סכום סדרה הנדסית אינסופית

איך מחברים אינסוף מספרים — ומקבלים מספר רגיל

כיתות י״א–י״ב | 4–5 יח״ל | סדרות | 3 הוכחות | כ־15 דקות קריאה

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: חצי, ועוד רבע, ועוד שמינית…
- מה פירוש ״סכום של אינסוף מספרים״, ומתי הוא קיים.
- הוכחה 1: מהסכום הסופי אל הגבול.
- הוכחה 2: הסכום שמכיל את עצמו — ומלכודת אחת.
- הוכחה 3: הוכחה בציור, עם קו ישר אחד.
- מה קורה כש־$|q| \geq 1$, שברים מחזוריים, ושאלות לבדיקה עצמית.

מה כדאי לדעת קודם

- סכום n האיברים הראשונים בסדרה הנדסית: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.
- $|q| < 1$ פירושו $-1 < q < 1$.
- שיפוע ומשוואת ישר.

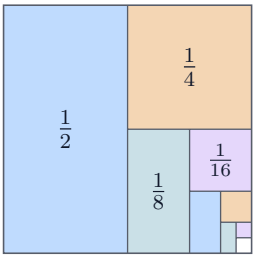
1 האינטואיציה: חצי, ועוד רבע, ועוד שמינית

האינטואיציה

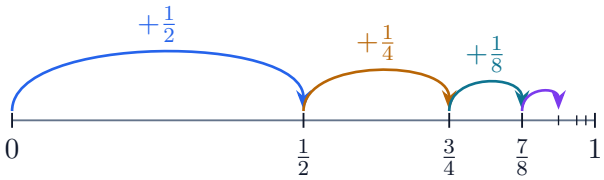
יש לכם חפיסת שוקולד אחת. ביום הראשון אתם אוכלים חצי ממנה. ביום השני — חצי ממה שנשאר, כלומר רבע חפיסה. ביום השלישי — שוב חצי ממה שנשאר, כלומר שמינית, וכן הלאה: בכל יום חצי מהשארית. כמה שוקולד תאכלו בסך הכול?

אחרי יום אחד אכלתם $\frac{1}{2}$ חפיסה, אחרי יומיים $\frac{3}{4}$, אחרי שלושה ימים $\frac{7}{8}$, ואחרי ארבעה $\frac{15}{16}$. השאריות $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\ldots$ קטנות בכל יום פי 2. החפיסה אף פעם לא נגמרת לגמרי, אבל השארית מתקרבת לאפס ככל שרוצים — כלומר הכמות שאכלתם מתקרבת לחפיסה שלמה. לכן אומרים שהסכום של **כל** החלקים — אינסוף חלקים — הוא בדיוק 1:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1.$$



שטח הריבוע כולו: 1



בכל קפיצה עוברים חצי מהמרחק שנשאר עד 1

סרטוט 1: משמאל: הריבוע מתמלא בחצאים. מימין: הסכומים $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots$ מתקרבים ל־1.

דוגמה מספרית: כמה נשאר?

מספר הימים	כמה אכלתם	כמה נשאר
1	0.5	0.5
2	0.75	0.25
4	0.9375	0.0625
10	$0.99902\ldots$	≈ 0.00098
20	$0.99999904\ldots$	≈ 0.00000095

אחרי n ימים נשאר בדיוק $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ מהחפיסה. השארית יכולה להיות קטנה מכל מספר חיובי שתבחרו — צריך רק לחכות מספיק ימים.

2 מה זה בכלל "סכום של אינסוף מספרים"?

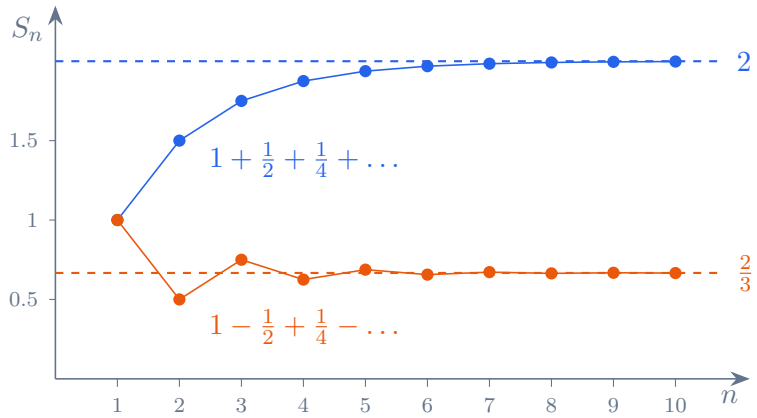
אי אפשר לחבר אינסוף מספרים אחד אחרי השני: החיבור לא ייגמר לעולם. לכן מגדירים את הסכום האינסופי בעזרת סכומים סופיים. נסמן ב־S_n את סכום n האיברים הראשונים:

$$S_1 = a_1, \qquad S_2 = a_1 + a_2, \qquad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \qquad \ldots$$

הסכומים האלה נקראים **סכומים חלקיים**. אם הסכומים החלקיים מתקרבים למספר מסוים S ככל ש־n גדל — כלומר ההפרש בין S_n ל־S קטן ככל שרוצים כש־n גדול מספיק — אומרים שהסכום **מתכנס**, ושהמספר S הוא סכום כל האיברים. סדרה הנדסית שהסכום שלה מתכנס נקראת **סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת** (בחלק מספרי הלימוד: "סדרה הנדסית אינסופית יורדת"). כותבים

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

וקוראים: "S הוא הגבול של S_n כש־n שואף לאינסוף". בקיצור כותבים גם $S_n \to S$ (קוראים: "S_n שואף ל־S"). אם הסכומים החלקיים לא מתקרבים לאף מספר, לסדרה **אין** סכום. (באוניברסיטה קוראים לסכום אינסופי כזה "טור".)



סרטוט 2: הסכומים החלקיים של שתי סדרות. כש־$q = \frac{1}{2}$ הם מטפסים אל 2. כש־$q = -\frac{1}{2}$ הם קופצים לסירוגין מעל $\frac{2}{3}$ ומתחתיו, ומתקרבים אליו.

3 המשפט

סכום סדרה הנדסית אינסופית

בסדרה הנדסית אינסופית שבה האיבר הראשון הוא $a_1 \neq 0$ ומנת הסדרה מקיימת $|q| < 1$, כלומר $-1 < q < 1$, סכום כל האיברים הוא

$$\boxed{S = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots = \frac{a_1}{1-q}}$$

ואם $|q| \geq 1$, לסדרה אין סכום: הסכומים החלקיים לא מתקרבים לאף מספר.

במילים: לסדרה הנדסית אינסופית יש סכום אם המנה שלה בין -1 ל־1, ורק אז. הסכום שלה הוא האיבר הראשון חלקי $1 - q$.

התנאי $|q| < 1$ נקרא **תנאי ההתכנסות**, ותמיד בודקים אותו לפני שמשתמשים בנוסחה. במשפט יש שתי טענות: כש־$|q| < 1$ הסכום קיים ושווה ל־$\frac{a_1}{1-q}$, וכש־$|q| \geq 1$ אין סכום. שלוש ההוכחות הבאות עוסקות בטענה הראשונה, ואת השנייה נוכיח בסעיף 8.

4 הוכחה 1: מהסכום הסופי אל הגבול

הרעיון את הסכום של n איברים אנחנו כבר יודעים לחשב. נבדוק מה קורה לנוסחה שלו כש־n גדל וגדל.

קודם כול: למה q^n מתקרב ל־0?

כשכופלים מספר ב־q, הערך המוחלט שלו נכפל ב־$|q|$. אם $|q| < 1$, כל כפל כזה מקטין את הערך המוחלט. למשל, כש־$q = 0.9$:

$$0.9^{10} \approx 0.35, \qquad 0.9^{50} \approx 0.0052, \qquad 0.9^{100} \approx 0.000027.$$

ההקטנה איטית, אבל היא לא נעצרת: q^n מתקרב ל־0 ככל שרוצים. כש־q שלילי, למשל $q = -0.5$, הסימן מתחלף $(-0.5,\ 0.25,\ -0.125,\ \ldots)$, אבל הערך המוחלט קטן פי 2 בכל צעד, ולכן גם כאן q^n מתקרב ל־0.

להעמקה: נימוק מלא לכך ש־q^n שואף ל־0

"קטן בכל צעד" עוד לא מספיק: הסדרה $1.1,\ 1.01,\ 1.001,\ \ldots$ קטנה כל הזמן, ובכל זאת מתקרבת ל־1 ולא ל־0. הנה נימוק מלא. כיוון ש־$|q| < 1$, אפשר לכתוב $\frac{1}{|q|} = 1 + h$ עם $h > 0$. במכפלה $(1+h)^n = (1+h)(1+h)\cdots(1+h)$ נפתח סוגריים: אם בוחרים 1 מכל הסוגריים מקבלים 1; אם בוחרים h מזוג סוגריים אחד ו־1 מכל השאר, מקבלים n פעמים h; וכל שאר המכפלות חיוביות. לכן $(1+h)^n \geq 1 + nh$ (אי־שוויון ברנולי), ומכאן

$$|q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}.$$

המספר $\frac{1}{nh}$ קטן ככל שרוצים כש־n גדל מספיק. למשל, כש־$q = 0.9$ מתקבל $h = \frac{1}{9}$, ולכן $0.9^n < \frac{9}{n}$.

ההוכחה

	טענה	נימוק
1	$S_n = \frac{a_1\,(1-q^n)}{1-q}$	סכום n איברים; מותר, כי $q \neq 1$
2	$S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q}\cdot q^n$	פירוק השבר לשני שברים
3	$q^n \to 0$ כש־$n \to \infty$	כי $\lvert q\rvert < 1$, כפי שראינו למעלה
4	$\frac{a_1}{1-q}\cdot q^n \to 0$	מספר קבוע כפול גודל ששואף ל־0
5	$S_n \to \frac{a_1}{1-q}$	מצעד 2: מספר קבוע פחות גודל ששואף ל־0

מש"ל ■

כלומר, הסכומים החלקיים מתקרבים ל־$\frac{a_1}{1-q}$, ולכן זה הסכום של הסדרה: $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

מה עוד מלמד צעד 2: כמה "חסר" אחרי n איברים

נסמן $S = \frac{a_1}{1-q}$. צעד 2 אומר ש־$S_n = S - S\cdot q^n$, כלומר

$$S - S_n = S \cdot q^n.$$

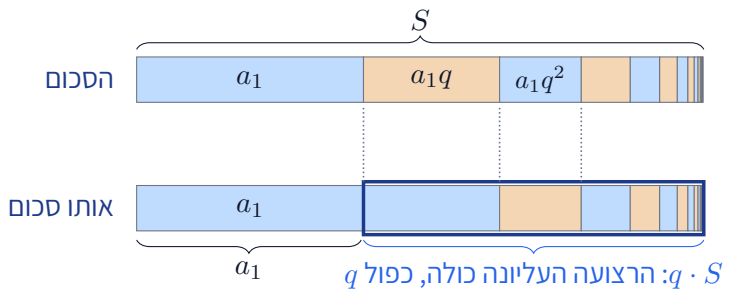
ההפרש בין הסכום האינסופי לסכום של n איברים הוא S כפול q^n, וכל איבר נוסף כופל אותו ב־q. בחפיסת השוקולד $S = 1$ ו־$q = \frac{1}{2}$, ולכן אחרי n ימים נשארים $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ — בדיוק מה שראינו בטבלה.

עצרו ובדקו

הסכום של $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ הוא 2. כמה איברים צריך לחבר כדי שההפרש בין הסכום החלקי ל־2 יהיה קטן מ־0.001? היעזרו בנוסחה $S - S_n = S\cdot q^n$. התשובה בסוף המסמך.

5 הוכחה 2: הסכום שמכיל את עצמו

הרעיון נמחק מהסכום האינסופי את האיבר הראשון. מה שנשאר הוא שוב סכום אינסופי של אותה סדרה, רק שכל איבר בו מוכפל ב־q. כלומר, הסכום "מכיל עותק מוקטן של עצמו".



סרטוט 3: אחרי האיבר a_1 מגיע עותק מוקטן של כל הסכום: כל אורך בו מוכפל ב־q. כאן $q = 0.6$.

	טענה	נימוק
1	$S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots$	הסכום שאנחנו מחפשים
2	$S = a_1 + q\,(a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots)$	הוצאת q מכל האיברים חוץ מהראשון
3	$S = a_1 + q \cdot S$	בסוגריים — שוב הסכום S כולו
4	$S - q \cdot S = a_1$	העברת אגפים
5	$S = \dfrac{a_1}{1-q}$	גורם משותף, וחלוקה ב־$1 - q \neq 0$

מש״ל ■

קצר ויפה. אבל רגע — בהוכחה הזאת לא השתמשנו בכלל בתנאי $|q| < 1$. משהו חשוד.

⚠ רגע! איפה המלכודת?

ננסה את אותו טריק בדיוק על הסדרה $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$, שבה $q = 2$:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = 1 + 2\,(1 + 2 + 4 + \dots) = 1 + 2S \quad \Longrightarrow \quad S = -1.$$

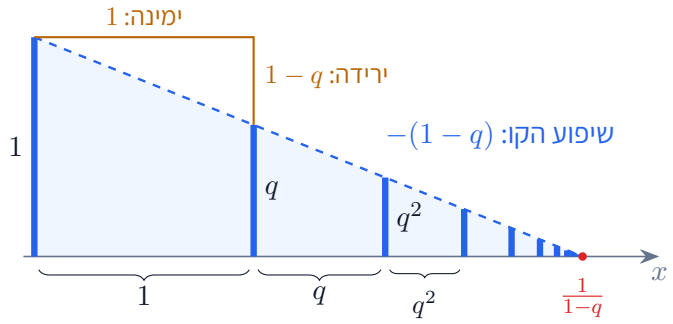
סכום של מספרים חיוביים יצא שלילי! מה השתבש? בצעד 1 הנחנו בשקט שהסכום S **קיים**, כלומר שהוא מספר. אבל לסדרה $1 + 2 + 4 + \dots$ אין סכום: הסכומים החלקיים 1, 3, 7, 15, … גדלים בלי גבול. מי שמבצע פעולות חשבון על ״מספר״ שאינו קיים יכול להגיע לכל שטות.

המסקנה: הוכחה 2 מראה ש**אם** לסדרה יש סכום, הוא חייב להיות $\frac{a_1}{1-q}$. הוכחה 1 היא שמבטיחה שכש־$|q| < 1$ הסכום באמת קיים. יחד הן מרכיבות הוכחה שלמה, והוכחה 2 היא דרך מצוינת לזכור את הנוסחה.

6 הוכחה 3: הוכחה בציור – עמודים שראשיהם על קו ישר

הרעיון נצייר את איברי הסדרה כעמודים שעומדים זה ליד זה. מתברר שראשי כל העמודים נמצאים על קו ישר אחד, והנקודה שבה הקו פוגש את הציר היא הסכום.

נניח ש־$0 < q < 1$ ו־$a_1 = 1$ (לכל a_1 אחר כופלים את כל האורכים ב־a_1). את העמודים נעמיד כך: בנקודה $x = 0$ עמוד בגובה 1. ממנו נלך ימינה מרחק 1, ושם נעמיד עמוד בגובה q. משם נלך ימינה מרחק q, ונעמיד עמוד בגובה q^2, וכן הלאה: **המרחק לעמוד הבא שווה לגובה העמוד הנוכחי**, והגובה של כל עמוד הוא q כפול הגובה של הקודם.



סרטוט 4: העמודים בגבהים 1, q, q^2, ..., והמרחק מכל עמוד לעמוד שאחריו שווה לגובהו. ראשי העמודים על ישר אחד (כאן $q = 0.6$).

	טענה	נימוק
1	$x_k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1} = S_k$	מקום העמוד שגובהו q^k
2	$\frac{q^{k+1} - q^k}{q^k} = q - 1$	השיפוע בין ראשי שני עמודים סמוכים
3	ראשי כל העמודים על הישר $y = 1 - (1-q)\,x$	השיפוע קבוע, והישר עובר דרך $(0, 1)$
4	$1 - (1-q)\,x = 0 \iff x = \frac{1}{1-q}$	נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה־x
5	$S_k \to \frac{1}{1-q}$	הגבהים $q^k \to 0$, והראשים על הישר

מש"ל ■

בונוס: הראש של העמוד שגובהו q^k נמצא על הישר, ולכן $q^k = 1 - (1-q)\,S_k$. מכאן $S_k = \frac{1-q^k}{1-q}$ — הציור נותן "בחינם" גם את נוסחת הסכום הסופי!

7 שלוש הדרכים זו מול זו

	הוכחה 1: גבול	הוכחה 2: עותק מוקטן	הוכחה 3: ציור
הרעיון	נוסחת S_n, ואז $q^n \to 0$	בתוך הסכום מסתתר הסכום עצמו, כפול q	ראשי העמודים על ישר אחד
הכלים	נוסחת הסכום הסופי, גבול	משוואה ממעלה ראשונה	שיפוע ומשוואת ישר
היתרון	מוכיחה גם שהסכום קיים	קצרה, וקל לזכור בעזרתה את הנוסחה	"רואים" את הסכום בעיניים
המגבלה	—	נכונה רק אחרי שיודעים שהסכום קיים	בציור הזה רק $0 < q < 1$

8 ומה קורה כשהתנאי $|q| < 1$ לא מתקיים?

נבדוק את כל המקרים, עם $a_1 = 1$:

המנה	דוגמה	הסכומים החלקיים	יש סכום?
$q > 1$	$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$	$1, 3, 7, 15, \ldots$ גדלים בלי גבול	לא
$q = 1$	$1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$	$1, 2, 3, 4, \ldots$ גדלים בלי גבול	לא
$q = -1$	$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$	$1, 0, 1, 0, \ldots$ קופצים ולא מתייצבים	לא
$q < -1$	$1 - 2 + 4 - 8 + \ldots$	$1, -1, 3, -5, 11, \ldots$ הקפיצות גדלות	לא
$-1 < q < 1$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$	$1, 1.5, 1.75, \ldots$ מתקרבים ל־2	כן

יש נימוק אחד שמכסה את כל המקרים של $|q| \geq 1$: כל איבר מקיים $|a_n| = |a_1| \cdot |q|^{n-1} \geq |a_1|$. כלומר, בכל צעד הסכום החלקי זז לפחות ב־$|a_1|$, ולכן הוא לא יכול "להתיישב" ליד מספר אחד: סכומים חלקיים שמתקרבים כולם למספר S חייבים להתקרב גם זה לזה. לכן התנאי $|q| < 1$ הוא **הכרחי ומספיק**: בלעדיו אין סכום, ואיתו יש.

9 מה עושים עם הנוסחה?

שימוש 1: שבר עשרוני מחזורי

כתבו את $0.\overline{36} = 0.363636\ldots$ (הספרות 36 חוזרות שוב ושוב) כשבר פשוט.

נפרק: $0.363636\ldots = 0.36 + 0.0036 + 0.000036 + \ldots$. זה סכום של סדרה הנדסית אינסופית שבה $a_1 = 0.36$ ו־$q = 0.01$, והתנאי $|q| < 1$ מתקיים. לכן

$$S = \frac{0.36}{1 - 0.01} = \frac{0.36}{0.99} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}.$$

בדקו במחשבון: $4 \div 11 = 0.363636\ldots$

שימוש 2: האם $0.999\ldots = 1$?

נפרק: $0.999\ldots = 0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots$, כלומר $a_1 = 0.9$ ו־$q = 0.1$. לכן

$$S = \frac{0.9}{1 - 0.1} = \frac{0.9}{0.9} = 1.$$

זה לא "כמעט 1" ולא "קצת פחות מ־1" — זה **בדיוק** 1. הסכום האינסופי הוא הגבול של הסכומים החלקיים 0.9, 0.99, 0.999, …, והגבול שלהם הוא 1. ועוד דרך לראות את זה: ההפרש בין 1 לבין $0.99\ldots9$ עם n תשיעיות הוא בדיוק 0.1^n. לכן ההפרש בין 1 לבין $0.999\ldots$ קטן מ־0.1, מ־0.01, מ־0.001 — מכל מספר חיובי שנבחר. מספר שאינו שלילי וקטן מכל מספר חיובי הוא 0, ולכן $0.999\ldots = 1$.

שימוש 3: כדור קופץ

כדור נופל מגובה 2 מטרים. אחרי כל פגיעה ברצפה הוא קופץ לגובה של $\frac{3}{4}$ מהגובה הקודם. כמה מטרים יעבור הכדור בסך הכול?

הכדור יורד 2 מטרים. בכל קפיצה הוא עולה ויורד את אותו מרחק: 1.5 מטרים למעלה ו־1.5 למטה, אחר כך 1.125 ו־1.125, וכן הלאה. הגבהים 1.5, 1.125, … הם סדרה הנדסית אינסופית עם $a_1 = 1.5$ ו־$q = \frac{3}{4}$, וסכומם $\frac{1.5}{1-0.75} = 6$. לכן הכדור עובר $2 + 2 \cdot 6 = 14$ מטרים.

טעות נפוצה

- **לשכוח את תנאי ההתכנסות.** לפי הנוסחה, $1 + 2 + 4 + \ldots$ "שווה" ל־$\frac{1}{1-2} = -1$ — שטות, כי $q = 2$. קודם בודקים ש־$|q| < 1$.
- **המנה היא יחס, לא האיבר השני.** בסדרה $6, -2, \frac{2}{3}, \ldots$ המנה היא $q = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$, ולא -2. הסכום: $\frac{6}{1+\frac{1}{3}} = 4.5$.
- **התנאי הוא על q, לא על האיברים.** הסדרה $1000 + 100 + 10 + \ldots$ מתכנסת, אף שהאיברים הראשונים גדולים: $S = \frac{1000}{1-0.1} = 1111.\overline{1}$.
- **"בערך".** $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ שווה **בדיוק** ל־1, ולא "בערך 1".

הידעתם?

הפילוסוף היווני זנון מאֶלֵאָה (המאה ה־5 לפני הספירה) הציע כמה "פרדוקסים" על תנועה, שמוכרים לנו בעיקר מכתביו של אריסטו. אחד מהם, "פרדוקס החצייה", אומר בערך כך: כדי לחצות חדר צריך קודם לעבור חצי ממנו, אחר כך חצי מהשארית, אחר כך חצי ממה שנשאר — אינסוף שלבים. איך אפשר לסיים אינסוף שלבים? התשובה המתמטית היא בדיוק הנוסחה שלנו: אורכי השלבים $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ מסתכמים באורך סופי — אורך החדר כולו — וגם הזמנים שלהם מסתכמים בזמן סופי. אבל את ההגדרה המדויקת של גבול, שעליה נשענת הוכחה 1, ניסחו רק במאה ה־19.

ארכימדס (המאה ה־3 לפני הספירה) חישב את השטח של קטע פרבולה בעזרת הסדרה $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots$: הוא הוכיח שהסכומים החלקיים שלה מתקרבים ככל שרוצים ל־$\frac{4}{3}$. היוונים נמנעו מלדבר על "סכום של אינסוף איברים", אבל בלשון של היום זה בדיוק $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{4}{3}$ — אחת הדוגמאות הקדומות ביותר לסכום של סדרה הנדסית אינסופית.

10 בדקו את עצמכם

שבע שאלות קצרות

1. חשבו את $8+4+2+1+\dots$
2. חשבו את $5-\frac{5}{3}+\frac{5}{9}-\dots$
3. כתבו את $0.272727\dots=0.\overline{27}$ כשבר פשוט.
4. לאילו ערכים של x יש סכום לסדרה $1+2x+4x^2+8x^3+\dots$, ומהו?
5. הסכום של סדרה הנדסית אינסופית הוא 12, והאיבר הראשון שלה הוא 4. מצאו את מנת הסדרה.
6. מצאו את הטעות: "$S=1-1+1-1+\dots$, ולכן $S=1-(1-1+1-\dots)=1-S$, ומכאן $S=\frac{1}{2}$".
7. השאלה מתיבת "עצרו ובדקו": כמה איברים של $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots$ צריך לחבר כדי שההפרש בין הסכום החלקי ל־2 יהיה קטן מ־0.001?

תשובות

1. $a_1=8$ ו־$q=\frac{1}{2}$, ולכן $S=\frac{8}{1-\frac{1}{2}}=16$.
2. $a_1=5$ ו־$q=-\frac{1}{3}$, ולכן $S=\frac{5}{1+\frac{1}{3}}=\frac{15}{4}=3.75$.
3. נפרק: $0.272727\dots=0.27+0.0027+\dots$. כאן $a_1=0.27$ ו־$q=0.01$, ולכן $S=\frac{0.27}{0.99}=\frac{27}{99}=\frac{3}{11}$.
4. המנה היא $q=2x$, ולכן צריך $|2x|<1$, כלומר $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, וגם $x\neq 0$ (כי מנת סדרה הנדסית אינה 0). הסכום אז הוא $\frac{1}{1-2x}$.
5. $12=\frac{4}{1-q}$, ולכן $1-q=\frac{1}{3}$, כלומר $q=\frac{2}{3}$. התנאי $|q|<1$ מתקיים.
6. המנה היא $q=-1$, ולסדרה אין סכום: הסכומים החלקיים הם $1,0,1,0,\dots$. הטעות היא ההנחה ש־S קיים — בדיוק המלכודת של הוכחה 2.
7. $S-S_n=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n<0.001$, כלומר $2^n>2000$. מתקיים $2^{10}=1024$ ו־$2^{11}=2048$, ולכן צריך 11 איברים.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את המסמך בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנו קטעים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.

אינסוף
מתמטיקה