

משפט הסינוסים

כל צלע חלקי הסינוס של הזווית שמולה –
אותו מספר בדיוק, וזה קוטר המעגל החוסם

כ-18 דקות קריאה

3 הוכחות

טריגונומטריה במישור

4-5 יח"ל

כיתות י'-י"א

מה כדאי לדעת קודם

- $\sin$ במשולש ישר-זווית.
- הזהות $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.
- להוכחה 2: זוויות היקפיות במעגל.
- להוכחה 3: השטח $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: למה הצלע "מתאימה" לסינוס של הזווית שמולה, ולא לזווית עצמה.
- הוכחה 1: גובה אחד בשני חישובים, כולל זווית קהה.
- הוכחה 2: המעגל החוסם – ומאיפה מגיע ה- $2R$.
- הוכחה 3: בשתי שורות, מנוסחת השטח.
- המקרה הדו-משמעי: מתי יש שני משולשים, אחד או אף לא אחד.

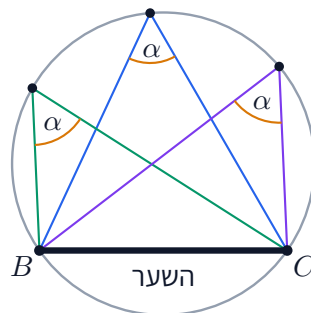
1 האינטואיציה: שער במגרש עגול

כבר בחטיבת הביניים למדנו שבכל משולש, מול הזווית הגדולה יותר נמצאת הצלע הארוכה יותר. אבל "ארוכה יותר" זו לא נוסחה. כמה ארוכה? מתבקש לנחש שהצלע נמצאת ביחס ישר לזווית: זווית כפולה – צלע כפולה. מייד נראה שהניחוש הזה שגוי. מה שנכון הוא שהצלע נמצאת ביחס ישר לסינוס של הזווית.

האינטואיציה

דמיינו מגרש עגול. אתם עומדים על הקו שמקיף אותו ומסתכלים על שער: קטע ישר שמחבר שתי נקודות על הקו הזה. מכל נקודה על הקו (מאותו צד של השער) רואים את השער באותה זווית בדיוק. מהצד הרחוק של המגרש, שער רחב יותר נראה בזווית גדולה יותר – אבל לא ביחס ישר: גם שער ענק, ברוב של כל המגרש, נראה בזווית של 90° בלבד.

משפט הסינוסים אומר בדיוק מה הקשר: **רוחב השער שווה לקוטר המגרש כפול הסינוס של הזווית.** במשולש, כל צלע היא "שער" כזה, והקודקוד שמולה הוא הצופה.



סרטוט 1: משלוש נקודות שונות על המעגל רואים את המיתר BC באותה זווית α .

דוגמה מספרית: המשולש $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

במשולש שזוויותיו $30^\circ, 60^\circ$ ו- 90° הצלעות הן $1, \sqrt{3}$ ו-2. נחלק כל צלע פעם בזווית שמולה, ופעם בסינוס של הזווית הזאת:

הזווית	הצלע שמולה	הצלע חלקי הזווית	הצלע חלקי הסינוס
30°	1	≈ 0.033	$1 \div \frac{1}{2} = 2$
60°	$\sqrt{3} \approx 1.73$	≈ 0.029	$\sqrt{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$
90°	2	≈ 0.022	$2 \div 1 = 2$

היחס בין צלע לזווית משתנה, אבל היחס בין צלע לסינוס קבוע: 2. וזה בדיוק הקוטר $2R$, כי במשולש ישר-זווית היתר הוא קוטר של המעגל החוסם.

2 המשפט

נשתמש בסימון המקובל: במשולש ABC הצלע שמול הקודקוד A היא a , הצלע שמול B היא b , והצלע שמול C היא c . הזוויות שבקודקודים A, B ו- C הן α, β ו- γ . R הוא הרדיוס של המעגל החוסם את המשולש – המעגל היחיד שעובר דרך שלושת הקודקודים.

משפט הסינוסים

בכל משולש ABC :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

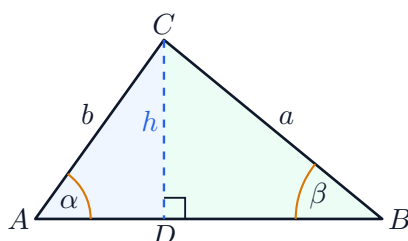
במילים: היחס בין צלע לסינוס של הזווית שמולה זהה בכל שלוש הצלעות – והוא קוטר המעגל החוסם.

צורות שקולות: $a = 2R \sin \alpha$, $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$

3 הוכחה 1: גובה אחד, שני חישובים

הרעיון נוריד גובה ונחשב את אורכו פעמיים, פעם מכל צד שלו. שני החישובים חייבים לתת אותו מספר.

מקרה א': הזוויות α ו- β חדות



מהקודקוד C נוריד גובה לצלע AB . נסמן את עקב הגובה ב- D ואת אורך הגובה ב- h . כיוון ש- α ו- β חדות, נמצאת D בין A ל- B . הגובה מחלק את המשולש לשני משולשים ישרי-זווית: $\triangle ADC$, שהיתר שלו b , ו- $\triangle BDC$, שהיתר שלו a .

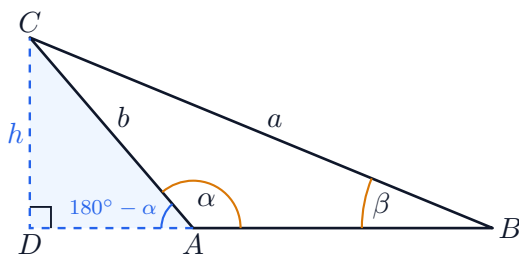
סרטוט 2: הגובה CD שייך לשני משולשים ישרי-זווית.

נימוק	טענה
ב- $\triangle ADC$ מתקיים $\sin \alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{h}{b}$	$h = b \sin \alpha$ ①
ב- $\triangle BDC$ מתקיים $\sin \beta = \frac{CD}{BC} = \frac{h}{a}$	$h = a \sin \beta$ ②
שני ביטויים לאותו גובה h	$b \sin \alpha = a \sin \beta$ ③
חילוק שני האגפים ב- $\sin \alpha \cdot \sin \beta$	$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ ④

עצרו ובדקו ✓

בצעד 4 חילקנו ב- $\sin \alpha \cdot \sin \beta$. למה מותר לחלק במספר הזה? האם הוא יכול להיות אפס?

מקרה ב': אחת הזוויות קהה



סרטוט 3: כשהזווית α קהה, הגובה CD נמצא מחוץ למשולש.

נניח ש- α קהה (אם β קהה, מחליפים את התפקידים). עכשיו הגובה מ- C נופל **מחוץ** למשולש, על ההמשך של BA מעבר ל- A . במשולש ישר-הזווית ADC הזווית שבקודקוד A היא הזווית הצמודה ל- α , כלומר $180^\circ - \alpha$. אבל לשתיהן אותו סינוס:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

נימוק	טענה
ב- $\triangle ADC$, וזהות הזוויות הצמודות	$h = b \sin(180^\circ - \alpha) = b \sin \alpha$ ①
ב- $\triangle BDC$, בדיוק כמו קודם	$h = a \sin \beta$ ②
השוואה וחילוק, כמו בצעדים 3-4 במקרה א'	$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ ③

ואם $\alpha = 90^\circ$ אז $D = A$, והגובה הוא הצלע AC עצמה: $h = b = b \sin 90^\circ$. שוב $h = b \sin \alpha$, והחישוב ממשיך כמו קודם.

השלמת ההוכחה. הראינו ש- $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ בכל משולש. אם נוריד את הגובה מהקודקוד A לצלע BC , אותו נימוק בדיוק ייתן $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$. ביחד:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

מש"ל

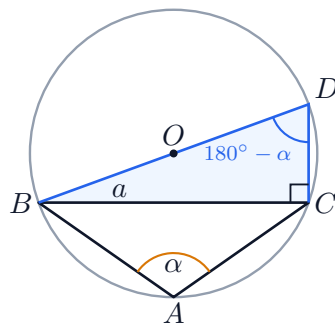
ההוכחה הזאת מראה שהיחסים שווים זה לזה, אבל לא אומרת **לאיזה מספר** הם שווים. ההוכחה הבאה עונה על השאלה הזאת: הם שווים לקוטר $2R$.

4 הוכחה 2: המעגל החוסם – ומאיפה מגיע ה- $2R$

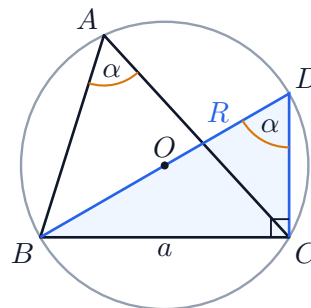
ארבע עובדות על מעגלים שנשתמש בהן:

- לכל משולש יש מעגל חוסם. המרכז שלו הוא נקודת המפגש של האנכים האמצעיים לצלעות.
- זוויות היקפיות שנשענות על אותה קשת שוות זו לזו.
- זווית היקפית שנשענת על קוטר היא זווית ישרה.
- במרובע חסום במעגל, סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא 180° .

הרעיון נעביר קוטר מהנקודה B , ונקבל משולש ישר-זווית שהיתר שלו הוא הקוטר $2R$, ואחד הניצבים שלו הוא הצלע a . הזווית שמול a במשולש הזה שווה ל- α או משלימה אותה ל- 180° . בשני המצבים הסינוס זהה. נעביר מ- B את הקוטר BD (הנקודה D היא הקצה השני שלו על המעגל), ונחבר את D ל- C . נבדוק שני מצבים, לפי המקום של D :



מצב 2 – D ו- A משני צדי BC



מצב 1 – D ו- A באותו צד של BC

סרטוט 4: הקוטר BD והמשולש ישר-הזווית BCD (צבוע).

מצב 1: הנקודות D ו- A באותו צד של BC

נימוק	טענה
BD הוא קוטר	$BD = 2R$ (1)
זווית היקפית שנשענת על הקוטר BD	$\angle BCD = 90^\circ$ (2)
זוויות היקפיות שנשענות על אותה קשת BC	$\angle BDC = \angle BAC = \alpha$ (3)
ב- $\triangle BCD$: הניצב שמול הזווית חלקי היתר	$\sin \alpha = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$ (4)
סידור מחדש	$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ (5)

מצב 2: הנקודות D ו- A משני צדי BC

עכשיו $ABDC$ הוא מרובע חסום במעגל, והזוויות שבקודקודים A ו- D נגדיות בו.

טענה	נימוק
① $\angle BDC = 180^\circ - \alpha$	במרובע חסום סכום הזוויות הנגדיות הוא 180°
② $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$	ב- $\triangle BCD$ (גם כאן $\angle BCD = 90^\circ$)
③ $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$, ולכן $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

ומה אם D נופלת בדיוק על C ? זה קורה כש- BC עצמו הוא קוטר. אז α היא זווית היקפית שנשענת על קוטר, כלומר $\alpha = 90^\circ$, ולכן $a = 2R = 2R \sin 90^\circ$.

השלמת ההוכחה. הראינו ש- $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$. אותה בנייה בדיוק, עם קוטר מקודקוד אחר, נותנת גם $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$ וגם $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$. כלומר שלושת היחסים שווים לאותו מספר – הקוטר.

מש"ל

אפשר להראות שמצב 1 קורה בדיוק כשהזווית α חדה, ומצב 2 – כשהיא קהה. אבל להוכחה זה לא נחוץ: בכל מצב הגענו לאותה תוצאה.

5 הוכחה 3: בשתי שורות, מנוסחת השטח

הרעיון את שטח המשולש אפשר לחשב בשלוש דרכים, לפי כל זוג צלעות והזווית שביניהן. שלוש התוצאות שוות, כי זה אותו שטח.

אם כבר הוכחתם את נוסחת השטח $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ (ראו בסדרה את המסמך "נוסחאות לשטח משולש"), משפט הסינוסים נובע ממנה מייד:

טענה	נימוק
① $\frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$	שלוש דרכים לחשב את אותו שטח
② $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$	חילוק כל האגפים ב- $\frac{1}{2}abc$
③ $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$	היפוך כל השברים (כולם חיוביים)

מש"ל

אין כאן הוכחה מעגלית: את נוסחת השטח מוכיחים בעזרת גובה בלבד, בלי משפט הסינוסים.

בנוסף: עוד נוסחה לשטח 🔑

נשלב את הוכחה 3 עם הוכחה 2. לפי הוכחה 2, $\sin \gamma = \frac{c}{2R}$, ולכן:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

שטח המשולש שווה למכפלת שלוש הצלעות חלקי $4R$ – פי ארבעה מרדיוס המעגל החוסם.

6 שלוש הדרכים זו מול זו

הוכחה 1: גובה	הוכחה 2: מעגל חוסם	הוכחה 3: שטח	
לחשב גובה אחד פעמיים	משולש ישר-זווית שהיתר שלו קוטר	לחשב שטח אחד בשלוש דרכים	הרעיון
$\sin$ במשולש ישר-זווית, זוויות צמודות	זוויות היקפיות, מרובע חסום	הנוסחה $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$	הכלים
שהיחסים שווים	שהיחסים שווים ל- $2R$	שהיחסים שווים	מה מקבלים
פשוטה, צריכה רק משולש ישר-זווית	מסבירה מה המספר המשותף	הכי קצרה	היתרון

7 מה עושים עם המשפט?

שימוש 1: שתי זוויות וצלע – וכל השאר

דוגמה מספרית 🧮

במשולש $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$ ו- $a = 10$. מצאו את שתי הצלעות האחרות. הזווית השלישית: $\gamma = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$. לפי משפט הסינוסים:

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 5\sqrt{6} \approx 12.25$$

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{10 \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = 5(\sqrt{3} + 1) \approx 13.66 \quad (\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ כי})$$

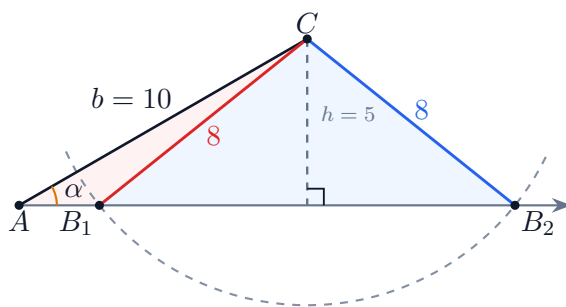
שימוש 2: הרדיוס של המעגל החוסם

דוגמה מספרית

מצאו את הרדיוס של המעגל החוסם משולש שווה-צלעות שאורך צלעו 6.
 כל זווית היא 60° , ולכן $2R = \frac{6}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ ומכאן $R = 2\sqrt{3} \approx 3.46$.

שימוש 3: המקרה הדו־משמעי – שני משולשים, אחד או אף לא אחד

נניח שנתונות שתי צלעות, a ו- b , וזווית α שמול הצלע a – כלומר זווית שאינה בין שתי הצלעות הנתונות. כאן מסתתרת הפתעה: הנתונים לא תמיד קובעים משולש אחד.



דוגמה: $a = 8$ ו- $b = AC = 10$, $\alpha = 30^\circ$.
 הקודקוד B צריך להיות על הקרן שיוצאת מ- A ,
 במרחק 8 מ- C – כלומר על מעגל שמרכזו C
 ורדיוסו 8. המעגל חותך את הקרן בשתי נקודות,
 B_1 ו- B_2 , ולכן יש **שני** משולשים.
 לפי משפט הסינוסים:

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} = \frac{10 \cdot \frac{1}{2}}{8} = 0.625$$

סרטוט 5: המעגל שמרכזו C ורדיוסו 8 חותך את הקרן פעמיים.

ולכן $\beta \approx 38.7^\circ$ או $\beta \approx 141.3^\circ$. שתי הזוויות אפשריות, כי גם $30^\circ + 141.3^\circ < 180^\circ$.

הכול תלוי באורך של a לעומת הגובה $h = b \sin \alpha$ מ- C לקרן. עם $\alpha = 30^\circ$ ו- $b = 10$ הגובה הוא $h = 5$:

הצלע a	המצב	$\sin \beta = \frac{5}{a}$	מספר המשולשים
$a = 4$	$a < h$ – המעגל לא מגיע לקרן	$1.25 > 1$	אין משולש
$a = 5$	$a = h$ – המעגל משיק לקרן	$\beta = 90^\circ, 1$	אחד (ישר-זווית)
$a = 8$	$h < a < b$	0.625	שניים
$a = 12$	$a \geq b$ – חיתוך אחד על הקרן	≈ 0.417	אחד

כש- $a = 12$ מתקבל $\beta \approx 24.6^\circ$ או $\beta \approx 155.4^\circ$, אבל $30^\circ + 155.4^\circ > 180^\circ$, ולכן רק הפתרון הראשון אפשרי. (כאן α חדה. אם α קהה או ישרה, יש משולש אחד כש- $a > b$, ואף לא אחד כש- $a \leq b$.)

⚠ טעות נפוצה

- פתרון חסר או פתרון מיותר.** לכל ערך של $\sin \beta$ (בין 0 ל-1) מתאימות בדרך כלל שתי זוויות: β ו- $180^\circ - \beta$. בודקים את שתיהן, ומשאירים כל זווית β שמקיימת $\alpha + \beta < 180^\circ$.
- צלע וזווית "לא מתאימות".** במשפט, כל צלע מחולקת בסינוס של הזווית **שמולה**, לא של זווית שלידה.
- הכלי הלא נכון.** נתונות שתי צלעות והזווית **שביניהן**, או שלוש צלעות? כאן משפט הסינוסים לא עוזר – משתמשים במשפט הקוסינוסים.

הידעתם?

המילה "סינוס" עשתה דרך ארוכה. מתמטיקאים בהודו, לפני כ-1,500 שנה, השתמשו ב"חצי מיתר", ובקיצור קראו לו "ג'יה" – בסנסקריט, המיתר של קשת (כלי הנשק). בערבית נכתבה המילה בלי תנועות, ומאוחר יותר נקראה "ג'יב" – מילה שפירושה כיס או קפל. מתרגמים אירופאים במאה ה-12 תרגמו אותה ללטינית: $\sin$, כלומר קפל.

ומה הקשר ל- $2R$? האסטרונום היווני תלמי (המאה ה-2 לספירה) חיבר טבלה של אורכי **מיתרים** במעגל. לפי הוכחה 2, המיתר שמול זווית היקפית α הוא בדיוק $2R \sin \alpha$ – כך שהטבלה של תלמי כבר "הכילה" את הקשר שבמשפט הסינוסים. את המשפט למשולשים במישור ניסח באופן מסודר המתמטיקאי והאסטרונום הפרסי נסיר אדין אטוסי, במאה ה-13.

8 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

1. במשולש $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$ ו- $a = 8$. מצאו את b .
2. במשולש $a = 7$ ו- $\alpha = 150^\circ$. מצאו את הרדיוס של המעגל החוסם.
3. הראו שבמשולש ישר-זווית ($\gamma = 90^\circ$) רדיוס המעגל החוסם הוא חצי היתר.
4. נתון $\alpha = 30^\circ$, $b = 10$ ו- $a = 6$. כמה משולשים מתאימים לנתונים? מצאו את β בכל אחד מהם.
5. הסבירו למה אין משולש שבו $a = 3$, $b = 10$ ו- $\alpha = 30^\circ$.
6. למה מותר לחלק ב- $\sin \alpha \cdot \sin \beta$ בהוכחה 1? (זאת השאלה מתיבת "עצרו ובדקו").

תשובות

1. $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 8\sqrt{2} \approx 11.31$
2. $R = 7$ ולכן $2R = \frac{7}{\sin 150^\circ} = \frac{7}{\frac{1}{2}} = 14$
3. לפי המשפט, $\frac{c}{\sin 90^\circ} = 2R$. כיוון ש- $\sin 90^\circ = 1$, מקבלים $c = 2R$, כלומר $R = \frac{c}{2}$.
4. הגובה הוא $h = b \sin \alpha = 5$, ולכן יש שני משולשים. $\sin \beta = \frac{10 \cdot \frac{1}{2}}{6} = \frac{5}{6}$, ולכן $\beta \approx 56.4^\circ$ או $\beta \approx 123.6^\circ$. שתי הזוויות אפשריות, כי $30^\circ + 123.6^\circ < 180^\circ$.
5. לפי המשפט $\sin \beta = \frac{10 \cdot \frac{1}{2}}{3} = \frac{5}{3} > 1$, ואין זווית שהסינוס שלה גדול מ-1. בסרטוט: הגובה מ- C לקרן הוא 5, והמעגל שרדיוסו 3 לא מגיע אליה.
6. כל זווית במשולש נמצאת בין 0° ל- 180° , ולכן הסינוס שלה חיובי. מכפלה של שני מספרים חיוביים אינה אפס.