

נוסחאות לשטח משולש

חצי מכפלת שתי צלעות בסינוס הזווית שביניהן –
מאיפה זה מגיע, ומה עוד אפשר לעשות עם זה

כ-20 דקות קריאה

2 הוכחות לכל נוסחה

טריגונומטריה במישור

4-5 יח"ל

כיתות י'-י"א

מה כדאי לדעת קודם

- השטח: חצי בסיס כפול גובה.
- $\cos^{-1} \sin$ במשולש ישר-זווית.
- הזהות $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.
- להוכחה 2: הגדרת $\cos^{-1} \sin$ במעגל היחידה.
- לשטח מצלע ושלוש זוויות: משפט הסינוסים.
- להעמקה: משפט הקוסינוסים.

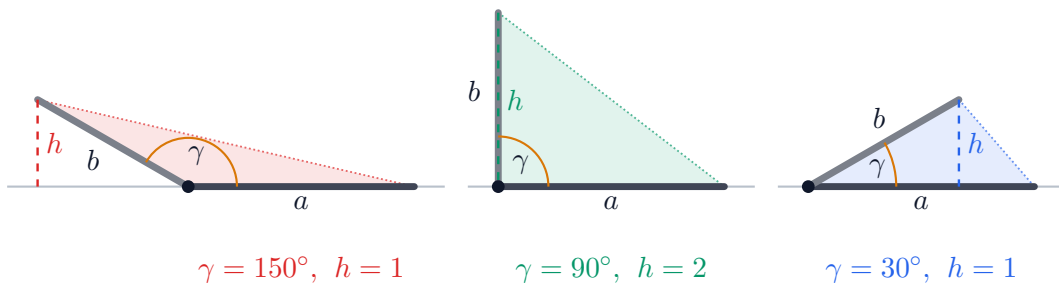
מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: למה הסינוס "מחליף" את הגובה.
- הנוסחה $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ בשתי דרכים, כולל זווית קהה.
- מסקנות: שטח מקבילית ושטח מרובע לפי האלכסונים.
- שטח מצלע אחת ושלוש זוויות, בשתי דרכים.
- להעמקה: נוסחת הרון. דוגמאות ושאלות לבדיקה עצמית.

1 האינטואיציה: כמה גבוה המסך?

האינטואיציה

דמיינו מחשב נייד פתוח על שולחן. המקלדת שוכבת על השולחן, והמסך מחובר אליה בציר. כמה גבוה מעל השולחן נמצא הקצה העליון של המסך? זה תלוי בזווית הפתיחה γ : כשהמסך כמעט סגור, הקצה נמוך. כשהמסך זקוף, בזווית של 90° , הקצה מגיע לגובה המרבי. וכשמים את המסך אחורה, הקצה יורד שוב. עכשיו נסתכל על המשולש שיוצרים המקלדת (באורך a), המסך (באורך b) והקו שמחבר את הקצוות שלהם. השטח שלו הוא חצי בסיס כפול גובה. הבסיס – המקלדת – לא משתנה, ולכן כל השינוי בשטח מגיע מהגובה. והגובה הוא בדיוק $b \sin \gamma$: הסינוס אומר איזה חלק מאורך המסך "עומד" מעל השולחן.



סרטוט 1: מקלדת a ומסך $b = 2$ בשלוש זוויות פתיחה. הגובה h של קצה המסך הוא $b \sin \gamma$.

דוגמה מספרית קטנה

נבחר $a = 6$ ו- $b = 4$, ונשנה רק את הזווית. הגובה הוא $h = 4 \sin \gamma$, והשטח הוא $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h = 12 \sin \gamma$.

150°	120°	90°	60°	30°	הזווית γ
2	≈ 3.46	4	≈ 3.46	2	הגובה $h = 4 \sin \gamma$
6	≈ 10.39	12	≈ 10.39	6	השטח $S = 12 \sin \gamma$

השטח הגדול ביותר מתקבל בזווית ישרה. ושימו לב: זוויות שמסלימות זו את זו ל- 180° , כמו 30° ו- 150° , נותנות בדיוק אותו שטח.

2 הנוסחה

נשתמש בסימון המקובל: במשולש ABC הצלע שמול הקודקוד A היא a , הצלע שמול B היא b , והצלע שמול C היא c . הזוויות שבקודקודים A , B ו- C הן α , β ו- γ . שימו לב: הזווית γ היא הזווית שבין הצלעות a ל- b .

שטח משולש לפי שתי צלעות והזווית שביניהן

בכל משולש ABC :

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

ובאותו אופן, לכל זוג צלעות והזווית שביניהן:

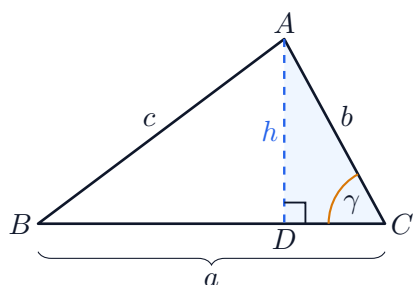
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

במילים: שטח משולש שווה לחצי מכפלת שתי צלעות, כפול הסינוס של הזווית שביניהן.

3 הוכחה 1: הגובה הוא $b \sin \gamma$

הרעיון נוריד גובה לצלע a ונחשב אותו בעזרת הסינוס. נבדוק בנפרד זווית חדה, ישרה וקהה.

מקרה א': הזווית γ חדה



מהקודקוד A נוריד גובה לישר BC . נסמן את עקב הגובה ב- D ואת אורך הגובה ב- h . כיוון ש- γ חדה, הנקודה D נמצאת על הקרן CB . לכן במשולש ישר-הזווית ADC הזווית שבקודקוד C היא γ , והיתר שלו הוא $AC = b$. בדיוק γ , והיתר שלו הוא $AC = b$.

סרטוט 2: הגובה AD והמשולש ישר-הזווית ADC .

טענה	נימוק
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h$ ①	הבסיס הוא $BC = a$ והגובה אליו הוא $AD = h$
$\sin \gamma = \frac{AD}{AC} = \frac{h}{b}$ ②	ב- $\triangle ADC$ ($\angle ADC = 90^\circ$): הניצב שמול הזווית חלקי היתר
$h = b \sin \gamma$ ③	כפל שני האגפים ב- b
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \sin \gamma = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ ④	הצבה של צעד 3 בצעד 1

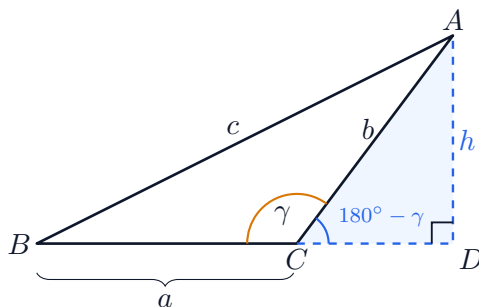
✓ עצרו ובדקו

אמרנו ש- D נמצאת על הקו CB . אבל אם הזווית β קהה, D נופלת מעבר ל- B , מחוץ לקטע BC . האם ההוכחה עדיין עובדת? סרטוט משולש כזה ובדקו כל צעד.

מקרה ב': הזווית γ ישרה

אז הצלע AC מאונכת ל- BC , ולכן היא עצמה הגובה: $h = b$. כיוון ש- $\sin 90^\circ = 1$, גם כאן $h = b \sin \gamma$, והשטח הוא $\frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ab \sin 90^\circ$ – השטח המוכר של משולש ישר-זווית.

מקרה ג': הזווית γ קהה



סרטוט 3: כשהזווית γ קהה, הגובה AD נמצא מחוץ למשולש.

כשהזווית γ קהה, הגובה מ- A נופל **מחוץ** למשולש, על ההמשך של BC מעבר ל- C . במשולש ישר-הזווית ADC הזווית שבקודקוד C היא עכשיו הזווית הצמודה ל- γ , כלומר $180^\circ - \gamma$. נשתמש בזהות של זוויות צמודות:

$$\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$$

טענה	נימוק
$\sin(180^\circ - \gamma) = \frac{h}{b}$ ①	ב- $\triangle ADC$ מתקיים $\angle ACD = 180^\circ - \gamma$ (זוויות צמודות)
$h = b \sin(180^\circ - \gamma) = b \sin \gamma$ ②	כפל ב- b , וזהות הזוויות הצמודות
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ ③	חצי בסיס כפול גובה – גם כשהגובה נמצא מחוץ למשולש

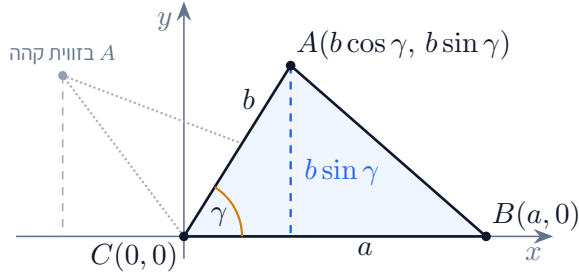
■ מש"ל

בשלושת המקרים קיבלנו אותו גובה: $h = b \sin \gamma$. זה לא מקרי: הסינוס של זווית קהה שווה לסינוס של הזווית הצמודה לה, ולכן הגובה "לא מרגיש" אם הזווית חדה או קהה. ההוכחה הבאה מראה את זה בלי לפצל למקרים.

4 הוכחה 2: מערכת צירים – חישוב אחד לכל זווית

הרעיון נמקם את המשולש על מערכת צירים כך שהצלע a שוכבת על ציר ה- x . אז הגובה הוא פשוט המרחק של הקודקוד השלישי מציר ה- x , כלומר שיעור ה- y שלו.

שיעורי הקודקודים:



- הראשית. $C = (0, 0)$
- $B = (a, 0)$ כי $CB = a$, והצלע מונחת על החלק החיובי של ציר ה- x .
- $A = (b \cos \gamma, b \sin \gamma)$ – נקודה במרחק b מהראשית, על קרן שיוצרת זווית γ עם החלק החיובי של ציר ה- x .

סרטוט 4: הגובה הוא שיעור ה- y של A . המקרה הקהה מסומן באפור.

השיעורים של A נובעים מהגדרת $\cos^{-1} \sin$ במעגל היחידה ("מוגדל" פי b). לכן הם נכונים **לכל** זווית $0^\circ < \gamma < 180^\circ$.

טענה	נימוק
1 הגובה מ- A לצלע CB הוא המרחק של A מציר ה- x	הצלע CB מונחת על ציר ה- x
2 $h = y_A = b \sin \gamma$	$\sin \gamma > 0$ לכל $0^\circ < \gamma < 180^\circ$
3 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \sin \gamma$	חצי בסיס כפול גובה

מש"ל

כאן אין מקרים בכלל. כשהזווית קהה, $\cos \gamma < 0$, והנקודה A פשוט נמצאת משמאל לציר ה- y – אבל שיעור ה- y שלה, הגובה, הוא עדיין $b \sin \gamma$. את "העבודה השחורה" עשה בשבילנו מעגל היחידה, שמגדיר את $\sin$ גם לזוויות קהות.

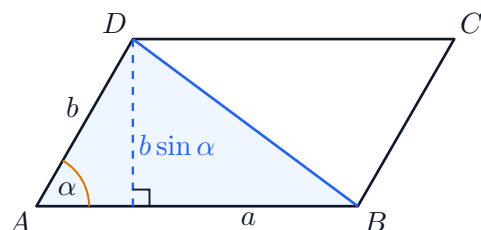
5 שתי הדרכים זו מול זו

הוכחה 1: גובה וסינוס	הוכחה 2: מערכת צירים	
לחשב את הגובה במשולש ישר-זווית	הגובה הוא שיעור ה- y של קודקוד	הרעיון
$\sin$ במשולש ישר-זווית, זוויות צמודות	$\cos^{-1} \sin$ במעגל היחידה	הכלים
זווית חדה, ישרה וקה – בנפרד	חישוב אחד לכל זווית	מקרים
"רואים" את הגובה בסרטוט	קצרה, ומסבירה למה אין צורך במקרים	היתרון

6 מסקנות: מקבילית ומרובע

מהנוסחה למשולש נובעות מייד שתי נוסחאות לשטח של מרובעים. בשתייהן הרעיון זהה: מחלקים את המרובע למשולשים.

שטח מקבילית



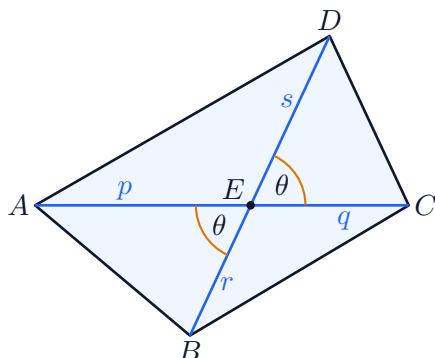
סרטוט 5: האלכסון BD מחלק את המקבילית לשני משולשים חופפים.

במקבילית $ABCD$ שתי צלעות סמוכות הן $AB = a$ ו- $AD = b$, והזווית שביניהן היא α . האלכסון BD מחלק את המקבילית לשני משולשים חופפים: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (צ.צ.צ – צלעות נגדיות במקבילית שוות, ו- BD משותפת). השטח של כל אחד מהם הוא $\frac{1}{2}ab \sin \alpha$, ולכן:

$$S_{ABCD} = ab \sin \alpha$$

לא משנה באיזו מהזוויות של המקבילית משתמשים: הזווית הסמוכה היא $180^\circ - \alpha$, ו- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. במלבן $\alpha = 90^\circ$, ומקבלים את הנוסחה המוכרת $S = ab$.

שטח מרובע לפי האלכסונים



סרטוט 6: האלכסונים מחלקים את המרובע לארבעה משולשים.

בכל מרובע קמור $ABCD$, אם אורכי האלכסונים הם $d_1 = AC$ ו- $d_2 = BD$, והזווית ביניהם היא θ , אז:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \theta$$

הוכחה. האלכסונים נחתכים בנקודה E ומחלקים את המרובע לארבעה משולשים. נסמן $AE = p$, $EC = q$, $BE = r$ ו- $ED = s$. בשני משולשים הזווית שבקודקוד E היא θ , ובשניים האחרים היא $180^\circ - \theta$ ולשתיהן אותו סינוס.

נחבר את ארבעת השטחים לפי הנוסחה $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}pr \sin \theta + \frac{1}{2}rq \sin(180^\circ - \theta) + \frac{1}{2}qs \sin \theta + \frac{1}{2}sp \sin(180^\circ - \theta) \\ &= \frac{1}{2} \sin \theta (pr + rq + qs + sp) = \frac{1}{2} \sin \theta (p + q)(r + s) = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \theta \end{aligned}$$

מש"ל

כשהאלכסונים מאונכים זה לזה, $\theta = 90^\circ$, ומקבלים $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$ – הנוסחה המוכרת לשטח של מעוין ושל דלתון. עכשיו רואים שהיא מקרה פרטי של נוסחה כללית יותר.

7 שטח מצלע אחת ושלוש זוויות

לפעמים ידועה רק צלע אחת, a , וידועות הזוויות. מספיק להכיר שתיים מהן: הזווית השלישית היא 180° פחות סכומן, למשל $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$.

שטח משולש לפי צלע והזוויות

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$

כאן α היא הזווית שמול הצלע a , ו- β, γ הן שתי הזוויות שלידה.

דרך 1: בעזרת משפט הסינוסים

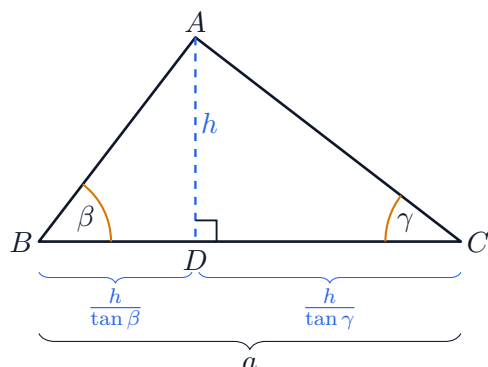
הרעיון בנוסחה $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$ מופיעה הצלע b , שאינה ידועה. נבטא אותה באמצעות a והזוויות — בעזרת משפט הסינוסים.

נימוק	טענה
משפט הסינוסים	① $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$
כפל שני האגפים ב- $\sin \beta$	② $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$
הצבה בנוסחה $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$	③ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \sin \gamma$
כפל מונה במונה ומכנה במכנה	④ $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$

מש"ל ■

דרך 2 (להעמקה): חישוב ישיר של הגובה, בלי משפט הסינוסים

הרעיון הגובה AD לצלע a מחלק אותה לשני קטעים. את כל אחד מהם אפשר לבטא בעזרת h והזווית שלידו — וכך נמצא את h . נניח כאן ש- β ו- γ חדות, כך שהנקודה D נמצאת בין B ל- C .



סרטוט 7: הגובה AD מחלק את הצלע a לשני קטעים.

בדרך הזאת נשתמש בשתי עובדות. הראשונה היא הנוסחה לסינוס של סכום זוויות (נוסחה מתקדמת — ולכן הדרך מסומנת "להעמקה"):

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

והשנייה: במשולש $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$, ולכן

$$\sin(\beta + \gamma) = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

נימוק	טענה
ב- $\triangle ABD$ מתקיים $\tan \beta = \frac{AD}{BD}$	$BD = \frac{h}{\tan \beta} = \frac{h \cos \beta}{\sin \beta}$ ①
באותו אופן ב- $\triangle ADC$	$DC = \frac{h \cos \gamma}{\sin \gamma}$ ②
חיבור, ומכנה משותף	$a = BD + DC = h \cdot \frac{\sin \gamma \cos \beta + \cos \gamma \sin \beta}{\sin \beta \sin \gamma}$ ③
סינוס של סכום, $\sin(\beta + \gamma) = \sin \alpha$	$a = h \cdot \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma} = h \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta \sin \gamma}$ ④
בידוד h	$h = \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha}$ ⑤
חצי בסיס כפול גובה	$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$ ⑥

מש"ל

בדרך אגב קיבלנו נוסחה לגובה עצמו: $h_a = \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha}$. אם אחת הזוויות β או γ קהה, הנקודה D נופלת מחוץ לקטע BC , ואז a הוא הפרש של שני קטעים ולא סכום. החישוב נותן את אותה תוצאה בדיוק (שאלה 7 בסוף).

8 מה עושים עם הנוסחאות?

שימוש 1: שטח משתי צלעות והזווית שביניהן

דוגמה מספרית

במשולש $a = 8, b = 5$ והזווית שביניהן $\gamma = 30^\circ$. מצאו את שטח המשולש.
 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$

שימוש 2: מהשטח אל הזווית – ולפעמים יש שתי תשובות

דוגמה מספרית

שתיים מצלעות המשולש הן 6 ו-4, ושטח המשולש הוא $6\sqrt{3}$. מצאו את הזווית שבין שתי הצלעות האלה.
 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, והן $\gamma = 60^\circ$ ו- $\gamma = 120^\circ$. שתיהן אפשריות! אלה שני משולשים שונים עם אותו שטח: בראשון הצלע $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ובשני $\sqrt{76} \approx 8.72$ (לפי משפט הקוסינוסים).

שימוש 3: שטח מצלע אחת ושתי זוויות

דוגמה מספרית

במשולש שווה-שוקיים הבסיס הוא $a = 10$, ושתי זוויות הבסיס הן 75° . מצאו את שטח המשולש.
זווית הראש היא $\alpha = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$, ולכן

$$S_{\triangle ABC} = \frac{10^2 \cdot \sin 75^\circ \cdot \sin 75^\circ}{2 \sin 30^\circ} = 100 \sin^2 75^\circ = 25 (2 + \sqrt{3}) \approx 93.3$$

הערך המדויק $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ניתן $\sin^2 75^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ ו- $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$ (במחשבון מקבלים ישירות ≈ 93.3).

בדיקה בדרך אחרת: הגובה לבסיס חוצה אותו, ולכן $h = 5 \tan 75^\circ = 5 (2 + \sqrt{3})$ והשטח הוא $-\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h = 25 (2 + \sqrt{3})$.

⚠ טעות נפוצה

- **זווית לא נכונה.** ב- $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$ הזווית חייבת להיות הזווית **שבין** a ל- b . זווית אחרת במשולש נותנת תוצאה שגויה.
- **שוכחים פתרון.** כשמוצאים זווית מתוך $\sin \gamma$, יש בדרך כלל שתי זוויות מתאימות: γ ו- $180^\circ - \gamma$. צריך לבדוק את שתיהן.
- **כופלים בזווית במקום בסינוס.** $30 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$ אינו השטח: צריך לכפול ב- $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, ולא ב- 30 .
- **המחשבון.** ודאו שהמחשבון מוגדר למעלות (DEG) ולא לרדיאנים.

9 להעמקה: נוסחת הרון – שטח מתוך שלוש צלעות

אם ידועות רק שלוש הצלעות, אפשר למצוא קודם את $\cos \gamma$ ממשפט הקוסינוסים, משם את $\sin \gamma$, ורק אז את השטח. אבל אפשר לעשות את החישוב הזה פעם אחת, באופן כללי, ולקבל נוסחה מפתיעה ביופיה.

🏠 נוסחת הרון

אם a, b, c הן צלעות המשולש, ו- $s = \frac{a+b+c}{2}$ הוא חצי ההיקף, אז:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

נימוק

טענה

העלאה בריבוע של $4S = 2ab \sin \gamma$

$$16S^2 = 4a^2b^2 \sin^2 \gamma \quad (1)$$

$$\sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma$$

$$16S^2 = 4a^2b^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \gamma = (2ab)^2 - (2ab \cos \gamma)^2 \quad (2)$$

משפט הקוסינוסים

$$16S^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \quad (3)$$

הפרש ריבועים:
 $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

$$16S^2 = (2ab - a^2 - b^2 + c^2)(2ab + a^2 + b^2 - c^2) \quad (4)$$

כפל מקוצר:
 $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
 ו- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$$16S^2 = (c^2 - (a - b)^2)((a + b)^2 - c^2) \quad (5)$$

שוב הפרש ריבועים – בכל סוגריים

$$16S^2 = (c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c) \quad (6)$$

כי $c - a + b = 2s - 2a$, וכן הלאה

$$16S^2 = 2(s - a) \cdot 2(s - b) \cdot 2(s - c) \cdot 2s \quad (7)$$

חילוק ב-16 והוצאת שורש

$$S = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} \quad (8)$$

מש"ל

דוגמה: המשולש 15, 14, 13

$$s = \frac{13+14+15}{2} = 21, \text{ ולכן } S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84$$

בדיקה: הגובה לצלע 14 שווה ל-12, והוא מחלק אותה לקטעים 5 ו-9. כך המשולש מתחלק לשני משולשים ישרי-זווית מוכרים: 5-12-13 ו-9-12-15. השטח: $\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 12 = 84$.

הידעתם?

הנוסחה נקראת על שם הרון מאלכסנדריה, מתמטיקאי ומהנדס יווני שחי במאה הראשונה לספירה. הוכחה לנוסחה מופיעה בספרו "מטריקה" ("מדידות"), והיא גאומטרית לגמרי, בלי טריגונומטריה. לפי מקורות ערביים מימי הביניים, ייתכן שכבר ארכימדס, שחי כ-270 שנה לפני הרון, הכיר את הנוסחה. והנוסחה $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$? בימי הרון עוד לא היה "סינוס". אסטרונומים יוונים השתמשו בטבלאות של **מיתרים** במעגל, והסינוס – חצי מיתר – הגיע מהמתמטיקה ההודית, דרך מתמטיקאים בעולם המוסלמי, רק מאות שנים אחר כך.

10 בדקו את עצמכם

שבע שאלות קצרות

1. במשולש $a = 7, b = 10$, והזווית שביניהן היא 150° . חשבו את שטח המשולש.
2. שתיים מצלעות המשולש הן 5 ו-8, ושטח המשולש הוא 10. מצאו את הזווית שביניהן.
3. הראו ששטח משולש שווה-צלעות שאורך צלעו a הוא $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.
4. שתיים מצלעות המשולש הן 6 ו-9. מהו השטח הגדול ביותר האפשרי, ובאיזו זווית הוא מתקבל?
5. האלכסונים של מרובע קמור הם 10 ו-12, והזווית ביניהם היא 30° . מהו שטח המרובע?
6. מה קורה בהוכחה 1 כשהזווית β קהה? (זאת השאלה מתיבת "עצרו ובדקו".)
7. (להעמקה) בדרך 2 לנוסחה $\frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$ הנחנו ש- β ו- γ חדות. הראו שהחישוב עובד גם כש- γ קהה.

תשובות

1. $S = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10 \cdot \sin 150^\circ = 35 \cdot \frac{1}{2} = 17.5$
2. $10 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin \gamma = 20 \sin \gamma$, ולכן $\sin \gamma = \frac{1}{2}$, כלומר $\gamma = 30^\circ$ או $\gamma = 150^\circ$. שתי התשובות אפשריות.
3. כל הזוויות במשולש שווה-צלעות הן 60° , ולכן $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$
4. $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \sin \gamma = 27 \sin \gamma$. כיוון ש- $\sin \gamma \leq 1$, השטח הגדול ביותר הוא 27, והוא מתקבל כש- $\sin \gamma = 1$, כלומר בזווית ישרה.
5. $S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30$
6. ההוכחה עובדת בלי שינוי. גם כש- D נמצאת מעבר ל- B , היא עדיין על הקרן CB , ולכן הזווית של $\triangle ADC$ בקודקוד C היא γ . צעדים 2-4 נשארים כמו שהם.
7. כש- γ קהה, D נמצאת מעבר ל- C , ו- $a = BD - DC$. ב- $\triangle ADC$ הזווית שבקודקוד C היא $180^\circ - \gamma$, ולכן $DC = \frac{h \cos(180^\circ - \gamma)}{\sin(180^\circ - \gamma)} = -\frac{h \cos \gamma}{\sin \gamma}$. מכאן $a = BD - DC = \frac{h \cos \beta}{\sin \beta} + \frac{h \cos \gamma}{\sin \gamma}$. בדיוק הביטוי של צעד 3, ומשם ההמשך זהה.