סכום סדרה חשבונית

איך מחברים מאה מספרים בלי לחבר אותם אחד־אחד

כיתות י"א–י"ב | 4–5 יח"ל | סדרות | 3 הוכחות | כ־15 דקות קריאה

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: למה מחברים בזוגות.
- מאיפה מגיעה נוסחת האיבר הכללי a_n.
- הוכחה 1: לכתוב את הסכום "הלוך וחזור".
- הוכחה 2: שתי "מדרגות" שיוצרות מלבן. הוכחה 3 (5 יח"ל): אינדוקציה.
- דוגמאות, טעויות נפוצות ושאלות לבדיקה עצמית.

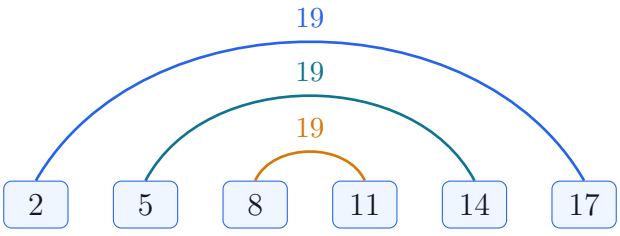
מה כדאי לדעת קודם

- מהי סדרה, ומה פירוש הסימון a_n.
- פתיחת סוגריים וכינוס איברים דומים.
- שטח של מלבן (להוכחה 2).

1 האינטואיציה: לחבר בזוגות

האינטואיציה

נניח שאתם חוסכים לקראת טיול. בשבוע הראשון אתם שמים בקופה 2 שקלים, ובכל שבוע אחר כך — 3 שקלים יותר מאשר בשבוע הקודם: $2, 5, 8, 11, 14, 17$. כמה כסף יש בקופה אחרי שישה שבועות?
אפשר כמובן לחבר לפי הסדר, אבל יש דרך חכמה יותר: לחבר את **הראשון עם האחרון**, את השני עם הלפני־אחרון, וכן הלאה. כל זוג נותן אותו סכום! הסיבה: כשעוברים לזוג הבא, המספר מתחילת הרשימה גדל ב־3, והמספר מסוף הרשימה קטן ב־3 — ולכן הסכום שלהם לא משתנה.



סרטוט 1: הראשון עם האחרון, השני עם הלפני־אחרון, השלישי עם השלישי מהסוף: כל זוג נותן 19.

דוגמה מספרית קטנה

יש 3 זוגות, וסכומו של כל זוג הוא 19. לכן בקופה יש $3 \cdot 19 = 57$ שקלים (בדקו בחיבור רגיל).
שימו לב מאיפה הגיעו המספרים: 19 הוא סכום האיבר הראשון והאחרון, ו־3 הוא חצי ממספר האיברים. כלומר $\frac{6 \cdot (2+17)}{2} = 57$ — וזו בדיוק הנוסחה שנוכיח, במקרה קטן. ועוד דרך לראות את זה: $\frac{2+17}{2} = 9.5$ הוא **הממוצע** של ששת המספרים, והסכום הוא מספר האיברים כפול הממוצע.

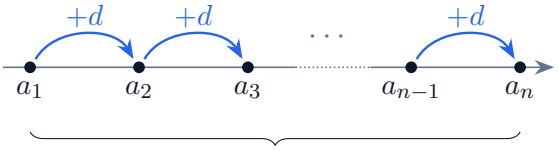
© אור בן שטרית · אינסוף

2 קודם כול: האיבר הכללי

סדרה חשבונית היא סדרה שבה ההפרש בין כל איבר לאיבר שלפניו קבוע. את ההפרש הזה מסמנים ב־d וקוראים לו **הפרש הסדרה**, ואת האיבר הראשון מסמנים ב־a_1. כדי לחשב סכום נצטרך גם נוסחה לאיבר שנמצא במקום ה־n, כלומר ל־a_n.

כל צעד בסדרה מוסיף d:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$



$n-1$ צעדים, בכל צעד מוסיפים d

סרטוט 2: מ־a_1 ל־a_n יש $n-1$ צעדים.

המקדם של d קטן תמיד ב־1 ממספר האיבר. הסיבה: כדי להגיע מ־a_1 ל־a_n עושים $n-1$ צעדים, ולא n. חשבו על גדר: בין 10 עמודים יש 9 רווחים. לכן

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

3 הנוסחה

נסמן ב־S_n את **סכום n האיברים הראשונים** בסדרה: $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

סכום סדרה חשבונית

בסדרה חשבונית עם איבר ראשון a_1 והפרש d, סכום n האיברים הראשונים הוא

$$\boxed{S_n = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}}$$

או, בצורה שקולה,

$$\boxed{S_n = \frac{n\,[2a_1 + (n-1)d]}{2}}$$

במילים: הסכום שווה למספר האיברים, כפול הממוצע של האיבר הראשון והאיבר האחרון.

הצורה הראשונה נוחה כשיודעים את האיבר האחרון a_n, והשנייה — כשיודעים את ההפרש d. נוכיח קודם את הצורה הראשונה, ואחר כך נראה שהשנייה נובעת ממנה ישירות.

4 הוכחה 1: לכתוב את הסכום הלוך וחזור

הרעיון נכתוב את אותו הסכום פעמיים: פעם מהאיבר הראשון לאחרון, ופעם מהאחרון לראשון. כשנחבר את שתי השורות טור אחר טור, כל טור ייתן אותו מספר: $a_1 + a_n$.

חימום: המספרים מ־1 עד 100

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + \cdots + 99 + 100 \\ S &= 100 + 99 + \cdots + 2 + 1 \\ \hline 2S &= 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 \end{aligned}$$

יש 100 טורים, וסכום כל טור הוא 101. לכן $2S = 100 \cdot 101 = 10{,}100$, ו־$S = 5050$.

עכשיו נעשה את אותו הדבר בסדרה חשבונית כללית. בטור ה־k (כשסופרים משמאל) עומד למעלה האיבר a_k, ולמטה האיבר ה־k מהסוף, כלומר a_{n+1-k}:

$$\begin{aligned} S_n &= \overset{\overset{+d}{\frown}}{a_1} + \overset{\overset{+d}{\frown}}{a_1+d} + a_1+2d + \cdots + a_n-d + \overset{\overset{+d}{\frown}}{a_n} \\ S_n &= a_n + a_n-d + a_n-2d + \cdots + a_1+d + a_1 \\ \hline 2S_n &= \underbrace{a_1+a_n + a_1+a_n + a_1+a_n + \cdots + a_1+a_n + a_1+a_n}_{n \text{ טורים, ובכל טור אותו סכום}} \end{aligned}$$

סרטוט 3: כשזזים טור אחד ימינה, האיבר העליון גדל ב־d והאיבר התחתון קטן ב־d, ולכן הסכום בכל טור קבוע.

	טענה	נימוק
1	$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$	כך מוגדר הסכום
2	$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$	אותו סכום, בסדר הפוך
3	$a_k + a_{n+1-k} = [a_1 + (k-1)d] + [a_1 + (n-k)d]$	נוסחת האיבר הכללי
4	$a_k + a_{n+1-k} = 2a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n$	התוצאה לא תלויה ב־k: הסכום זהה בכל הטורים
5	$2S_n = n\,(a_1 + a_n)$	חיבור השורות: n טורים, כולם שווים
6	$S_n = \dfrac{n\,(a_1 + a_n)}{2}$	חלוקה ב־2

מש״ל ■

הידעתם?

יש סיפור מפורסם על המתמטיקאי הגרמני קרל פרידריך גאוס (1777–1855). לפי הגרסה הנפוצה, כשגאוס היה תלמיד צעיר בבית הספר היסודי, ביקש המורה מהכיתה לחבר את כל המספרים מ־1 עד 100, כנראה כדי להעסיק את התלמידים זמן רב. גאוס הקטן הגיש כמעט מייד את התשובה הנכונה, 5050: הוא שם לב ש־$1+100=101$, ש־$2+99=101$ וכן הלאה, ושיש 50 זוגות כאלה.

את הסיפור כדאי לקחת בעירבון מוגבל. הוא מופיע כבר בביוגרפיה של גאוס שנכתבה זמן קצר אחרי מותו, אבל הפרטים — אילו מספרים היה צריך לחבר, בן כמה היה גאוס ואיך בדיוק חישב — משתנים מגרסה לגרסה. ודבר אחד בטוח: גאוס לא המציא את הנוסחה. סכומים של סדרות חשבוניות חישבו כבר בעת העתיקה. למשל, המתמטיקאי ההודי אריאבהטה כתב נוסחה כזאת בספרו, בסביבות שנת 500 לספירה.

עצרו ובדקו

בסיפור, גאוס הצעיר חיבר בזוגות בתוך שורה אחת, וקיבל 50 זוגות, כלומר $\frac{n}{2}$. אצלנו, לעומת זאת, יש n טורים. למה? ומה הבעיה בשיטת הזוגות של גאוס כש־n אי־זוגי, למשל בסכום $1+2+\cdots+9$? התשובה בסוף המסמך.

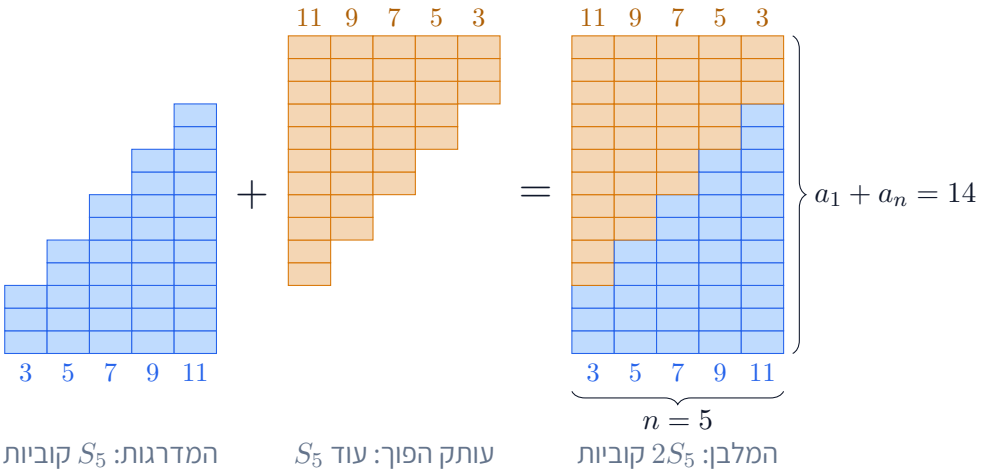
מהצורה הראשונה לצורה השנייה. כשלא יודעים את האיבר האחרון, אלא רק את a_1, את d ואת n, נציב את $a_n=a_1+(n-1)d$ בנוסחה שהוכחנו ונכנס איברים דומים:

$$S_n=\frac{n\,(a_1+a_n)}{2}=\frac{n\,[a_1+a_1+(n-1)d]}{2}=\frac{n\,[2a_1+(n-1)d]}{2}.$$

5 הוכחה 2: שתי מדרגות יוצרות מלבן

הרעיון נציג כל איבר כעמודה של קוביות, כך שהעמודות יוצרות "מדרגות". שני עותקים של המדרגות, אחד מהם הפוך, משתלבים זה בזה למלבן — ואת מספר הקוביות במלבן קל לחשב.

נתחיל בדוגמה: הסדרה $3,5,7,9,11$, שבה $a_1=3$, $d=2$ ו־$n=5$. נבנה כל איבר כעמודה: 3 קוביות, 5 קוביות, וכן הלאה. מספר הקוביות במדרגות הוא בדיוק הסכום S_5.



סרטוט 4: שני עותקים של המדרגות $3,5,7,9,11$ יוצרים מלבן של 5 עמודות בגובה 14.

נהפוך את העותק השני "על הראש" (נסובב אותו ב־180°) ונצמיד אותו מעל המדרגות המקוריות. בכל עמודה יש עכשיו למטה קוביות כחולות ולמעלה קוביות כתומות: 3 ו־11, 5 ו־9, 7 ו־7, 9 ו־5, 11 ו־3. בכל עמודה בדיוק 14 קוביות, ולכן נוצר מלבן. במלבן יש $5 \cdot 14 = 70$ קוביות, והוא בנוי משני עותקים של המדרגות. לכן $2S_5 = 70$, כלומר $S_5 = 35$. בדקו בחיבור: $3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 35$.

המקרה הכללי. נבנה מדרגות של n עמודות בגבהים $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ונסמן ב־h_k את גובה העמודה ה־k אחרי שמצמידים את העותק ההפוך:

	טענה	נימוק
1	$h_k = a_k + a_{n+1-k}$	למטה המדרגות, למעלה העותק ההפוך
2	$h_{k+1} = (a_k + d) + (a_{n+1-k} - d) = h_k$	בעמודה הבאה: כחול $+d$, כתום $-d$
3	$h_1 = h_2 = \cdots = h_n = a_1 + a_n$	כל העמודות באותו גובה: זה מלבן
4	$2S_n = n\,(a_1 + a_n)$	במלבן יש שני עותקים של המדרגות

מש"ל ■

מחלוקה ב־2 מקבלים שוב $S_n = \frac{n\,(a_1+a_n)}{2}$. הסרטוט מתאים רק לאיברים חיוביים (אין עמודה של -2 קוביות), אבל החשבון שמאחוריו נכון לכל סדרה חשבונית. בעצם, הוכחה 2 היא דרך **לראות** את הוכחה 1.

6 הוכחה 3 (5 יח"ל): אינדוקציה

הרעיון נוכיח שהנוסחה נכונה עבור $n = 1$, ושאם היא נכונה עבור מספר טבעי כלשהו k, היא נכונה גם עבור $k+1$. כמו בשורה של אבני דומינו: הראשונה נופלת, וכל אבן שנופלת מפילה את זו שאחריה — ולכן כולן נופלות.

נוכיח כך את הצורה $S_n = \frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$, לכל n טבעי.

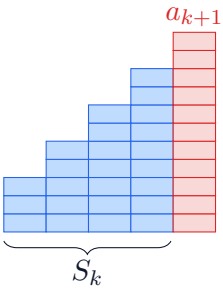
בסיס האינדוקציה ($n = 1$): מצד אחד $S_1 = a_1$. מצד שני, הנוסחה נותנת $\frac{1\cdot[2a_1+0\cdot d]}{2} = a_1$. התוצאות שוות.

צעד האינדוקציה. נניח שהנוסחה נכונה עבור $n = k$, כלומר

$$S_k = \frac{k\,[2a_1 + (k-1)d]}{2}$$

(זו **הנחת האינדוקציה**), ונוכיח שהנוסחה נכונה גם עבור $n = k+1$:

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(2a_1 + kd)}{2}.$$



סרטוט 5: S_{k+1} הוא S_k ועוד עמודה אחת.

	טענה	נימוק
1	$S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$	k האיברים הראשונים, ועוד האיבר הבא
2	$S_{k+1} = \frac{k\,[2a_1 + (k-1)d]}{2} + a_1 + kd$	הנחת האינדוקציה, ו־$a_{k+1} = a_1 + kd$
3	$S_{k+1} = \frac{2ka_1 + 2a_1 + (k^2 - k + 2k)\,d}{2}$	מכנה משותף
4	$S_{k+1} = \frac{2a_1(k+1) + k(k+1)d}{2}$	$k^2 + k = k(k+1)$
5	$S_{k+1} = \frac{(k+1)(2a_1 + kd)}{2}$	הוצאת $(k+1)$ כגורם משותף

מש"ל ■

הנוסחה נכונה עבור $n = 1$, ולכן גם עבור $n = 2$, ולכן גם עבור $n = 3$, וכן הלאה — לכל n טבעי. שימו לב: אינדוקציה מצוינת כדי **לוודא** נוסחה, אבל היא לא מגלה אותה. את הנוסחה היינו צריכים לדעת מראש, למשל מהוכחה 1.

7 שלוש הדרכים זו מול זו

	הוכחה 1: הלוך וחזור	הוכחה 2: מדרגות	הוכחה 3: אינדוקציה
הרעיון	לחבר את הסכום לעצמו, בסדר הפוך	שני עותקים של המדרגות יוצרים מלבן	מהמקרה $n = k$ למקרה $n = k + 1$
הכלים	נוסחת האיבר הכללי	שטח מלבן	מכנה משותף וגורם משותף
היתרון	קצרה, ומגלה את הנוסחה בלי לנחש אותה	"רואים" למה הסכום בכל טור קבוע	מוכיחה את הנוסחה לכל n, צעד אחר צעד
המגבלה	—	הסרטוט מתאים רק לאיברים חיוביים	צריך לדעת את הנוסחה מראש

8 מה עושים עם הנוסחה?

שימוש 1: סכום כשיודעים את a_1 ואת d

דוגמה מספרית

בסדרה חשבונית $a_1 = 7$ ו־$d = 4$. חשבו את סכום 20 האיברים הראשונים.

האיבר האחרון לא נתון, ולכן נשתמש בצורה השנייה: $S_{20} = \frac{20[2\cdot 7 + 19\cdot 4]}{2} = 10 \cdot 90 = 900$.

שימוש 2: קודם סופרים כמה איברים יש

דוגמה מספרית

חשבו את סכום כל הכפולות של 7 שנמצאות בין 100 ל־200.

הכפולה הראשונה היא $105 = 7 \cdot 15$, והאחרונה היא $196 = 7 \cdot 28$. זו סדרה חשבונית עם $d = 7$. את מספר האיברים נמצא מהמשוואה $105 + (n-1) \cdot 7 = 196$: מקבלים $n - 1 = 13$, כלומר $n = 14$. לכן

$$S_{14} = \frac{14\,(105 + 196)}{2} = 7 \cdot 301 = 2107.$$

שימוש 3: מוצאים את n מתוך הסכום

דוגמה מספרית

כמה איברים של הסדרה $5, 8, 11, \ldots$ צריך לחבר כדי לקבל 440?

כאן $a_1 = 5$ ו־$d = 3$. נציב בצורה השנייה של הנוסחה ונשווה ל־440:

$$\frac{n\,[10 + 3(n-1)]}{2} = 440 \quad\Longrightarrow\quad n\,(3n + 7) = 880 \quad\Longrightarrow\quad 3n^2 + 7n - 880 = 0$$

$$n = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 10{,}560}}{6} = \frac{-7 \pm 103}{6}$$

הפתרון השלילי נפסל, כי n הוא מספר איברים. לכן $n = 16$. בדיקה: $S_{16} = \frac{16\,(5+50)}{2} = 8 \cdot 55 = 440$.

טעויות נפוצות

- **ספירת איברים.** מ־a_{15} עד a_{28} יש $28 - 15 + 1 = 14$ איברים, ולא 13. זו בעיית הגדר מהסעיף על האיבר הכללי: בגדר שבה העמודים ממוספרים מ־15 עד 28 יש 13 רווחים, אבל 14 עמודים.
- **n אינו האיבר האחרון.** בסכום המספרים מ־1 עד 100, מספר האיברים ($n = 100$) שווה במקרה לאיבר האחרון. אבל בסכום $3 + 6 + \cdots + 300$ יש 100 איברים, ולא 300.
- **$(n-1)d$ ולא nd.** גם ב־$a_n = a_1 + (n-1)d$ וגם בצורה השנייה של נוסחת הסכום מופיע $n - 1$.
- **S_n מול a_n.** האיבר a_n הוא מספר אחד בסדרה, ואילו S_n הוא סכום של n איברים. הקשר ביניהם: $a_n = S_n - S_{n-1}$ (עבור $n \geq 2$).

בשורה התחתונה

- סכום של סדרה חשבונית שווה למספר האיברים, כפול הממוצע של האיבר הראשון והאיבר האחרון: $S_n = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}$.
- הסיבה: איבר מתחילת הסדרה ועוד האיבר שנמצא באותו מקום מסופה נותנים תמיד אותו סכום, $a_1 + a_n$.
- כשלא יודעים את a_n, מציבים $a_n = a_1 + (n-1)d$ ומקבלים $S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$.

9 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

1. חשבו את $1+2+3+\cdots+50$.
2. חשבו את סכום המספרים הזוגיים מ־2 עד 200.
3. בסדרה חשבונית $a_1=10$ ו־$d=-3$. חשבו את S_{12}.
4. בסדרה חשבונית $a_1=1$ ו־$S_{10}=145$. מצאו את d.
5. הוכיחו שסכום n המספרים האי־זוגיים הראשונים הוא n^2.
6. השאלה מתיבת ״עצרו ובדקו״: למה יש בהוכחה 1 בדיוק n טורים, ומה הבעיה בזוגות של גאוס כש־n אי־זוגי?

תשובות

1. $S_{50}=\frac{50\,(1+50)}{2}=25\cdot 51=1275$.
2. $a_1=2$, $d=2$ ו־$a_n=200$, ולכן $n=100$ ו־$S_{100}=\frac{100\,(2+200)}{2}=50\cdot 202=10{,}100$.
3. $S_{12}=\frac{12[2\cdot 10+11\cdot(-3)]}{2}=6\cdot(20-33)=6\cdot(-13)=-78$.
4. $145=\frac{10\,(2+9d)}{2}=5\,(2+9d)$, ולכן $2+9d=29$, ו־$d=3$.
5. המספרים האי־זוגיים $1,3,5,\ldots$ הם סדרה חשבונית עם $a_1=1$ ו־$d=2$, ולכן $a_n=1+2(n-1)=2n-1$, ו־$S_n=\frac{n\,(1+2n-1)}{2}=\frac{n\cdot 2n}{2}=n^2$.
6. כל טור בהוכחה 1 מכיל איבר אחד מכל שורה, ובכל שורה יש n איברים — ולכן יש n טורים, ומקבלים $2S_n$ ולא S_n. בשיטה של גאוס מצמידים איברים מאותה שורה, וכש־n אי־זוגי נשאר איבר אמצעי בלי בן זוג. ב־$1+2+\cdots+9$ יש 4 זוגות שסכום כל אחד מהם 10, ועוד האיבר 5 לבדו: $4\cdot 10+5=45$. הכתיבה ״הלוך וחזור״ חוסכת את הטיפול המיוחד: $2S=9\cdot 10$, ולכן $S=45$.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את המסמך בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנו קטעים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.

אינסוף מתמטיקה