משפט הקוסינוסים

פיתגורס "המשודרג": נוסחה שעובדת בכל משולש, לא רק במשולש ישר־זווית

כיתות י'–י"א | 5 יח"ל | טריגונומטריה במישור | 3 הוכחות | כ־15 דקות קריאה

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: למה פיתגורס צריך "תיקון" כשהזווית אינה ישרה.
- הוכחה 1: גובה ומשפט פיתגורס, כולל המקרה של זווית קהה.
- הוכחה 2: מערכת צירים, בחישוב אחד שמתאים לכל זווית.
- הוכחה 3: הטלות — בלי משפט פיתגורס, ולכן היא מוכיחה גם אותו.
- דוגמאות, טעויות נפוצות ושאלות לבדיקה עצמית.

מה כדאי לדעת קודם

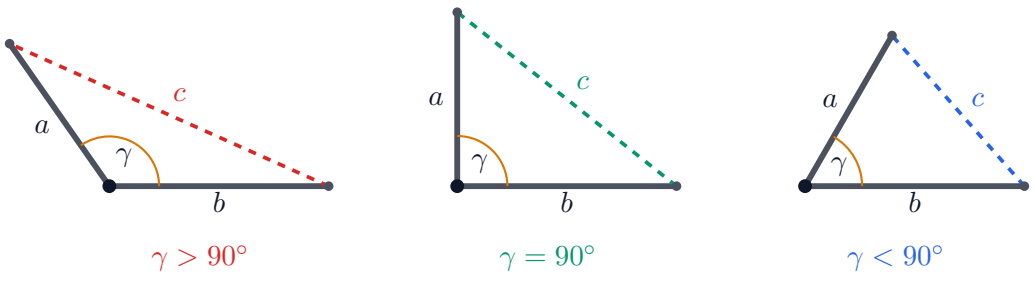
- משפט פיתגורס.
- $\sin$ ו־$\cos$ במשולש ישר־זווית.
- הזהות $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.
- לזווית קהה: $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$.
- להוכחה 2: מעגל היחידה ונוסחת המרחק.

1 האינטואיציה: מספריים שנפתחים

האינטואיציה

דמיינו מספריים: שתי זרועות באורכים קבועים a ו־b, שמחוברות בציר. המרחק בין קצות הזרועות נקרא c. ככל שפותחים את המספריים יותר — כלומר מגדילים את הזווית γ שבין הזרועות — הקצוות מתרחקים זה מזה, ו־c גדל.

רק במצב אחד יש לנו כבר נוסחה מוכנה: כשהזווית ישרה, לפי משפט פיתגורס $c^2=a^2+b^2$. כשסוגרים את המספריים מעט, c^2 קטן מ־a^2+b^2. כשפותחים אותם מעבר לזווית ישרה, c^2 גדול מ־a^2+b^2. משפט הקוסינוסים הוא פשוט פיתגורס עם **"תיקון"** שמודד בכמה הזווית רחוקה מ־90°.



סרטוט 1: אותן שתי זרועות בשלוש זוויות פתיחה שונות. הקו המקווקו הוא c.

דוגמה מספרית קטנה

נבחר $a=3$ ו־$b=4$. כשהזווית ישרה, $c=5$ (המשולש המפורסם 3–4–5). בטבלה רואים איך c^2 "זז" סביב $a^2+b^2=25$, ושמה שמחסירים מ־25 הוא בדיוק $2ab\cos\gamma=24\cos\gamma$:

γ **הזווית**	$24\cos\gamma$	$c^2=25-24\cos\gamma$	c
60°	12	13	≈ 3.61
90°	0	25	5
120°	-12	37	≈ 6.08

בזווית חדה מחסירים מ־25, בזווית ישרה לא משנים דבר, ובזווית קהה מוסיפים ל־25.

2 המשפט

נשתמש בסימון המקובל: במשולש ABC הצלע שמול הקודקוד A היא a, הצלע שמול B היא b, והצלע שמול C היא c. הזוויות שבקודקודים A, B ו־C הן α, β ו־γ.

משפט הקוסינוסים

בכל משולש ABC:

$$\boxed{c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$$

ובאותו אופן, לשתי הצלעות האחרות:

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta \qquad a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

במילים: ריבוע של צלע שווה לסכום הריבועים של שתי הצלעות האחרות, פחות פעמיים המכפלה שלהן כפול הקוסינוס של הזווית **שביניהן** — כלומר הזווית שמול הצלע הראשונה.

3 הוכחה 1: גובה ומשפט פיתגורס

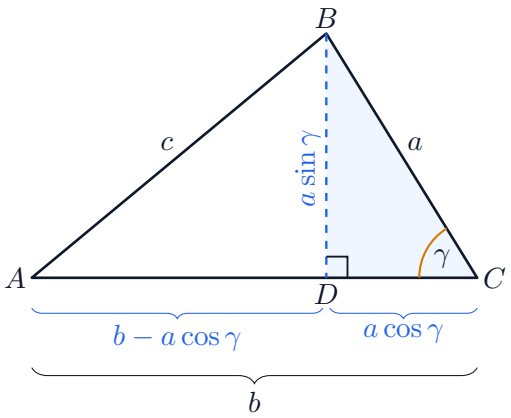
הרעיון נוריד גובה שיחלק את המשולש לשני משולשים ישרי־זווית. בכל אחד מהם מותר להשתמש בפיתגורס ובהגדרות של $\sin$ ו־$\cos$. אחר כך נחבר את המידע משני החלקים.

מקרה א': הזווית γ חדה

מהקודקוד B נוריד גובה לישר AC, ונסמן את עקב הגובה ב־D (סרטוט 2). נוצרו שני משולשים ישרי־זווית:

- $\triangle BDC$ — היתר שלו הוא a, ואחת מזוויותיו היא γ.
- $\triangle BDA$ — היתר שלו הוא c, הצלע שאותה אנחנו רוצים לחשב.

התוכנית: לחשב את שני הניצבים של $\triangle BDA$ בעזרת a, b ו־γ, ואז להפעיל עליו את פיתגורס.



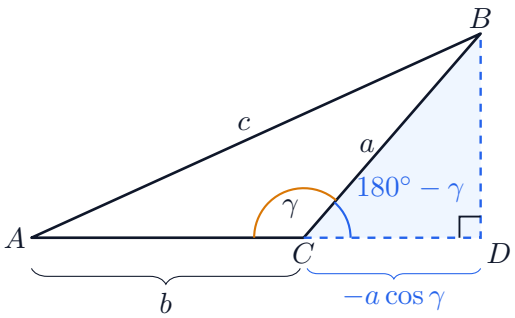
סרטוט 2: הגובה BD מחלק את $\triangle ABC$ לשני משולשים ישרי־זווית.

	טענה	נימוק
1	$BD = a\sin\gamma$	ב־$\triangle BDC$ מתקיים $\sin\gamma = \frac{\text{ניצב מול}}{\text{יתר}} = \frac{BD}{a}$
2	$DC = a\cos\gamma$	ב־$\triangle BDC$ מתקיים $\cos\gamma = \frac{\text{ניצב ליד}}{\text{יתר}} = \frac{DC}{a}$
3	$AD = b - a\cos\gamma$	$AD = AC - DC$
4	$c^2 = BD^2 + AD^2$	משפט פיתגורס ב־$\triangle BDA$
5	$c^2 = a^2\sin^2\gamma + (b - a\cos\gamma)^2$	הצבה של צעדים 1 ו־3
6	$c^2 = a^2\sin^2\gamma + b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2\cos^2\gamma$	פתיחת סוגריים: $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
7	$c^2 = a^2\left(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma\right) + b^2 - 2ab\cos\gamma$	הוצאת a^2 כגורם משותף
8	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$	$\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$

מקרה ב׳: הזווית γ קהה

כשהזווית γ קהה, הגובה מ־B נופל **מחוץ** למשולש, על ההמשך של AC מעבר ל־C.
במשולש ישר־הזווית BDC הזווית שבקודקוד C היא עכשיו $\angle BCD = 180^\circ - \gamma$, הזווית הצמודה ל־$\gamma$.
נשתמש בזהויות של זוויות צמודות:

$$\sin(180^\circ - \gamma) = \sin\gamma$$
$$\cos(180^\circ - \gamma) = -\cos\gamma$$



סרטוט 3: כשהזווית γ קהה, D נמצאת מחוץ למשולש.

	טענה	נימוק
1	$BD = a\sin(180^\circ - \gamma) = a\sin\gamma$	ב־$\triangle BDC$, וזהות הזוויות הצמודות
2	$CD = a\cos(180^\circ - \gamma) = -a\cos\gamma$	כנ"ל. זה מספר חיובי, כי $\cos\gamma < 0$
3	$AD = AC + CD = b - a\cos\gamma$	D נמצאת מעבר ל־C
4	$c^2 = BD^2 + AD^2 = a^2\sin^2\gamma + (b - a\cos\gamma)^2$	פיתגורס ב־$\triangle BDA$
5	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$	אותו חישוב כמו בצעדים 6–8 במקרה א׳

והמקרה של זווית ישרה? אם $\gamma = 90^\circ$, אז $\cos\gamma = 0$, והנוסחה הופכת למשפט פיתגורס עצמו: $c^2 = a^2 + b^2$. כך כיסינו את שלושת המקרים של γ. ואם γ חדה אבל α קהה? אז D נופלת מעבר ל־A, אבל החישוב של מקרה א׳ עובד גם שם, כי בצעד 5 הביטוי ל־AD מועלה בריבוע (בדקו זאת בתיבה שלמטה).

מש"ל ■

עצרו ובדקו

בצעד 3 של מקרה א׳ הנחנו ש־D נמצאת בין A ל־C. מה קורה אם הזווית α קהה, ו־D נופלת מחוץ לקטע, מעבר ל־A?

רמז: חשבו למה שווה AD במקרה הזה, ומה קורה לביטוי הזה בצעד 5 שם.

מה למדנו מהוכחה 1

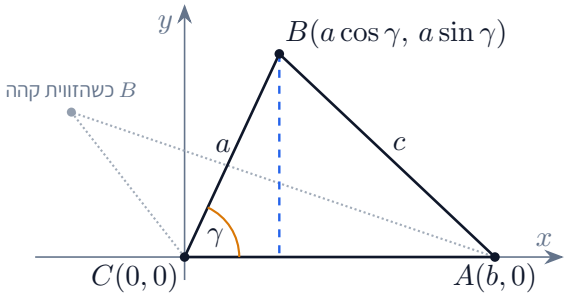
בשני המקרים התקבל **אותו** ביטוי, $AD = b - a\cos\gamma$, אף שבכל מקרה הגענו אליו בדרך אחרת. זה לא מקרי: $a\cos\gamma$ הוא המרחק **עם סימן** מ־C לעקב הגובה D, והסימן של $\cos\gamma$ "יודע" באיזה צד של C נופלת D — לכיוון A או מעבר ל־C. ההוכחה הבאה מנצלת את העובדה הזאת עד הסוף.

4 הוכחה 2: מערכת צירים — חישוב אחד לכל המקרים

הרעיון "נשכיב" את המשולש על מערכת צירים כך שהקודקוד C יהיה בראשית והצלע CA תונח על החלק החיובי של ציר ה־x. אז את c אפשר לחשב כמרחק בין שתי נקודות.

שיעורי הקודקודים:

- $C = (0,0)$ — הראשית.
- $A = (b,0)$ — כי $CA = b$ והצלע מונחת על ציר ה־x.
- $B = (a\cos\gamma,\ a\sin\gamma)$ — נקודה במרחק a מהראשית, על קרן שיוצרת זווית γ עם ציר ה־x החיובי.



סרטוט 4: המשולש במערכת צירים. המקרה הקהה מסומן באפור.

השיעורים של B נובעים מהגדרת $\sin$ ו־$\cos$ במעגל היחידה, ולכן הם נכונים **לכל** זווית $0^\circ < \gamma < 180^\circ$: חדה, ישרה או קהה. כשהזווית קהה, $\cos\gamma < 0$, והנקודה B פשוט נמצאת משמאל לציר ה־y.

נחשב את $c = AB$ בעזרת נוסחת המרחק $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$:

	טענה	נימוק
(1)	$c^2 = (a\cos\gamma - b)^2 + (a\sin\gamma - 0)^2$	נוסחת המרחק בין A ל־B
(2)	$c^2 = a^2\cos^2\gamma - 2ab\cos\gamma + b^2 + a^2\sin^2\gamma$	פתיחת סוגריים
(3)	$c^2 = a^2\left(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma\right) + b^2 - 2ab\cos\gamma$	סידור מחדש והוצאת a^2
(4)	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$	$\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$

מש"ל ■

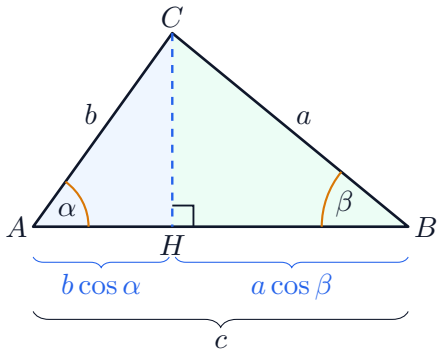
אין כאן מקרים בכלל: את "העבודה השחורה" — לבדוק אם הגובה נופל בפנים או בחוץ — עשה בשבילנו מעגל היחידה, שמגדיר את $\cos$ גם לזוויות קהות.

5 הוכחה 3: הטלות — בלי משפט פיתגורס

הרעיון נוריד מ־C גובה לישר AB, ונסמן את עקבו ב־H. הגובה מחלק את הצלע c לשני קטעים, AH ו־HB — **ההטלות** של הצלעות b ו־a על c. במשולשים ישרי־הזווית AHC ו־BHC:

$$AH = b\cos\alpha, \qquad HB = a\cos\beta.$$

ולכן כל צלע היא סכום ההטלות של שתי הצלעות האחרות עליה: $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$.



סרטוט 5: הגובה CH מחלק את c לשתי הטלות.

ואם אחת הזוויות קהה? נניח ש־α קהה. אז H נופלת מעבר ל־A, והצלע c היא **הפרש** של שני קטעים. כיוון ש־$HA = b\cos(180^\circ - \alpha) = -b\cos\alpha$, מקבלים

$$c = HB - HA = a\cos\beta + b\cos\alpha,$$

כלומר הקוסינוס השלילי "מחסר" את הקטע בעצמו. וכש־α ישרה, $H = A$ ו־$b\cos\alpha = 0$. לכן נוסחת ההטלות נכונה בכל משולש.

	טענה	נימוק
1	$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$	ההטלות על c (הגובה מ־C)
2	$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$,$b = a\cos\gamma + c\cos\alpha$	אותו נימוק, עם הגבהים מ־A ומ־B
3	$c^2 = ac\cos\beta + bc\cos\alpha$	כפל צעד 1 ב־c
4	$a^2 + b^2 = 2ab\cos\gamma + ac\cos\beta + bc\cos\alpha$	כפל שני השוויונות של צעד 2 ב־a וב־b, וחיבור
5	$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos\gamma$	צעד 4 פחות צעד 3: שני האיברים האחרונים מתבטלים
6	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$	העברת אגפים

■ מש״ל

בונוס. בהוכחה הזאת לא השתמשנו במשפט פיתגורס, וגם לא בזהות $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$. לכן מותר להציב בה $\gamma = 90°$: מקבלים $c^2 = a^2 + b^2$. כלומר משפט הקוסינוסים לא רק **מכליל** את משפט פיתגורס — הוא גם מוכיח אותו.

6 שלוש הדרכים זו מול זו

	הוכחה 1: גובה ופיתגורס	הוכחה 2: מערכת צירים	הוכחה 3: הטלות
הרעיון	לפרק את המשולש לשני משולשים ישרי־זווית	להפוך את המשולש לשלוש נקודות במישור	כל צלע היא סכום ההטלות של שתי האחרות
הכלים	פיתגורס, $\sin$ ו־$\cos$ במשולש ישר־זווית, זוויות צמודות	נוסחת המרחק, $\sin$ ו־$\cos$ במעגל היחידה	$\cos$ במשולש ישר־זווית, ואלגברה
מקרים	זווית חדה וזווית קהה בנפרד	חישוב אחד לכל זווית	הקוסינוס השלילי מטפל בזווית הקהה
היתרון	״רואים״ בסרטוט מאיפה מגיע כל איבר	קצרה ואלגנטית, בלי סרטוטים מסובכים	בלי פיתגורס — ולכן מוכיחה גם אותו

7 מה עושים עם המשפט?

שימוש 1: מוצאים צלע משתי צלעות והזווית שביניהן

דוגמה מספרית

במשולש $a=5$, $b=8$ ו־$\gamma=60^\circ$. מצאו את c.

$c^2=5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cdot\cos60^\circ=25+64-80\cdot\frac{1}{2}=89-40=49$, ולכן $c=7$.

שימוש 2: מוצאים זווית משלוש צלעות

מבודדים את $\cos\gamma$ מהמשפט:

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

דוגמה מספרית

הצלעות של משולש הן 5, 7 ו־8. מצאו את הזווית שמול הצלע שאורכה 7.

$\cos\gamma=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot5\cdot8}=\frac{40}{80}=\frac{1}{2}$, ולכן $\gamma=60^\circ$.

שימוש 3: חדה, ישרה או קהה – בלי לחשב זווית

מהנוסחה $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ רואים שהסימן של $\cos\gamma$ נקבע לפי הסימן של $a^2+b^2-c^2$:

$c^2<a^2+b^2$	$c^2=a^2+b^2$	$c^2>a^2+b^2$
γ חדה	γ ישרה	γ קהה

לדוגמה, במשולש שצלעותיו 4, 5 ו־7 מתקיים $7^2=49>16+25=41$, ולכן הזווית שמול הצלע 7 קהה. מספיק לבדוק את הזווית שמול הצלע הארוכה ביותר, כי רק היא יכולה להיות ישרה או קהה.

טעות נפוצה

- **זווית לא נכונה.** ב־$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ הזווית חייבת להיות **בין** a ל־b, כלומר מול c. זווית אחרת במשולש תיתן תוצאה שגויה.
- **סדר פעולות.** מחשבים קודם את $2ab\cos\gamma$, ורק אחר כך מחסירים. "$(a^2+b^2-2ab)\cdot\cos\gamma$" שגוי.
- **מינוס כפול מינוס.** בזווית קהה $\cos\gamma<0$, ולכן $-2ab\cos\gamma$ הוא מספר חיובי. למשל, ב־$\gamma=120^\circ$ מקבלים $-2ab\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=+ab$.
- **המחשבון.** ודאו שהמחשבון מוגדר למעלות (DEG) ולא לרדיאנים.

הידעתם?

את המשפט אפשר למצוא כבר ב"יסודות" של אוקלידס (בערך 300 לפני הספירה), בספר השני, טענות 12 ו־13. אוקלידס עוד לא הכיר קוסינוס, ולכן ניסח את המשפט בשפה של שטחי מלבנים, ובשתי טענות נפרדות: אחת למשולש קהה־זווית ואחת למשולש חד־זווית — בדיוק כמו שני המקרים בהוכחה 1.

הניסוח הטריגונומטרי שאנחנו מכירים התפתח רק יותר מאלף שנה אחר כך. המתמטיקאי הפרסי ע'יאת' א־דין ג'משיד אל־כאשי (המאה ה־15) הציג אותו בצורה נוחה לחישובים. לכבודו, בספרי הלימוד בצרפת קוראים למשפט, מאז שנות ה־90 של המאה ה־20, "משפט אל־כאשי".

8 בדקו את עצמכם

חמש שאלות קצרות

1. במשולש $a=3$, $b=5$ ו־ $\gamma=120^\circ$. מצאו את c.
2. במקרה ב' של הוכחה 1 קיבלנו $CD=-a\cos\gamma$. איך ייתכן שאורך של קטע שווה למספר עם מינוס?
3. צלעות המשולש הן 6, 7 ו־10. האם המשולש חד־זווית, ישר־זווית או קהה־זווית?
4. כתבו את משפט הקוסינוסים עבור הצלע b.
5. מה קורה בהוכחה 1 אם הזווית α קהה? (זאת השאלה מתיבת "עצרו ובדקו".)

תשובות

1. $c^2=9+25-2\cdot3\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=34+15=49$, ולכן $c=7$.
2. כי γ קהה, ולכן $\cos\gamma<0$. המספר $-a\cos\gamma$ הוא חיובי, והוא אכן האורך של CD.
3. הצלע הארוכה היא 10, ו־$10^2=100>6^2+7^2=85$, ולכן המשולש קהה־זווית.
4. $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$.
5. אז D נמצאת מעבר ל־A, ו־$AD=DC-AC=a\cos\gamma-b$. זה הנגדי של $b-a\cos\gamma$, ובצעד 5 מעלים אותו בריבוע — ולכן התוצאה זהה: $(a\cos\gamma-b)^2=(b-a\cos\gamma)^2$.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את המסמך בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנו קטעים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.