זווית ברביע השלישי. מצאו את $\sin\theta$ ואת $\tan\theta$.
3. בלי מחשבון: מה גדול יותר, $\sin 100^\circ$ או $\sin 80^\circ$?
4. שיקוף בראשית הצירים (סיבוב ב־180° סביב הראשית) מעביר את (x, y) ל־$(-x, -y)$. הוכיחו בעזרתו ש־$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$ ו־$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$.
5. פתרו את המשוואה $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ בתחום $0^\circ \le \theta < 360^\circ$.
6. הוכיחו ש־$-1 \le \sin\theta \le 1$ לכל θ. (זאת השאלה מתיבת "עצרו ובדקו".)

תשובות

1. $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$; $\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$; $\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin 270^\circ = -1$, כי הנקודה היא $(0, -1)$.
2. $\sin^2\theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$. ברביע השלישי $\sin\theta < 0$, ולכן $\sin\theta = -\frac{12}{13}$, ו־$\tan\theta = \frac{-12/13}{-5/13} = \frac{12}{5}$.
3. הם שווים: $\sin 100^\circ = \sin(180^\circ - 80^\circ) = \sin 80^\circ$. לשתי הנקודות אותו גובה.
4. $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ עוברת ל־$P'(-\cos\alpha, -\sin\alpha)$, שגם היא על מעגל היחידה. סיבוב ב־180° מוסיף לזווית 180°, ולכן P' מתאימה לזווית $180^\circ + \alpha$, ולפי ההגדרה $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$ ו־$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$.
5. $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, ולכן $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$. הישר האנכי שבו שיעור ה־x הוא $-\frac{1}{2}$ חותך את המעגל בשתי נקודות: $\theta = 120^\circ$ או $\theta = 240^\circ$ (השיקוף של 120° בציר ה־x הוא -120°, אותה קרן כמו 240°).
6. לפי זהות פיתגורס $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \le 1$, ולכן $|\sin\theta| \le 1$. ומהסרטוט: כל נקודה על מעגל היחידה נמצאת בגובה שבין -1 ל־1.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את המסמך בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנו קטעים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.