

הבינום של ניוטון ונוסחת ברנולי

איך פותחים סוגריים בחזקה גבוהה בלי לכפול אותם, ולמה בדיוק אותם מספרים מופיעים בחישובי הסתברות

כ־25 דקות קריאה

4 הוכחות

הבינום של ניוטון: להעמקה

הסתברות

5 יח"ל

כיתה י"א

מה כדאי לדעת קודם

- פתיחת סוגריים (חוק הפילוג).
- עצרת: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, ו־ $0! = 1$.
- עץ הסתברות וכלל הכפל.
- אינדוקציה – בהוכחות 2 ו־4.

מה תמצאו כאן

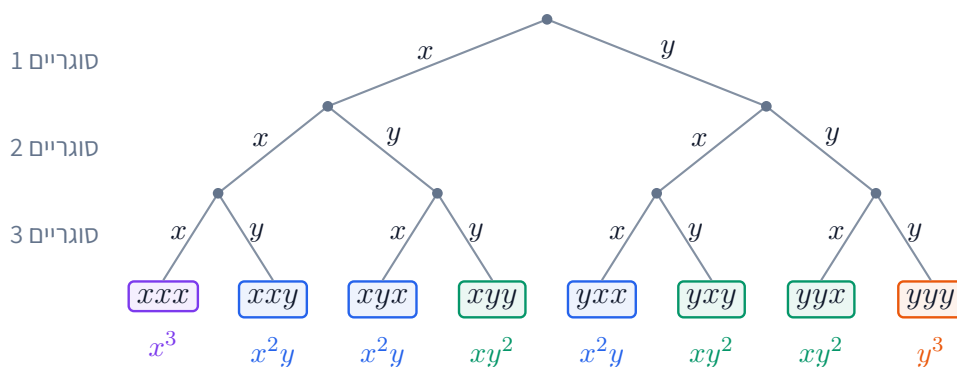
- אינטואיציה: מאיפה מגיעים 1, 3, 3, 1 בפתיחה של $(x + y)^3$.
- הבינום של ניוטון: שתי הוכחות – בספירה ובעזרת משולש פסקל.
- נוסחת ברנולי: שתי הוכחות – בספירת סדרות ו"מהניסוי האחרון".
- למה סכום ההסתברויות הוא 1, ולמה ההתפלגות נקראת "בינומית".
- דוגמאות, טעויות נפוצות ושאלות לבדיקה עצמית.

1 האינטואיציה: בוחרים את מכל סוגריים

האינטואיציה

את $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ כולם מכירים. אבל מאיפה ה־2? נכתוב $(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$ נכתוב $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ כשפותחים סוגריים, **בוחרים איבר אחד מכל סוגריים** וכופלים: $x \cdot x$, $x \cdot y$, $y \cdot x$, $y \cdot y$. יש שתי דרכים לקבל xy – ולכן המקדם הוא 2. ב־ $(x + y)^3$ יש שלושה סוגריים, ולכן $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ "מילים" של שלוש אותיות. בסרטוט 1 הן ממוינות לפי מספר ה־ y שבהן: מילה אחת בלי y , שלוש מילים עם y , אחד, שלוש עם שני y , ומילה אחת עם שלושה. לכן

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$



סרטוט 1: כל מסלול בעץ בוחר x או y מכל סוגריים. מתקבלות 8 מילים: 1 עם x^3 , 3 עם x^2y , 3 עם xy^2 ו־1 עם y^3 .

אם כך, כל השאלה היא: **כמה מילים יש עם בדיוק k אותיות y ?** לשאלה הזאת יש תשובה מוכנה מהקומבינטוריקה.

2 המשפט: הבינום של ניוטון

תזכורת. המספר $\binom{n}{k}$ (קוראים: " n מעל k ") הוא מספר הדרכים לבחור k פריטים מתוך n פריטים, כשהסדר לא חשוב (למספרים האלה קוראים גם **מקדמים בינומיים**, ובהמשך נראה למה):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

למשל, $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$: יש 10 דרכים לבחור 2 תלמידים מתוך 5.

למה הנוסחה הזאת נכונה? נבחר את הפריטים בזה אחר זה: לראשון יש n אפשרויות, לשני $n-1$, וכך הלאה, עד $n-k+1$ אפשרויות לאחרון. סך הכול $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \cdots (n-k+1)$ בחירות **מסודרות**. אבל כל קבוצה של k פריטים נספרה כאן $k!$ פעמים – פעם אחת לכל סדר אפשרי שלה. לכן מחלקים ב- $k!$.

הבינום של ניוטון

לכל מספר טבעי n :

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

ובכתיב מקוצר:

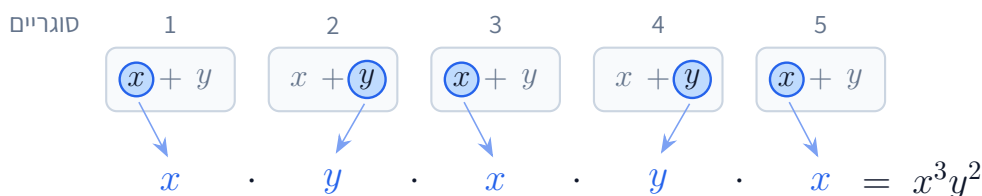
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

במילים: המקדם של $x^{n-k}y^k$ הוא מספר הדרכים לבחור k מתוך n .

הסימן $\sum_{k=0}^n$ פירושו: כותבים את הביטוי עבור $k = 0, 1, 2, \dots, n$, ומחברים את כל האיברים.

3 הוכחה 1: סופרים מכפלות

הרעיון נעשה בדיוק מה שעשינו עם $(x+y)^3$, אבל לכל n : נספור כמה פעמים מתקבלת כל מכפלה.



סרטוט 2: בחירה אחת מתוך $2^5 = 32$ האפשרויות: y מסוגריים 2 ו-4, x משאר הסוגריים. יש $\binom{5}{2} = 10$ בחירות שנותנות x^3y^2 .

נימוק	טענה
הגדרת חזקה	$(x + y)^n = \underbrace{(x + y)(x + y) \cdots (x + y)}_{n \text{ סוגריים}} \quad (1)$
חוק הפילוג: מכל סוגריים בוחרים x או y	<p>(2) הפתיחה היא סכום של 2^n מכפלות, ובכל אחת גורם אחד מכל סוגריים</p>
מ־ $k - n$ הסוגריים האחרים בחרנו x , וסדר הגורמים בכפל לא משנה	<p>(3) מכפלה שבה בחרנו y מ־k סוגריים היא $x^{n-k}y^k$</p>
מכפלה כזאת נקבעת לפי אילו k סוגריים נתנו y : בחירה של k מתוך n	<p>(4) יש בדיוק $\binom{n}{k}$ מכפלות כאלה</p>
כינוס איברים דומים, לכל k מ־0 עד n	<p>(5) $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$</p>

מש"ל

✓ עצרו ובדקו – 1

בצעד 2 ראינו שיש 2^n מכפלות, ובצעד 4 מיינו אותן לפי k . מה יוצא מזה? כמה זה $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$? (רמז: הציבו $x = y = 1$ בבינום.)

4 הוכחה 2: משולש פסקל ואינדוקציה

הרעיון נבנה את $(x + y)^{n+1}$ מתוך $(x + y)^n$: כופלים פעם נוספת ב־ $(x + y)$. נראה שכל מקדם חדש הוא סכום של שני מקדמים ישנים – ומכאן בדיוק בא משולש פסקל. (הוכחה באינדוקציה – להעמקה.)

דוגמה: מ־ $(x + y)^3$ ל־ $(x + y)^4$

$(x + y)^4 = (x + y)^3 \cdot x + (x + y)^3 \cdot y$. נכפול את $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ ב־ x וב־ y , ונסדר את המקדמים לפי החזקות:

y^4	xy^3	x^2y^2	x^3y	x^4	
	1	3	3	1	כפל ב־x
1	3	3	1		כפל ב־y
1	4	6	4	1	הסכום: $(x + y)^4$

כל מקדם חדש הוא סכום של שני מקדמים **סמוכים** מהשורה הקודמת: $4 = 1 + 3$, $6 = 3 + 3$, $4 = 3 + 1$.

$n = 0$				1												
$n = 1$				1		1										
$n = 2$				1		2		1								
$n = 3$				1		3		3		1						
$n = 4$				1		4		6		4		1				
$n = 5$				1		5		10		10		5		1		
$n = 6$				1		6		15		20		15		6		1

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad (1 \leq k \leq n)$$

למשל: $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10 = \binom{5}{2}$

למה כלל פסקל נכון? בכיתה יש $n+1$ תלמידים, ובהם דנה. בחרים ועדה של k תלמידים – יש לכך $\binom{n+1}{k}$ דרכים. נמנין את הוועדות לשני סוגים: בוועדות שדנה **בתוכן** צריך לבחור עוד $k-1$ חברים מתוך n התלמידים האחרים – $\binom{n}{k-1}$ דרכים. בוועדות שדנה **לא בתוכן** בחרים את כל k החברים מתוך n האחרים – $\binom{n}{k}$ דרכים. כל ועדה נספרה בדיוק פעם אחת, ולכן $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$. אפשר לוודא זאת גם באלגברה:

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(k+(n-k+1))}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}.$$

נוכיח שהנוסחה נכונה לכל $n \geq 1$ באינדוקציה מתמטית, "בשיטת הדומינו": נראה שהיא נכונה עבור $n = 1$ (האבן הראשונה נופלת), וש אם היא נכונה עבור n היא נכונה גם עבור $n + 1$ (כל אבן מפילה את הבאה).

בסיס: עבור $n = 1$ הנוסחה נותנת $\binom{1}{0}x + \binom{1}{1}y = x + y = (x + y)^1$, כנדרש.

צעד: נניח שהנוסחה נכונה עבור n , ונוכיח שהיא נכונה גם עבור $n + 1$:

עמוד 4 מתוך 10

צעדים 4 ו-5 — זאת הנוסחה עבור
 $n + 1$

$$(x + y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k \quad (6)$$

מש"ל

✓ עצרו ובדקו – 2

בצעד 3 שינינו את שם האינדקס. כתבו את הסכום של צעד 3 עבור $n = 3$, איבר אחר איבר, והשוו לשורה "כפל ב- y " בטבלה שלמעלה.

5 שתי ההוכחות זו מול זו

הוכחה 1: ספירה	הוכחה 2: פסקל ואינדוקציה	
הרעיון	סופרים כמה מכפלות נותנות את $x^{n-k}y^k$	בונים כל חזקה מהחזקה הקודמת
הכלים	חוק הפילוג, $\binom{n}{k}$ כמספר בחירות	כלל פסקל ואינדוקציה
מה מבינים ממנה	למה המקדם הוא מספר בחירות	למה המקדמים בונים את משולש פסקל

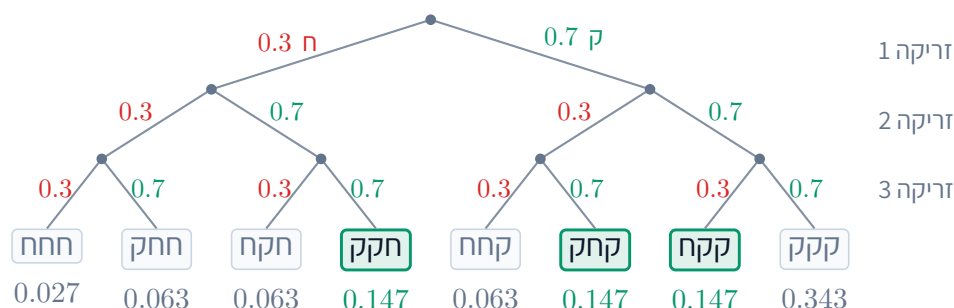
6 נוסחת ברנולי

🧠 האינטואיציה: שלוש זריקות עונשין

שחקנית כדורסל קולעת זריקת עונשין בהסתברות 0.7, וכל זריקה בלתי תלויה בזריקות הקודמות. היא זורקת שלוש פעמים. מה ההסתברות שתקלע **בדיוק** פעמיים? בעץ שבסרטוט יש 8 מסלולים (ק – קליעה, ח – החטאה; האות הימנית היא הזריקה הראשונה). בדיוק שתי קליעות יש בשלושה מסלולים: קקח, קחק, חקק. לכל אחד מהם אותה הסתברות – שתי קליעות $(0.7 \cdot 0.7)$ והחטאה אחת (0.3) , רק בסדר אחר. לכן

$$P = 3 \cdot 0.7^2 \cdot 0.3 = 3 \cdot 0.147 = 0.441.$$

שימו לב: זה **בדיוק** העץ של $(x + y)^3$ מסרטוט 1, עם הסתברויות במקום אותיות. גם ה-3 כאן הוא ה-3 של $3xy^2$: שלוש מילים עם שני y בדיוק.



סרטוט 4: שלוש זריקות. במסגרת ירוקה – שלושת המסלולים עם שתי קליעות בדיוק, כל אחד בהסתברות 0.147.

נוסחת ברנולי

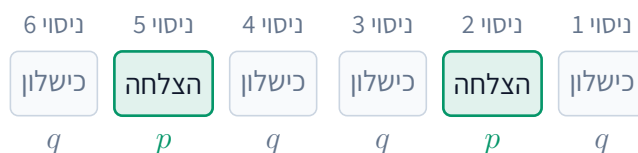
מבצעים n ניסויים בלתי תלויים. בכל ניסוי יש שתי תוצאות אפשריות: **הצלחה** בהסתברות p , או **כישלון** בהסתברות $q = 1 - p$. ההסתברות לקבל **בדיוק** k הצלחות היא

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

במילים: מספר הסדרות שיש בהן k הצלחות, כפול ההסתברות של סדרה אחת כזאת.

7 הוכחה 3: סופרים סדרות

הרעיון בדיוק כמו בדוגמת הכדורסל: נחשב את ההסתברות של סדרה אחת, נספור כמה סדרות כאלה יש, ונחבר.



$$q \cdot p \cdot q \cdot q \cdot p \cdot q = p^2 q^4$$

סרטוט 5: סדרה אחת עם 2 הצלחות ב־6 ניסויים. כל סדרה כזאת נקבעת לפי שני "המקומות" של ההצלחות: $\binom{6}{2} = 15$ סדרות.

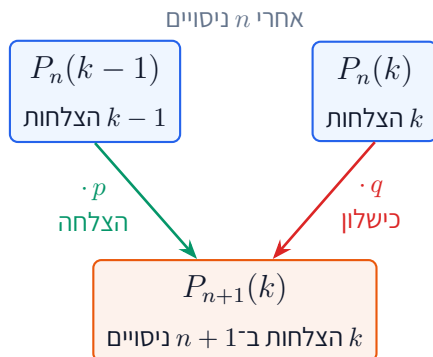
נימוק	טענה
הניסויים בלתי תלויים: כופלים את ההסתברויות לאורך המסלול בעץ	1 סדרה מסוימת עם k הצלחות ו־ $n - k$ כישלונות — הסתברותה $p^k q^{n-k}$
הסדר משנה רק את סדר הגורמים במכפלה	2 לכל הסדרות עם k הצלחות יש אותה הסתברות
סדרה נקבעת לפי באילו k ניסויים הייתה הצלחה: בחירה של k מקומות מתוך n	3 יש $\binom{n}{k}$ סדרות כאלה
בכל ביצוע של הניסויים מתקבלת סדרה אחת בלבד	4 הסדרות הן מאורעות זרים
ההסתברות של איחוד מאורעות זרים היא סכום ההסתברויות: $\binom{n}{k}$ מחוברים שווים	5 $P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k q^{n-k}$

מש"ל

שימו לב: צעד 3 הוא בדיוק הספירה של הוכחה 1. שם בחרנו מאילו סוגריים לקחת y , וכאן — באילו ניסויים הייתה הצלחה.

8 הוכחה 4: הניסוי האחרון

הרעיון נבנה את ההסתברויות של $n+1$ ניסויים מתוך ההסתברויות של n ניסויים, לפי מה שקרה בניסוי האחרון – כמו שבנינו את משולש פסקל. (הוכחה באינדוקציה – להעמקה.)



כדי לקבל k הצלחות ב- $n+1$ ניסויים, יש שתי אפשרויות זרות:

- k הצלחות ב- n הניסויים הראשונים, וכישלון באחרון;
 - $k-1$ הצלחות ב- n הראשונים, והצלחה באחרון.
- הניסוי האחרון בלתי תלוי בקודמים, ולכן

$$P_{n+1}(k) = P_n(k) \cdot q + P_n(k-1) \cdot p.$$

סרטוט 6: הכלל של "הניסוי האחרון" – אותו מבנה כמו בכלל פסקל. החץ הירוק: הצלחה בניסוי האחרון; החץ האדום: כישלון בו.

בסיס: בניסוי אחד: $P_1(0) = q = \binom{1}{0} p^0 q^1$ ו- $P_1(1) = p = \binom{1}{1} p^1 q^0$.

צעד: נניח שהנוסחה נכונה עבור n ניסויים (לכל k), ונוכיח אותה עבור $n+1$ ניסויים. נתחיל ב- $1 \leq k \leq n$, ובצעד 5 נטפל במקרי הקצה:

נימוק	טענה
שתי אפשרויות זרות לפי הניסוי האחרון, וכלל הכפל	① $P_{n+1}(k) = P_n(k) \cdot q + P_n(k-1) \cdot p$
הנחת האינדוקציה	② $P_{n+1}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cdot q + \binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1} \cdot p$
בשני המחוברים יש אותן חזקות של p ושל q	③ $P_{n+1}(k) = \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] p^k q^{n+1-k}$
כלל פסקל	④ $P_{n+1}(k) = \binom{n+1}{k} p^k q^{n+1-k}$
מקרי הקצה: כישלון בכל הניסויים, או הצלחה בכולם – גם הם מתאימים לנוסחה	⑤ $P_{n+1}(0) = P_n(0) \cdot q = q^{n+1}$ ו- $P_{n+1}(n+1) = P_n(n) \cdot p = p^{n+1}$

■ מש"ל

9 הקשר: למה ההתפלגות נקראת "בינומית"?

נחבר את ההסתברויות של כל התוצאות האפשריות: אפס הצלחות, הצלחה אחת, וכן הלאה עד n הצלחות. הבינום של ניוטון, עם $x = q$ ו- $y = p$, נותן:

$$\sum_{k=0}^n P_n(k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} p^k = (q + p)^n = 1^n = 1.$$

כך הבינום מראה שההסתברויות בנוסחת ברנולי מסתכמות ב-1, כמו שצריך. בגלל הקשר הזה, ההתפלגות של מספר ההצלחות נקראת **התפלגות בינומית**.

בדוגמת הכדורסל

$P_3(3) = 0.7^3 = 0.343$, $P_3(2) = 0.441$, $P_3(1) = 3 \cdot 0.7 \cdot 0.3^2 = 0.189$, $P_3(0) = 0.3^3 = 0.027$
הסכום: $0.027 + 0.189 + 0.441 + 0.343 = 1$

הבינום של ניוטון	נוסחת ברנולי
n סוגריים	n ניסויים
מכל סוגריים בוחרים x או y	בכל ניסוי: כישלון (q) או הצלחה (p)
מילה, למשל xyx	סדרת תוצאות, למשל: כישלון, הצלחה, כישלון
$\binom{n}{k}$ מילים עם k אותיות y	$\binom{n}{k}$ סדרות עם k הצלחות
$\binom{n}{k} x^{n-k} y^k$	$\binom{n}{k} q^{n-k} p^k = P_n(k)$
$(x + y)^n$	$(q + p)^n = 1$

גם ההוכחות מקבילות: הוכחה 3 היא הוכחה 1 "בתחפושת" של הסתברות, והוכחה 4 היא הוכחה 2.

10 מה עושים עם הנוסחאות?

שימוש 1: פתיחת סוגריים מהירה

דוגמה מספרית

פתחו את $(2a - 1)^4$.

נבחר $x = 2a$ ו- $y = -1$, ונשתמש בשורה $n = 4$ של משולש פסקל: 1, 4, 6, 4, 1.

$$\begin{aligned} (2a - 1)^4 &= (2a)^4 + 4(2a)^3(-1) + 6(2a)^2(-1)^2 + 4(2a)(-1)^3 + (-1)^4 \\ &= 16a^4 - 32a^3 + 24a^2 - 8a + 1. \end{aligned}$$

שימוש 2: הסתברויות

"בדיוק" 🧮

מטילים מטבע הוגן 10 פעמים. מה ההסתברות לקבל "עץ" בדיוק 5 פעמים?
 $P_{10}(5) = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{252}{1024} \approx 0.246$. מפתיע: התוצאה "הכי צפויה" מתקבלת בפחות מרבע מהפעמים שבהן מטילים את המטבע 10 פעמים.

"לפחות" 🧮

במבחן אמריקאי יש 5 שאלות, ובכל אחת 4 תשובות אפשריות, שרק אחת מהן נכונה. תלמיד מנחש בכל שאלה. מה ההסתברות שיענה נכון על 4 שאלות לפחות?
 $p = \frac{1}{4}$. "לפחות 4" פירושו 4 או 5, ולכן מחברים:

$$P_5(4) + P_5(5) = 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{15}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{1}{64} \approx 0.016.$$

⚠ טעות נפוצה

- $(x + y)^n \neq x^n + y^n$. למשל $(1 + 1)^2 = 4$, ולא 2. הטעות: שוכחים את האיברים "האמצעיים".
- **הסימנים ב-** $(x - y)^n$. כאן y מוחלף ב- $(-y)$, ולכן הסימנים מתחלפים: $+$, $-$, $+$, $-$ וכן הלאה.
- **שוכחים את** $\binom{n}{k}$. המכפלה $p^k q^{n-k}$ היא ההסתברות של סדרה **אחת**. בלי המקדם מחשבים רק את ההסתברות של סדר אחד מסוים של הצלחות וכישלונות.
- **ניסויים תלויים**. הנוסחה דורשת ניסויים בלתי תלויים, עם אותה p בכל ניסוי. כשמוציאים כדורים מכד **בלי החזרה**, למשל, היא לא מתאימה.
- **"בדיוק" מול "לפחות"**. $P_n(k)$ היא ההסתברות שיהיו **בדיוק** k הצלחות. ל"לפחות" ול"לכל היותר" מחברים כמה איברים, או משתמשים במאורע המשלים.

🕒 הידעתם?

משולש פסקל היה מוכר הרבה לפני בלז פסקל. בהודו הוא מופיע כבר במאה ה-10, בפירוש של הלאיודה לספר עתיק על משקלי שירה. בפרס תיאר אותו אל-כרג' בסביבות שנת 1000, ואחריו עומר ח'יאם, המשורר והמתמטיקאי – ובאיראן קוראים לו עד היום "המשולש של ח'יאם". בסין השתמש בו ג'יה שיאן במאה ה-11, ושם הוא נקרא "המשולש של יאנג חווי", על שם המתמטיקאי שפרסם אותו במאה ה-13. באיטליה הוא נקרא "המשולש של טרטליה". פסקל כתב עליו חיבור שלם במאה ה-17, ובעקבות החיבור הזה מתמטיקאים באירופה קראו למשולש על שמו.

אייזק ניוטון לא המציא את הפתיחה של $(x + y)^n$ עבור n טבעי – היא הייתה ידועה לפניו. בסביבות 1665 הוא הכליל אותה לחזקות שאינן מספרים שלמים, למשל $(1 + x)^{\frac{1}{2}}$, ובזכות ההכללה הזאת הנוסחה נושאת את שמו.

יעקב ברנולי חקר סדרות של ניסויים בלתי תלויים בספרו "אמנות הניחוש" (Ars Conjectandi), שיצא לאור ב-1713, אחרי מותו. על שמו נקרא עד היום ניסוי עם שתי תוצאות אפשריות "ניסוי ברנולי".

11 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

1. פתחו את $(x + y)^5$ בעזרת משולש פסקל.
2. מהו המקדם של x^3 בפתיחה של $(x + 2)^7$?
3. הוכיחו: $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$ לכל $n \geq 1$. (רמז: בחרו x ו- y מתאימים בבינום.)
4. מטילים קובייה הוגנת 4 פעמים. מה ההסתברות לקבל 6 בדיוק פעמיים?
5. מטילים מטבע הוגן 6 פעמים. מה ההסתברות לקבל "עץ" לפחות פעם אחת?
6. ענו על השאלות מתיבות "עצרו ובדקו".

תשובות

1. $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$ (השורה $n = 5$ במשולש: 1, 5, 10, 10, 5, 1).
2. האיבר הכללי הוא $2^k \cdot \binom{7}{k} x^{7-k}$. עבור x^3 צריך $k = 4$, ולכן המקדם הוא $2^4 \cdot \binom{7}{4} = 35 \cdot 16 = 560$.
3. נציב בבינום $x = 1$ ו- $y = -1$, ונקבל $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = (1 - 1)^n = 0^n = 0$ לכל $n \geq 1$.
4. $P_4(2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 6 \cdot \frac{25}{1296} = \frac{25}{216} \approx 0.116$.
5. המאורע המשלים הוא "אף פעם לא עץ", שהסתברותו $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$. לכן התשובה היא $1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64} \approx 0.984$.
6. **עצרו ובדקו 1:** $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = (1 + 1)^n = 2^n$.
עצרו ובדקו 2: עבור $n = 3$ הסכום הוא $x^3y + 3x^2y^2 + 3xy^3 + y^4 = x^3y + 3x^2y^2 + 3xy^3 + y^4 - \binom{3}{0}x^3y + \binom{3}{1}x^2y^2 + \binom{3}{2}xy^3 + \binom{3}{3}y^4$. בדיוק השורה "כפל ב- y " בטבלה: 1, 3, 3, 1, מוזזת במקום אחד.