

סכום סדרה הנדסית

כופלים, מחסירים – וכמעט כל האיברים נעלמים

כ-18 דקות קריאה

4 הוכחות

סדרות

4-5 יח"ל

כיתות י"א-י"ב

מה כדאי לדעת קודם

- מהי סדרה, ומה פירוש הסימון a_n .
- חוקי חזקות, למשל $q \cdot q^k = q^{k+1}$.
- הוצאת גורם משותף.
- הזהות $(1-q)(1+q) = 1-q^2$.
- שיפוע של ישר (להוכחה 4).

מה תמצאו כאן

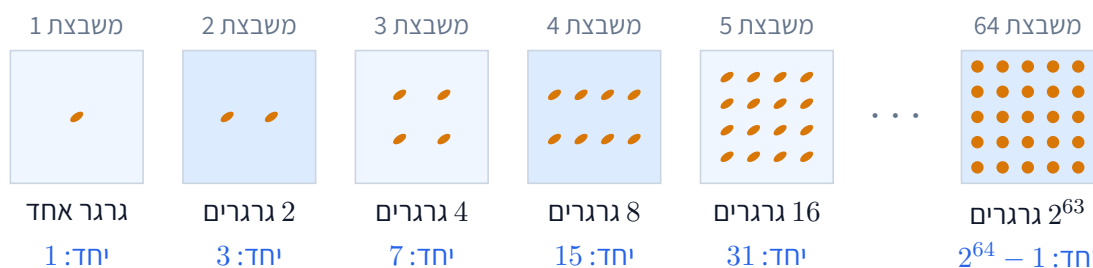
- אינטואיציה: גרגרי אורז על לוח שחמט.
- שלוש הוכחות אלגבריות: כפל וחיסור, טבלת כפל, ו"קילוף" של איבר.
- הוכחה 4: הוכחה בציור – עמודים שראשיהם על קו ישר.
- המקרה $q = 1$, דוגמאות, טעויות נפוצות ושאלות לבדיקה עצמית.

1 האינטואיציה: גרגרי אורז על לוח שחמט

האינטואיציה

לפי אגדה עתיקה, ממציא משחק השחמט הציג את המשחק לפני המלך, והמלך התלהב והבטיח לו כל פרס שיבקש. הממציא ביקש "רק" אורז: גרגר אחד על המשבצת הראשונה של הלוח, 2 גרגרים על השנייה, 4 על השלישית – ובכל משבצת פי 2 גרגרים מאשר במשבצת שלפניה, עד המשבצת ה-64. המלך צחק על הבקשה הצנועה. כמה אורז הוא הבטיח בעצם?

נחבר את הגרגרים שעל המשבצות הראשונות: 1, ואז $1+2=3$, ואז $1+2+4=7$, ואז 15, ואז 31. מתגלה דפוס: הסכום תמיד **קטן ב-1** מהמספר שבמשבצת הבאה. למה? נאסוף את הגרגרים לערמה אחת, משבצת אחרי משבצת, ונתחיל עם גרגר "מתנה" אחד בערמה. הגרגר הנוסף והגרגר של המשבצת הראשונה הם 2; יחד עם 2 הגרגרים של המשבצת השנייה – 4; יחד עם 4 הגרגרים של השלישית – 8, וכן הלאה. בכל שלב יש בערמה בדיוק אותו מספר גרגרים כמו במשבצת הבאה, ולכן כשמוסיפים לערמה את המשבצת הבאה, היא מכפילה את עצמה, כמו כדור שלג. כלומר: הסכום ועוד 1 שווה למספר הגרגרים במשבצת הבאה. במשבצת ה- $(n+1)$ יש 2^n גרגרים, ולכן על n המשבצות הראשונות יש $2^n - 1$ גרגרים.



סרטוט 1: בכל משבצת יש פי 2 גרגרים מאשר בקודמת. בכחול: מספר הגרגרים בכל המשבצות עד אליה, כולל אותה.

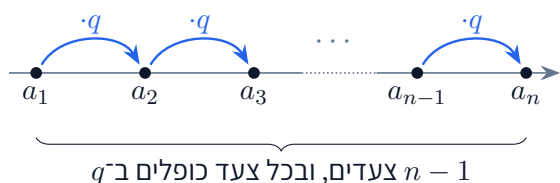
כמה אורז הבטיח המלך?

על כל הלוח יש $2^{64} - 1 = 18,446,744,073,709,551,615$ גרגרים – יותר מ-18 מיליארד מיליארד. אם גרגר אורז שוקל בערך 0.02 גרם, מדובר בכ-370 מיליארד טונות: מאות שנים של יבול האורז של כל העולם. הדפוס שגילינו, $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, הוא מקרה פרטי של הנוסחה שנוכיח במסמך הזה: הסכום של סדרה שבה כל איבר שווה לאיבר שלפניו כפול מספר קבוע.

2 קודם כול: מהי סדרה הנדסית?

סדרה הנדסית היא סדרה שבה כל איבר, החל מהשני, מתקבל מהאיבר שלפניו בכפל באותו מספר. את המספר הזה מסמנים ב- q וקוראים לו **מנת הסדרה**, ואת האיבר הראשון מסמנים ב- a_1 . למשל, בסדרה $3, 6, 12, 24, \dots$ מתקיים $a_1 = 3$ ו- $q = 2$, ובסדרה $81, 27, 9, 3, \dots$ מתקיים $a_1 = 81$ ו- $q = \frac{1}{3}$. המנה יכולה להיות גם שלילית: בסדרה $1, -2, 4, -8, \dots$ המנה היא $q = -2$. נניח תמיד ש- $a_1 \neq 0$ ו- $q \neq 0$ (אחרת כמעט כל האיברים הם אפס, ואין מה לחשב).

כל צעד בסדרה הוא כפל ב- q :



$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 q = a_1 q^3$$

החזקה של q קטנה תמיד ב-1 ממספר האיבר, כי מ- a_1 ל- a_n עושים $n - 1$ צעדים. לכן האיבר הכללי הוא

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

סרטוט 2: מ- a_1 ל- a_n כופלים ב- q בדיוק $n - 1$ פעמים.

3 הנוסחה

נסמן ב- S_n את **סכום** n האיברים הראשונים בסדרה:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}.$$

סכום סדרה הנדסית

בסדרה הנדסית שבה האיבר הראשון הוא a_1 ומנת הסדרה היא $q \neq 1$, סכום n האיברים הראשונים הוא

$$S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}$$

או, בצורה שקולה,

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

ואם $q = 1$, כל האיברים שווים ל- a_1 , ולכן $S_n = n \cdot a_1$.

במילים: הסכום שווה לאיבר הראשון כפול שבר: במונה – המנה בחזקת מספר האיברים, פחות 1; במכנה – המנה פחות 1.

שתי הצורות שוות לגמרי: הצורה השנייה מתקבלת מהראשונה בכפל המונה והמכנה ב-1. כש- $q > 1$ נוהג להשתמש בצורה הראשונה, כי אז $q^n - 1$ חיוביים, וכש- $q < 1$ בצורה השנייה, שבה המכנה $1 - q$ חיובי. שימו לב: בנוסחה מופיע q^n , ולא q^{n-1} כמו באיבר הכללי.

4 הוכחה 1: כופלים במנה ומחסירים

הרעיון נכפול את כל הסכום ב- q . כל איבר יהפוך לאיבר שאחריו, ולכן qS_n הוא כמעט אותו סכום כמו S_n , רק "מוזז במקום אחד". כשנחסיר את שני הסכומים, כמעט הכול יתבטל.

חימום: $1 + 2 + 4 + 8 + 16$ 

$$\begin{array}{r} S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 \\ 2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 \\ \hline 2S - S = -1 \end{array}$$

המספרים 2, 4, 8 ו-16 מופיעים בשתי השורות ומתבטלים בחיסור. נשארים רק 32 מהשורה התחתונה ו-1 מהשורה העליונה, ולכן $S = 32 - 1 = 31$. בדקו בחיבור רגיל.

עכשיו נעשה את אותו הדבר בסדרה הנדסית כללית. בסרטוט רואים את שני הסכומים זה מעל זה, כשכל איבר עומד מעל "התאום" שלו:

נשאר רק למעלה

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} \\ qS_n = a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \end{array}$$

מופיעים בשתי השורות – בחיסור מתבטלים

נשאר רק למטה

סרטוט 3: השורה התחתונה היא השורה העליונה "מוזזת במקום אחד". בחיסור נשארים רק a_1q^n ו- a_1 .

נימוק	טענה
הגדרת הסכום, כי $a_k = a_1q^{k-1}$	$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}$ ①
כפל שני האגפים ב- q : כל חזקה עולה ב-1	$qS_n = a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$ ②
חיסור צעד 1 מצעד 2: האיברים מ- a_1q עד a_1q^{n-1} מתבטלים	$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1$ ③
הוצאת גורם משותף בכל אגף	$S_n(q - 1) = a_1(q^n - 1)$ ④
חלוקה ב- $q - 1$, שאינו אפס כי $q \neq 1$	$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ ⑤

מש"ל ■

את הצורה השנייה של הנוסחה מקבלים בכפל המונה והמכנה ב-1:

$$\frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1 (q^n - 1)}{-(q - 1)} = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}.$$

✓ עצרו ובדקו

בצעד 5 חילקנו ב- $q - 1$, ולכן היינו צריכים את ההנחה $q \neq 1$. מה אומר השוויון שבצעד 4 כש- $q = 1$? האם אפשר ללמוד ממנו משהו על S_n ? ואיך בכל זאת מחשבים את S_n במקרה הזה? התשובה בסוף המסמך.

5 הוכחה 2: הכללה של הפרש הריבועים

הרעיון את הזהות $(1 - q)(1 + q) = 1 - q^2$ אתם מכירים מנוסחאות הכפל המקוצר. נגלה שהיא רק הראשונה במשפחה שלמה של זהויות, ושהזהות הכללית במשפחה היא בדיוק נוסחת הסכום.

נפתח סוגריים בכמה מקרים קטנים, ונראה מה נשאר:

$$(1 - q)(1 + q) = 1 + q - q - q^2 = 1 - q^2$$

$$(1 - q)(1 + q + q^2) = 1 + q + q^2 - q - q^2 - q^3 = 1 - q^3$$

$$(1 - q)(1 + q + q^2 + q^3) = 1 + q + q^2 + q^3 - q - q^2 - q^3 - q^4 = 1 - q^4$$

בכל פעם כמעט הכול מתבטל, ונשארים רק 1 ומינוס החזקה הגבוהה ביותר. כדי לראות שזה קורה תמיד, נסדר את פתיחת הסוגריים הכללית בטבלת כפל:

$\times$	1	q	q^2	$\dots$	q^{n-1}
1	1	q	q^2	$\dots$	q^{n-1}
$-q$	$-q$	$-q^2$	$-q^3$	$\dots$	$-q^n$

כל חץ מחבר שני תאים שסכומם 0

סרטוט 4: פתיחת הסוגריים $(1 - q)(1 + q + \dots + q^{n-1})$: כל תא בשורה התחתונה, חוץ מהאחרון, מתבטל עם התא שבאלכסון מעליו, מימין. נשארים רק 1 ו- $-q^n$.

בשורה העליונה של הטבלה נמצאות כל החזקות מ- $q^0 = 1$ עד q^{n-1} , ובשורה התחתונה כל החזקות מ- q^1 עד q^n , עם סימן מינוס. כל חזקה מ- q עד q^{n-1} מופיעה פעם אחת בכל שורה – פעם עם פלוס ופעם עם מינוס – ולכן מתבטלת. הוכחנו את הזהות

$$(1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = 1 - q^n.$$

נימוק

טענה

הוצאת a_1 כגורם משותף

$$S_n = a_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \quad (1)$$

כפל שני האגפים ב- $(1 - q)$

$$(1 - q) S_n = a_1 (1 - q)(1 + q + \dots + q^{n-1}) \quad (2)$$

הזהות שהוכחנו בטבלה

$$(1 - q) S_n = a_1 (1 - q^n) \quad (3)$$

חלוקה ב- $1 - q$, שאינו אפס כי $q \neq 1$

$$S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q} \quad (4)$$

מש"ל

מה הרווחנו בדרך? נוסחה לפירוק לגורמים, שימושית בפני עצמה:

$$q^n - 1 = (q - 1) (q^{n-1} + \dots + q^2 + q + 1).$$

למשל, $q^3 - 1 = (q - 1)(q^2 + q + 1)$, וגם עם מספרים: $10^3 - 1 = (10 - 1)(100 + 10 + 1) = 9 \cdot 111$. $999 = 10^3 - 1$

6 הוכחה 3: "מקלפים" איבר – הסדרה מסתתרת בתוך עצמה

הרעיון נקלף מהסכום S_n איבר אחד בשתי דרכים: פעם את האיבר האחרון ופעם את האיבר הראשון. בשתי הדרכים יופיע הסכום הקצר יותר, S_{n-1} . נקבל שתי משוואות עם שני "נעלמים", S_n ו- S_{n-1} , ונבטל את S_{n-1} . (נניח ש- $n \geq 2$, כדי שיהיה סכום קצר יותר; עבור $n = 1$ הנוסחה נותנת $S_1 = a_1$, כמו שצריך.)

קילוף מהסוף:

a_1	$a_1 q$	$a_1 q^2$	$\dots$	$a_1 q^{n-2}$	$a_1 q^{n-1}$
S_{n-1}					a_n

קילוף מההתחלה:

a_1	$a_1 q$	$a_1 q^2$	$\dots$	$a_1 q^{n-2}$	$a_1 q^{n-1}$
a_1	$a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1} = q \cdot S_{n-1}$				

סרטוט 5: אותו סכום, שני קילופים. בשני המקרים מופיע הסכום הקצר S_{n-1} – פעם כמו שהוא, ופעם מוכפל ב- q .

נימוק	טענה
קילוף מהסוף: S_{n-1} ועוד האיבר האחרון	$S_n = S_{n-1} + a_1 q^{n-1} \quad (1)$
קילוף מההתחלה: a_1 ועוד כל השאר	$S_n = a_1 + (a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}) \quad (2)$
הוצאת q ; בסוגריים נשאר S_{n-1}	$a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} = q S_{n-1} \quad (3)$
הצבת צעד 3 בצעד 2	$S_n = a_1 + q S_{n-1} \quad (4)$
לפי צעד 1, $S_{n-1} = S_n - a_1 q^{n-1}$	$S_n = a_1 + q (S_n - a_1 q^{n-1}) \quad (5)$
פתיחת סוגריים והעברת אגפים	$S_n - q S_n = a_1 - a_1 q^n \quad (6)$

גורם משותף, וחלוקה ב- $1 - q \neq 0$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad (7)$$

מש"ל

מתנה מהוכחה 3: הנוסחה עם האיבר האחרון

בצעד 6 אפשר לכתוב $a_1 q^n = q \cdot a_1 q^{n-1} = q \cdot a_n$. כך מתקבלת נוסחה שמשתמשת באיבר האחרון במקום במספר האיברים:

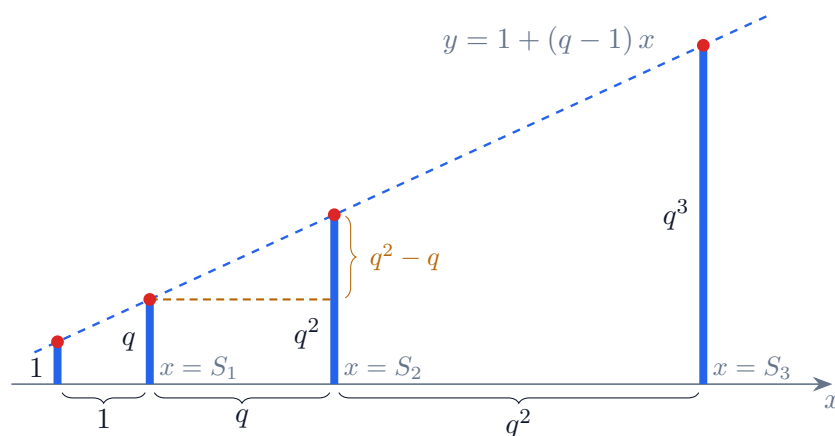
$$S_n = \frac{q \cdot a_n - a_1}{q - 1}.$$

במילים: **האיבר שאחרי האחרון, פחות הראשון, חלקי $q - 1$** .
למשל, בסכום $3 + 6 + 12 + \dots + 768$ המנה היא 2, והאיבר שאחרי האחרון הוא 1536. לכן הסכום הוא $1533 = \frac{1536 - 3}{2 - 1}$ – בלי לספור כמה איברים יש בו. ועל לוח השחמט: אחרי המשבצת ה-64 "הייתה באה" משבצת עם 2^{64} גרגרים, ולכן הסכום הוא $2^{64} - 1$.

7 הוכחה 4: הוכחה בציור – עמודים שראשיהם על קו ישר

הרעיון הפעם לא נבטל אף איבר. נצייר את איברי הסדרה כעמודים שעומדים זה ליד זה, ונגלה שראשי כל העמודים נמצאים על קו ישר אחד. משוואת הישר הזה היא נוסחת הסכום.

נניח ש- $q > 0, q \neq 1$ (לכל a_1 אחר כופלים את כל האיברים ב- a_1 , ולכן גם את הסכום). בנקודה $x = 0$ נעמיד עמוד בגובה 1. ממנו נלך ימינה מרחק 1 ונעמיד עמוד בגובה q ; משם נלך ימינה מרחק q ונעמיד עמוד בגובה q^2 , וכן הלאה: **המרחק לעמוד הבא שווה לגובה העמוד הנוכחי**, וכל עמוד גבוה פי q מהעמוד שלפניו.



סרטוט 6: כאן $q = 2$: הגבהים 1, 2, 4, 8 הם מספרי הגרגרים במשבצות, והמקומות 1, 3, 7 הם הסכומים שלהם. בין כל שני ראשים שכנים השיפוע הוא $q - 1$, ולכן כל הראשים על ישר אחד.

טענה	נימוק
① העמוד שגובהו q^k עומד בנקודה $x = 1 + q + \dots + q^{k-1} = S_k$	כל צעד ימינה שווה לגובה העמוד שממנו יוצאים
② $\frac{q^{k+1} - q^k}{q^k} = q - 1$	השיפוע בין ראשי שני עמודים שכנים: הגובה משתנה ב- $q^{k+1} - q^k$, והמרחק ביניהם הוא q^k
③ ראשי כל העמודים על הישר $y = 1 + (q - 1)x$	לכל הקטעים שבין ראשים שכנים אותו שיפוע, וכל קטע מתחיל בסוף הקודם; הישר עובר דרך $(0, 1)$, ראש העמוד הראשון
④ $q^n = 1 + (q - 1) S_n$	ראש העמוד שגובהו q^n , בנקודה $x = S_n$, נמצא על הישר
⑤ $S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}$	העברת אגפים, וחלוקה ב- $q - 1 \neq 0$

מש"ל

עבור a_1 כללי כל הגבהים, וגם הסכום, מוכפלים ב- a_1 . להוכחה הזאת יש מחיר: היא עובדת רק כש- $q > 0$, כי מרחקים וגבהים אינם שליליים. כש- $0 < q < 1$ הישר יורד, ונקודת החיתוך שלו עם ציר ה- x מראה מה קורה כשמחברים אינסוף איברים — ראו את המסמך על סכום סדרה הנדסית אינסופית.

8 ארבע הדרכים זו מזו

הוכחה 1: כפל וחיסור	הוכחה 2: טבלת כפל	הוכחה 3: קילוף	הוכחה 4: ציור
הרעיון	הכללה של הפרש הריבועים	בתוך הסכום מסתתר סכום קצר יותר	ראשי העמודים על ישר אחד
הכלים	כפל משוואה במספר, חיסור משוואות	שתי משוואות, הצבה	שיפוע ומשוואת ישר
היתרון	הקצרה ביותר, ומגלה את הנוסחה בלי לנחש אותה	נותנת גם נוסחה עם האיבר האחרון	"רואים" את הנוסחה; אבל רק כש- $q > 0$

שימו לב לקשר: שלוש ההוכחות הראשונות הן אותו רעיון בשלוש תחפושות. כולן נשענות על התצפית ש"הזנב" של הסכום (כל האיברים חוץ מהראשון) הוא "הראש" שלו (כל האיברים חוץ מהאחרון) מוכפל ב- q . בהוכחה 1 היא מופיעה כחיסור של שני סכומים, בהוכחה 2 — כפתיחת סוגריים, ובהוכחה 3 — כמשוואה שבה הסכום מופיע "בתוך עצמו". הוכחה 4 בנויה אחרת: אין בה ביטולים, אלא שיפוע של ישר. את שני הרעיונות נפגוש שוב בסכום של סדרה הנדסית אינסופית.

9 מה עושים עם הנוסחה?

שימוש 1: מנה שלילית

חשבו את $1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243$.
זה סכום $n = 6$ האיברים הראשונים בסדרה הנדסית שבה $a_1 = 1$ ו- $q = -3$. המנה קטנה מ-1, ולכן נשתמש בצורה השנייה:

$$S_6 = \frac{1 \cdot (1 - (-3)^6)}{1 - (-3)} = \frac{1 - 729}{4} = -182.$$

בדקו בחיבור לפי הסדר: $1 - 3 = -2$, ואחר כך $7, -20, 61$ ו- -182 .

שימוש 2: מנה בין 0 ל-1

חשבו את $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{512}$ (עשרה איברים).
כאן $a_1 = 1$ ו- $q = \frac{1}{2}$, ונוח להשתמש בצורה השנייה:

$$S_{10} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{1024} \right) = 2 - \frac{1}{512} \approx 1.998.$$

הסכום קרוב מאוד ל-2, וככל שמוסיפים איברים הוא מתקרב ל-2 עוד יותר – אבל אף פעם לא מגיע אליו. מה קורה כשמחברים אינסוף איברים כאלה? זה הנושא של מסמך נפרד בסדרה, על סכום של סדרה הנדסית אינסופית.

שימוש 3: מוצאים את מספר האיברים

כמה משבצות ראשונות של לוח השחמט צריך למלא באורז, לפי כללי האגדה, כדי שעל הלוח יהיו יותר ממיליון גרגרים?
על n המשבצות הראשונות יש $2^n - 1$ גרגרים. נחפש את ה- n הקטן ביותר שעבורו $2^n - 1 > 1,000,000$.
מתקיים $2^{19} = 524,288$ ו- $2^{20} = 1,048,576$, ולכן מספיקות 20 משבצות – פחות משליש מהלוח.

⚠ טעות נפוצה

- q^n ולא q^{n-1} . באיבר הכללי $a_n = a_1 q^{n-1}$ החזקה היא $n - 1$, אבל בנוסחת הסכום היא n .
- החזקה רק על q . $a_1 q^n$ פירושו $a_1 \cdot (q^n)$, ולא $(a_1 q)^n$. למשל, כש- $a_1 = 3$ ו- $q = 2$, $n = 4$ הביטוי $a_1 q^n$ שווה ל- $3 \cdot 2^4 = 48$, ולא ל- $(3 \cdot 2)^4 = 1296$.
- מנה שלילית במחשבון. $(-3)^6 = 729$, אבל $-3^6 = -729$. מקלידים את הסוגריים!
- המקרה $q = 1$. בנוסחה יש אז חלוקה באפס. במקרה הזה כל האיברים שווים, ו- $S_n = n \cdot a_1$.
- מול S_n . a_n הוא איבר אחד, ו- S_n הוא סכום של n איברים.

הידעתם?

סדרות הנדסיות מעסיקות אנשים כבר אלפי שנים. בפפירוס רינד, מגילה מצרית של בעיות במתמטיקה, שנכתבה לפני יותר מ-3,500 שנה, מופיעה רשימה של 7 בתים, 49 חתולים, 343 עכברים, 2,401 שיבולים ו-16,807 מידות של גרעינים – חמישה איברים של סדרה הנדסית שמנתה 7 – וגם הסכום שלהם, 19,607. ב"יסודות" של אוקלידס (בערך 300 לפני הספירה), בספר התשיעי, טענה 35, מופיעה נוסחת הסכום. אוקלידס ניסח אותה במילים ובעזרת יחסים, והתוכן שלה הוא בדיוק הנוסחה עם האיבר האחרון שקיבלנו בהוכחה 3. מייד אחריה, בטענה 36, הוא משתמש בסכום $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}$ כדי לבנות **מספרים מושלמים**: מספרים ששווים לסכום המחלקים שלהם, בלי המספר עצמו. המספר 6 מושלם, כי $1 + 2 + 3 = 6$ וגם 28 מושלם, כי $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. והאגדה על השחמט? יש לה גרסאות רבות, חלקן כבר מימי הביניים, ואין לה מקור היסטורי אחד ברור.

10 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

1. חשבו את סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה $5, 10, 20, \dots$
2. חשבו את $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64$
3. חשבו את סכום 5 האיברים הראשונים בסדרה הנדסית שבה $a_1 = 81$ ו- $q = \frac{1}{3}$.
4. חשבו את סכום 25 האיברים הראשונים בסדרה $4, 4, 4, \dots$
5. הוכיחו שעל המשבצת ה-64 יש יותר גרגרים מאשר על כל 63 המשבצות האחרות יחד.
6. השאלה מתיבת "עצרו ובדקו": מה אומר צעד 4 של הוכחה 1 כש- $q = 1$?

תשובות

1. $S_8 = \frac{5(2^8 - 1)}{2 - 1} = 5 \cdot 255 = 1275$ ולכן $q = 2$ ו- $a_1 = 5$
2. $S_7 = \frac{1 - (-2)^7}{1 - (-2)} = \frac{1 + 128}{3} = 43$ ולכן $n = 7$ ו- $q = -2$, $a_1 = 1$
3. $81 + 27 + 9 + 3 + 1 = 121$. בדיקה: $S_5 = \frac{81(1 - (\frac{1}{3})^5)}{1 - \frac{1}{3}} = 81 \cdot \frac{242}{243} \cdot \frac{3}{2} = 121$
4. כאן $q = 1$ ולכן $S_{25} = 25 \cdot 4 = 100$
5. על המשבצת ה-64 יש 2^{63} גרגרים, ועל 63 המשבצות הראשונות יחד יש $2^{63} - 1$ גרגרים – בדיוק אחד פחות.
6. כש- $q = 1$ שני האגפים בצעד 4 הם אפס: $S_n \cdot 0 = a_1 \cdot 0$. זה שוויון נכון, אבל הוא נכון לכל ערך של S_n , ולכן לא אומר עליו דבר. במקרה הזה מחשבים ישירות: כל האיברים שווים ל- a_1 ו- $S_n = n \cdot a_1$.