ריבית דריבית

למה כסף שנשאר בחיסכון גדל מהר יותר ויותר, ואיך מזה נולדת נוסחה אחת לכל תהליך של גדילה ודעיכה

כיתות י״א–י״ב | 3–5 יח״ל | גדילה ודעיכה | 2 הוכחות | כ־20 דקות קריאה

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: ריבית פשוטה מול ריבית דריבית — ״ריבית על הריבית״.
- הוכחה 1: עוקבים אחרי הכסף שנה אחרי שנה.
- הוכחה 2: הסכומים בחיסכון הם סדרה הנדסית.
- מבט נוסף: איפה ״מסתתרת״ הריבית על הריבית.
- שימושים: דעיכה, זמן הכפלה, ריבית חודשית והמספר e.

מה כדאי לדעת קודם

- אחוזים: $p\%$ מתוך x הם $\frac{p}{100}\cdot x$.
- חוקי חזקות: $q^2\cdot q=q^3$.
- הוצאת גורם משותף.
- סדרה הנדסית (להוכחה 2).

1 האינטואיציה: כדור שלג של כסף

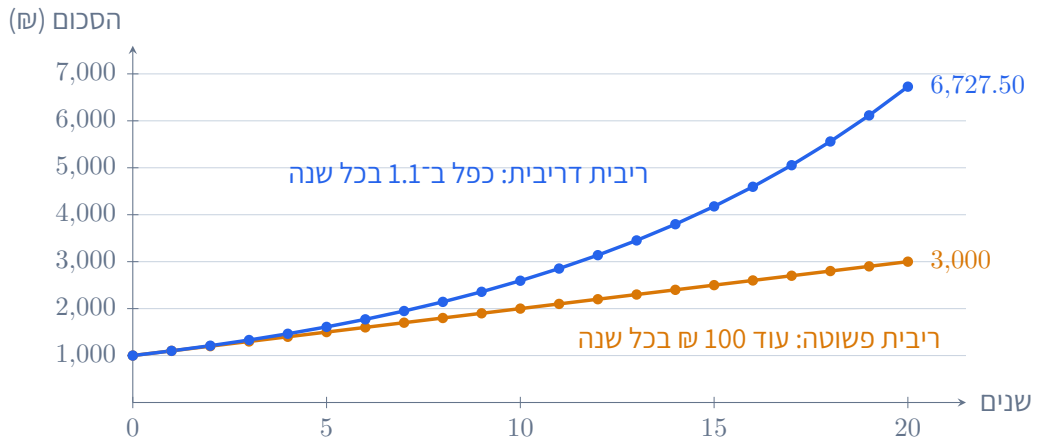
האינטואיציה

נועה ואיתי מפקידים כל אחד 1,000 ₪ בתוכנית חיסכון שנותנת ריבית של 10% בשנה.
איתי מושך בסוף כל שנה את הריבית ושם אותה בקופה בבית. בחיסכון שלו נשארים תמיד 1,000 ₪, ולכן בכל שנה הוא מקבל בדיוק 100 ₪, וכל הכסף שלו — בחיסכון ובקופה יחד — גדל ב־100 ₪ בשנה. זאת **ריבית פשוטה**.
נועה משאירה את הריבית בחיסכון. בסוף השנה הראשונה יש לה 1,100 ₪, ובשנה השנייה הבנק מחשב 10% מ־1,100 ₪, כלומר 110 ₪. גם הריבית שהיא כבר קיבלה מרוויחה ריבית. זאת **ריבית דריבית** — ״ריבית על הריבית״.
ריבית דריבית מתנהגת כמו כדור שלג שמתגלגל במורד: ככל שהוא גדול יותר, הוא אוסף יותר שלג בכל סיבוב.

שנה	0	1	2	3	4	5
איתי — ריבית פשוטה (₪)	1,000	1,100	1,200	1,300	1,400	1,500
נועה — ריבית דריבית (₪)	1,000	1,100	1,210	1,331	1,464.10	1,610.51

בהתחלה ההבדל זעיר: אחרי שנתיים יש לנועה רק 10 ₪ יותר. אבל הפער הולך וגדל. אחרי 20 שנה יש לאיתי 3,000 ₪, ולנועה כמעט 6,730 ₪ — יותר מפי שניים (סרטוט 1). הסיבה: אצל איתי הסכום עולה בכל שנה **באותו מספר שקלים**, ואצל נועה הוא **מוכפל באותו מספר**, 1.1.

© אור בן שטרית · אינסוף



סרטוט 1: הכסף של איתי ושל נועה במשך 20 שנה. ריבית פשוטה נותנת קו ישר, ריבית דריבית — עקומה שנעשית תלולה יותר ויותר.

2 הנוסחה

נסמן:

- M_0 — הסכום ההתחלתי (**הקרן**).
- p — אחוז הריבית לתקופה. למשל, בריבית של 5% לשנה: $p = 5$.
- n — מספר התקופות (שנים, חודשים וכדומה).
- M_n — הסכום אחרי n תקופות.

⬟ נוסחת ריבית דריבית

אם בסוף כל תקופה מצטרפת לחיסכון ריבית של $p\%$ מהסכום שיש בו באותו רגע, אז אחרי n תקופות:

$$q = 1 + \frac{p}{100} \qquad \boxed{M_n = M_0 \cdot q^n}$$

המספר q נקרא **גורם הגדילה**. למשל, בריבית של 10% גורם הגדילה הוא $q = 1.1$.

במילים: בכל תקופה הסכום **מוכפל** ב־q. אחרי n תקופות הוא הוכפל ב־q בדיוק n פעמים.

אותה נוסחה מתארת גם **דעיכה** — ירידה באחוז קבוע בכל תקופה. אז $q = 1 - \frac{p}{100}$, מספר שקטן מ־1 (פרטים בשימוש 2).

בספרים אחרים תפגשו את אותה נוסחה בסימונים אחרים, למשל $A = P(1+r)^n$. שם P הוא הקרן ו־r הוא הריבית כשבר עשרוני: ריבית של 5% היא $r = 0.05$, ולכן $1 + r$ הוא בדיוק q. זאת אותה נוסחה.

3 הוכחה 1: שנה אחרי שנה

הרעיון נעקוב אחרי הכסף שנה אחרי שנה. נגלה שבכל שנה קורה אותו דבר בדיוק: הסכום מוכפל ב־q. מכאן הנוסחה נובעת כמעט מעצמה.

צעד מקדים: להוסיף $p\%$ זה לכפול ב־q

אם לסכום x מוסיפים $p\%$ ממנו, מקבלים

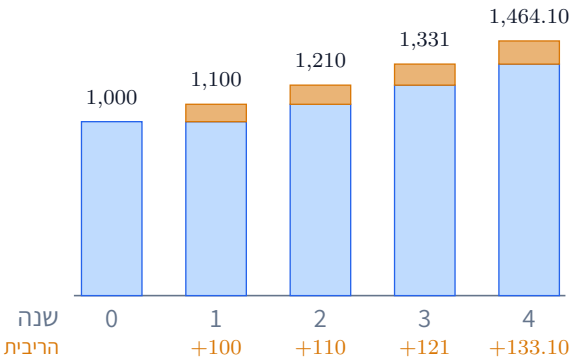
$$x + \frac{p}{100} \cdot x = x\left(1 + \frac{p}{100}\right) = x \cdot q.$$

למשל, להוסיף 10% זה לכפול ב־1.1. אצל נועה: $1{,}000 \cdot 1.1 = 1{,}100$. אצל נועה: $1{,}000 + 100 = 1{,}100$. זה כל הסוד:

הוספה של אחוז קבוע היא כפל במספר קבוע.

מעקב אחרי הכסף

בכל שנה הריבית מחושבת על **כל** הסכום שיש בחיסכון באותו רגע: הקרן, ועוד כל הריבית שכבר הצטרפה אליה. בסרטוט 2 כל עמודה בנויה מהעמודה הקודמת (בכחול) ועוד 10% ממנה (בכתום). שימו לב: גם החלק הכתום — הריבית השנתית — גדל משנה לשנה: 100, 110, 121, …



סרטוט 2: הסכום בסוף כל שנה: הסכום הקודם (כחול) ועוד 10% ממנו (כתום).

נכתוב את אותו מעקב באותיות, עבור ריבית כלשהי $p\%$:

	טענה	נימוק
1	$M_1 = M_0 + \frac{p}{100} \cdot M_0$	בסוף השנה הראשונה: הקרן ועוד הריבית עליה
2	$M_1 = M_0 \cdot q$	הוצאת M_0 כגורם משותף (הצעד המקדים)
3	$M_2 = M_1 + \frac{p}{100} \cdot M_1 = M_1 \cdot q$	בשנה השנייה הריבית מחושבת על M_1, כל הסכום שבחיסכון
4	$M_2 = (M_0 \cdot q) \cdot q = M_0 \cdot q^2$	הצבה של צעד 2
5	$M_3 = M_2 \cdot q = M_0 \cdot q^3$	אותו נימוק בשנה השלישית, והצבה של צעד 4

ומה קורה אחרי n שנים?

התבנית ברורה: בכל שנה הסכום מוכפל ב־q, ולכן

$$M_n = M_0 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdots q}_{n \text{ פעמים}} = M_0 \cdot q^n.$$

אבל "התבנית ברורה" זה עדיין לא הוכחה: מי מבטיח שהיא נמשכת גם בשנה ה־50? הנימוק הוא שבכל מעבר משנה לשנה פועל אותו כלל בדיוק, $M_{k+1} = M_k \cdot q$ (כמו בצעד 3). זה כמו שורה של אבני דומינו:

- **האבן הראשונה נופלת:** הנוסחה נכונה אחרי שנה אחת, $M_1 = M_0 \cdot q^1$ (צעד 2).
- **כל אבן מפילה את הבאה:** נניח שהנוסחה נכונה אחרי k שנים, כלומר $M_k = M_0 \cdot q^k$. אחרי שנה נוספת הסכום מוכפל שוב ב־q:

$$M_{k+1} = M_k \cdot q = M_0 \cdot q^k \cdot q = M_0 \cdot q^{k+1},$$

ולכן הנוסחה נכונה גם אחרי $k+1$ שנים.

כך הנוסחה נכונה אחרי שנה אחת, ולכן גם אחרי שנתיים, ולכן גם אחרי שלוש שנים — וכן הלאה, לכל n. לשיטת ההוכחה הזאת קוראים **אינדוקציה מתמטית**.

מש"ל ■

עצרו ובדקו

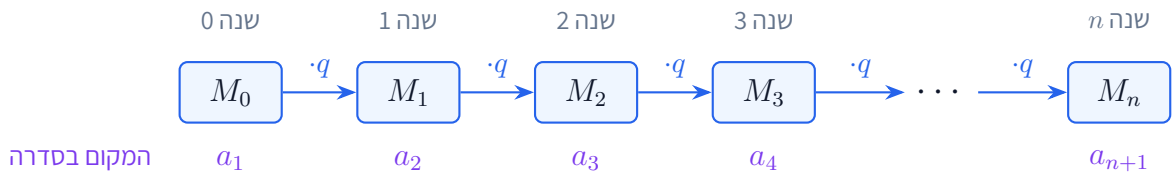
בצעד 3 חישבנו את הריבית של השנה השנייה מתוך M_1. מה היה יוצא אילו הבנק היה מחשב אותה מתוך M_0, כמו אצל איתי? איזו נוסחה הייתה מתקבלת אחרי n שנים? (התשובה בסוף המסמך.)

4 הוכחה 2: סדרה הנדסית

הרעיון נרשום בשורה אחת את הסכום ההתחלתי ואת הסכומים בסוף כל שנה: $M_0, M_1, M_2, \ldots$. נראה שזאת סדרה הנדסית, ונשתמש בנוסחה המוכנה לאיבר הכללי שלה.

תזכורת. בסדרה הנדסית כל איבר מתקבל מהאיבר הקודם על ידי כפל באותו מספר — **מנת הסדרה**. אם האיבר הראשון הוא a_1 והמנה היא q, האיבר שנמצא במקום ה־m הוא

$$a_m = a_1 \cdot q^{m-1}.$$



סרטוט 3: הסכומים בחיסכון הם סדרה הנדסית. שימו לב: הסכום של שנה n נמצא במקום ה־$(n+1)$.

	טענה	נימוק
1	$\frac{M_{k+1}}{M_k} = q$ לכל k	בכל שנה הסכום מוכפל ב־q (הצעד המקדים של הוכחה 1)
2	הסדרה $M_0, M_1, M_2, \ldots$ היא סדרה הנדסית שמנתה q	המנה בין כל שני איברים סמוכים קבועה
3	$a_1 = M_0$, ובאופן כללי $M_n = a_{n+1}$	הסדרה מתחילה בשנה 0, ולכן הסכום של שנה n נמצא במקום ה־$(n+1)$ (סרטוט 3)
4	$a_{n+1} = a_1 \cdot q^{(n+1)-1} = a_1 \cdot q^n$	נוסחת האיבר הכללי, עם $m = n+1$
5	$M_n = M_0 \cdot q^n$	הצבה של צעד 3 בצעד 4

מש"ל ■

ומה עם ריבית פשוטה? שם בכל שנה **מוסיפים** את אותו סכום, $d = \frac{p}{100} \cdot M_0$, ולכן הסכומים הם **סדרה חשבונית**:

$$M_n = M_0 + n \cdot d = M_0 \left(1 + \frac{n \cdot p}{100}\right).$$

ההבדל בין שני סוגי הריבית הוא בדיוק ההבדל בין סדרה חשבונית (חיבור קבוע) לסדרה הנדסית (כפל קבוע).

5 שתי הדרכים זו מול זו

	הוכחה 1: שנה אחרי שנה	הוכחה 2: סדרה הנדסית
הרעיון	עוקבים אחרי הכסף ומגלים שבכל שנה הוא מוכפל ב־q	מזהים שהסכומים הם סדרה הנדסית
הכלים	אחוזים, גורם משותף, חוקי חזקות ואינדוקציה	הגדרת סדרה הנדסית ונוסחת האיבר הכללי
הנקודה העדינה	להראות שהתבנית נמשכת לכל n (הדומינו)	האינדקס: M_n הוא האיבר ה־$(n+1)$
היתרון	בונה את הנוסחה מאפס ומסבירה אותה	קצרה, ומחברת את הנושא לסדרות

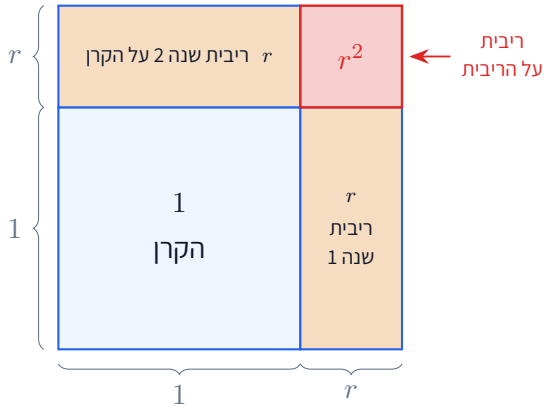
6 מבט נוסף: איפה מסתתרת "הריבית על הריבית"?

כמה בדיוק מרוויחים מריבית דריבית לעומת ריבית פשוטה? נבדוק שנתיים. נכתוב את הריבית כשבר עשרוני, $r = \frac{p}{100}$, כך ש־$q = 1 + r$, ונניח לרגע שהקרן היא 1 ₪.

הסכום אחרי שנתיים הוא $(1+r)^2$ — השטח של ריבוע שצלעו $1+r$. נחלק את הריבוע לארבעה חלקים:

- ריבוע $1\cdot 1$ — הקרן.
- מלבן $1\cdot r$ — הריבית של השנה הראשונה.
- מלבן $r\cdot 1$ — הריבית של השנה השנייה על הקרן.
- ריבוע קטן $r\cdot r=r^2$ — הריבית שנוספה בשנה השנייה על הריבית של השנה הראשונה.

שלושת החלקים הראשונים, $1+2r$, הם בדיוק מה שנותנת ריבית פשוטה. הריבוע הקטן הוא ה"בונוס" — הריבית על הריבית.



סרטוט 4: $(1+r)^2=1+2r+r^2$. כדי שיהיה קל לראות, הריבית בסרטוט מוגזמת.

באלגברה:

$$M_0(1+r)^2 = M_0\left(1+2r+r^2\right) = \underbrace{M_0\,(1+2r)}_{\text{ריבית פשוטה}} + \underbrace{M_0\,r^2}_{\text{הבונוס}}$$

אצל נועה ואיתי: בריבית פשוטה יש אחרי שנתיים $1{,}000\cdot 1.2 = 1{,}200$ ₪, והבונוס הוא $1{,}000\cdot 0.1^2 = 10$ ₪ — בדיוק ההפרש של 10 ₪ שראינו בטבלה.

אחרי שלוש שנים מקבלים קובייה: $(1+r)^3 = 1+3r+3r^2+r^3$. ובאופן כללי: כשפותחים את הסוגריים ב־$(1+r)(1+r)\cdots(1+r)$, בוחרים מכל סוגריים 1 או r. אם בוחרים 1 מכולם, מקבלים 1; אם בוחרים r מסוגריים אחד בלבד, יש לכך n אפשרויות, וביחד הן נותנות $n\cdot r$; כל שאר הבחירות נותנות מכפלות חיוביות. לכן, כאשר $r>0$,

$$(1+r)^n = 1+n\cdot r+\big(\text{עוד איברים חיוביים}\big) \;\geq\; 1+n\cdot r.$$

כלומר, ריבית דריבית נותנת תמיד לפחות כמו ריבית פשוטה, והפער — כל האיברים עם r^2, r^3 וכן הלאה — הוא "הריבית על הריבית". אי־השוויון הזה נקרא **אי־שוויון ברנולי**. את המקדמים המדויקים — כמו 1, 3, 3, 1 בקובייה — נותן **הבינום של ניוטון**.

7 מה עושים עם הנוסחה?

שימוש 1: כמה יהיה בחיסכון?

דוגמה מספרית

הפקידו 10,000 ₪ בחיסכון עם ריבית דריבית של 4% לשנה. כמה כסף יהיה בחיסכון אחרי 5 שנים? ואחרי 15 שנים?

$q = 1+\frac{4}{100} = 1.04$.
אחרי 5 שנים: $M_5 = 10{,}000\cdot 1.04^5 \approx 12{,}166.53$ ₪.
אחרי 15 שנים: $M_{15} = 10{,}000\cdot 1.04^{15} \approx 18{,}009.44$ ₪.

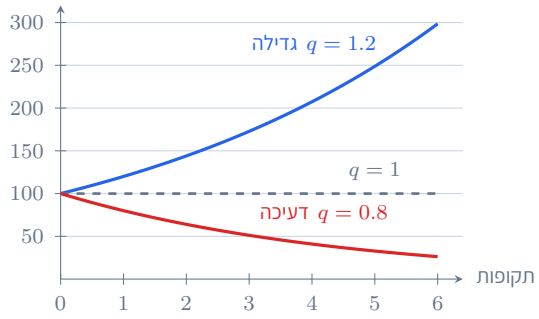
שימוש 2: דעיכה – כשהערך יורד

אם ערך יורד ב־$p\%$ בכל תקופה, אז מכל סכום x נשאר

$$x - \frac{p}{100}\cdot x = x\left(1-\frac{p}{100}\right).$$

כלומר, גם כאן הסכום **מוכפל** בכל תקופה באותו מספר, $q = 1 - \frac{p}{100}$, ושתי ההוכחות תקפות בלי שום שינוי. ההבדל היחיד: עכשיו $q < 1$, ולכן הסכום הולך וקטן.

לפי q יודעים מה קורה: $q > 1$ — גדילה; $q = 1$ — אין שינוי; $0 < q < 1$ — דעיכה.



סרטוט 5: $M_n = 100\cdot q^n$ **לשלושה ערכים של** q.

דוגמה מספרית

מכונית נקנתה ב־120,000 ₪, וערכה יורד ב־15% בכל שנה. מה ערכה אחרי 3 שנים?

$q = 1 - \frac{15}{100} = 0.85$, ולכן $M_3 = 120{,}000\cdot 0.85^3 = 120{,}000\cdot 0.614125 = 73{,}695$ ₪.

שימוש 3: תוך כמה זמן הסכום יוכפל?

בריבית של 7% לשנה, אחרי כמה שנים הסכום יוכפל? צריך למצוא n שבו $M_0\cdot 1.07^n \geq 2M_0$, כלומר $1.07^n \geq 2$. שימו לב: הקרן מצטמצמת, ולכן זמן ההכפלה **לא תלוי בקרן** — 100 ₪ ומיליון ₪ מוכפלים באותו זמן.

בניסוי וטעייה: $1.07^{10} \approx 1.967$ (עוד לא), ו־$1.07^{11} \approx 2.105$ (כבר כן). לכן הסכום מוכפל אחרי 11 שנים. מי שמכיר לוגריתמים יכול לפתור ישירות: $n = \frac{\log 2}{\log 1.07} \approx 10.24$.

יש גם כלל אצבע מפורסם, **כלל ה־72**: זמן ההכפלה בשנים הוא בערך $72 \div p$. כאן $72 \div 7 \approx 10.3$ — קרוב מאוד. הכלל טוב לריביות קטנות, של אחוזים בודדים.

שימוש 4 (להעמקה): ריבית כמה פעמים בשנה, והמספר e

לעיתים קרובות הריבית נקובה **לשנה**, אבל מצטרפת לחשבון כל חודש. אם הריבית השנתית היא r (כשבר עשרוני) והיא מצטרפת k פעמים בשנה, אז בכל תקופה מצטרפת ריבית של $\frac{r}{k}$, ובשנה יש k תקופות. אחרי t שנים עוברות $k\cdot t$ תקופות, ובכל אחת מהן הסכום מוכפל ב־$1+\frac{r}{k}$:

$$M = M_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k\cdot t}.$$

מה קורה כשמחלקים את השנה ליותר ויותר תקופות? נבדוק קרן של 1 ₪, ריבית של 100% לשנה ($r = 1$) ושנה אחת:

מספר התקופות k	1	2	4	12	365	1,000,000
הסכום $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$	2	2.25	2.4414	2.6130	2.7146	2.71828

הסכום גדל, אבל לא בלי גבול: הוא מתקרב למספר $e \approx 2.71828$. כשהריבית מצטרפת "בכל רגע" (k שואף לאינסוף) מקבלים **ריבית רציפה**:

$$M = \lim_{k\to\infty} M_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} = M_0\cdot e^{rt}.$$

למה? נסמן $m = \frac{k}{r}$. אז

$$\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} = \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt},$$

וכש־k (ואיתו m) שואף לאינסוף, הביטוי שבסוגריים המרובעים שואף ל־e.

טעות נפוצה

- q **הוא לא האחוז.** בריבית של 5% גורם הגדילה הוא $q = 1.05$, לא 5 ולא 0.05.
- **האינדקס.** $M_n = M_0 \cdot q^n$, ולא $M_0 \cdot q^{n-1}$: אחרי שנה אחת הסכום כבר הוכפל ב־q פעם אחת. בדקו תמיד את $n = 1$.
- **אחוזים לא מתחברים.** 10% לשנה במשך 3 שנים זה לא 30%, אלא $1.1^3 = 1.331$ — עלייה של 33.1%.
- **עלייה ואז ירידה באותו אחוז לא מחזירות לנקודת ההתחלה.** עלייה של 20% ואחריה ירידה של 20% הן כפל ב־$1.2 \cdot 0.8 = 0.96$, כלומר ירידה של 4%.
- **התקופה והריבית חייבות להתאים.** בריבית חודשית n הוא מספר החודשים, ו־p הוא אחוז הריבית לחודש.

הידעתם?

על לוח חימר מבבל, מלפני כ־3,700 שנה, כתובה שאלה שמוכרת לנו היטב: תוך כמה זמן סכום כסף יוכפל, אם הריבית היא 20% לשנה והיא מצטרפת לקרן?
בשנת 1683 חקר המתמטיקאי השווייצרי יעקב ברנולי בדיוק את השאלה של שימוש 4: מה קורה לריבית של 100% לשנה כשהיא מצטרפת בתדירות גבוהה יותר ויותר. הוא הראה שהתוצאה לא גדלה בלי גבול, ושהיא נמצאת בין 2 ל־3. זה המספר שנקרא היום e. את האות e בחר לאונרד אוילר במאה ה־18.
ברשת מסתובב משפט שמיוחס לאלברט איינשטיין: "ריבית דריבית היא הפלא השמיני בעולם". אין שום מקור שמראה שאיינשטיין באמת אמר אותו — אבל הרעיון שבו נכון.

8 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

1. הפקידו 5,000 ₪ בריבית דריבית של 3% לשנה. כמה כסף יהיה בחיסכון אחרי 4 שנים?
2. במעבדה יש 4,096 חיידקים, ומספרם גדל ב־25% בכל שעה. כמה חיידקים יהיו אחרי 3 שעות?
3. ערכו של מחשב יורד ב־20% בכל שנה. אחרי כמה שנים ערכו יהיה לראשונה פחות ממחצית ערכו המקורי?
4. מחיר של מוצר עלה ב־10%, ואחר כך ירד ב־10%. האם המוצר חזר למחירו המקורי?
5. בנק א׳ נותן ריבית של 12% לשנה, שמצטרפת פעם בשנה. בנק ב׳ נותן 1% לחודש, שמצטרף כל חודש. באיזה בנק כדאי לחסוך לשנה, ובכמה אחוזים יגדל הסכום בו?
6. ענו על השאלה מתיבת "עצרו ובדקו" בהוכחה 1.

תשובות

1. $q = 1.03$, ולכן $M_4 = 5{,}000 \cdot 1.03^4 \approx 5{,}627.54$ ₪.
2. $q = 1.25$, ולכן $M_3 = 4{,}096 \cdot 1.25^3 = 4{,}096 \cdot 1.953125 = 8{,}000$ חיידקים.
3. $q = 0.8$. אחרי 3 שנים נשאר $0.8^3 = 0.512$ מהערך — עוד לא פחות מחצי. אחרי 4 שנים נשאר $0.8^4 = 0.4096 < 0.5$ מהערך, ולכן התשובה היא 4 שנים.
4. לא. $1.1 \cdot 0.9 = 0.99$, כלומר המחיר הסופי נמוך ב־1% מהמחיר המקורי.
5. בבנק א׳ הסכום מוכפל ב־1.12. בבנק ב׳ הוא מוכפל ב־$1.01^{12} \approx 1.1268$, כלומר גדל בכ־12.68%. לכן בנק ב׳ עדיף: כל ריבית חודשית מצטרפת לקרן ומרוויחה ריבית כבר בחודשים הבאים.
6. אז $M_2 = M_1 + \frac{p}{100} \cdot M_0 = M_0 + 2 \cdot \frac{p}{100} \cdot M_0$, ובכל שנה מצטרף אותו סכום, $\frac{p}{100} \cdot M_0$. אחרי n שנים: $M_n = M_0 \left(1 + \frac{n \cdot p}{100}\right)$ — זאת הנוסחה של ריבית פשוטה.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את המסמך בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנו קטעים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.

אינסוף
מתמטיקה