

נוסחת השורשים

מאיפה מגיעה הנוסחה שפותרת כל משוואה ריבועית – בשלוש דרכים

כ-15 דקות קריאה

3 הוכחות

אלגברה

כיתה ט'

מה כדאי לדעת קודם

- נוסחאות הכפל המקוצר, בעיקר $(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$.
- פתרון משוואה מהצורה $t^2 = k$.
- שורש ריבועי: $\sqrt{t^2} = |t|$.
- להוכחה 3: גרף של פרבולה.

מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: איזו משוואה ריבועית קל לפתור, ולמה.
- הוכחה 1: השלמה לריבוע – אלגברית, צעד אחר צעד.
- הוכחה 2: השלמה לריבוע בסרטוט, בדרכו של אל-חוארזמי.
- הוכחה 3: הסימטריה של הפרבולה.
- הדיסקרימיננטה, נוסחאות ויאטה, דוגמאות ובדיקה עצמית.

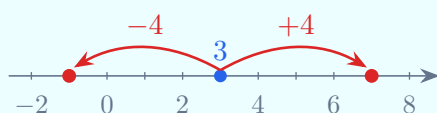
1 האינטואיציה: משוואות ש"כמעט פתורות"

האינטואיציה

יש משוואות ריבועיות שקל מאוד לפתור. למשל, $(x-3)^2 = 16$: מספר בריבוע שווה ל-16, ולכן המספר עצמו הוא 4 או -4. כלומר $x-3 = 4$ או $x-3 = -4$, ומכאן $x = 7$ או $x = -1$. מה הופך את המשוואה הזאת לקלה? הנעלם x מופיע בה **פעם אחת בלבד**, בתוך ריבוע. לעומת זאת, במשוואה $x^2 - 6x - 7 = 0$ הנעלם מופיע פעמיים – ב- x^2 וב- $6x$ – ואי אפשר "לבודד" אותו ישירות. הרעיון המרכזי בהוכחות: לשנות את המשוואה הקשה כך שתיראה כמו הקלה, כלומר ש- x יופיע רק בתוך ריבוע. השיטה נקראת **השלמה לריבוע**.

דוגמה מספרית קטנה

נפתור את $x^2 - 6x - 7 = 0$:



סרטוט 1: שני הפתרונות נמצאים במרחק 4 מהמספר 3, משני צדדיו.

1. נעביר את -7 לאגף השני: $x^2 - 6x = 7$.
 2. נוסיף 9 לשני האגפים: $x^2 - 6x + 9 = 16$.
 3. אגף שמאל הוא ריבוע: $(x-3)^2 = 16$.
 4. מכאן $x-3 = \pm 4$, כלומר $x = 7$ או $x = -1$.
- למה דווקא 9? כי $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$. את 9 מקבלים כך: מחצית המקדם של x , בריבוע: $(\frac{-6}{2})^2 = 9$.

2 הנוסחה

נוסחת השורשים

נתונה המשוואה הריבועית $ax^2 + bx + c = 0$, שבה a, b, c מספרים ו- $a \neq 0$. נסמן

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

• אם $\Delta \geq 0$, הפתרונות של המשוואה הם

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

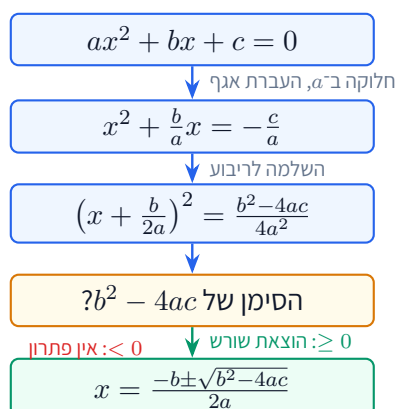
• אם $\Delta < 0$, למשוואה אין פתרון.

במילים: מינוס b , פלוס או מינוס שורש של $b^2 - 4ac$, והכול חלקי $2a$. סימן ה- $\pm$ אומר שיש (בדרך כלל) שני פתרונות: אחד עם פלוס ואחד עם מינוס. לפתרונות קוראים גם **שורשים**, ומכאן שם הנוסחה.

לביטוי $\Delta = b^2 - 4ac$ קוראים **דיסקרימיננטה** (Δ היא האות היוונית דלתא). השם בא ממילה לטינית שפירושה "להבחין": הדיסקרימיננטה מבחינה בין משוואות עם שני פתרונות, עם פתרון אחד ובלי פתרון. הדרישה $a \neq 0$ הכרחית: אם $a = 0$, אין x^2 , והמשוואה אינה ריבועית אלא משוואה ממעלה ראשונה, $bx + c = 0$. ועוד הערה: "אין פתרון" פירושו כאן שאין **מספר ממשי** שמקיים את המשוואה. מי שילמד מספרים מרוכבים (5 יח"ל) יגלה שגם למשוואות האלה יש פתרונות – ואפילו לפי אותה נוסחה.

3 הוכחה 1: השלמה לריבוע

הרעיון נעשה עם אותיות בדיוק את מה שעשינו בדוגמה עם מספרים: נביא את המשוואה לצורה שבה x מופיע רק בתוך ריבוע, $(x + n)^2 = k$, ואז נוציא שורש.



סרטוט 2: מפת הדרך של הוכחה 1.

שימו לב לשני דברים לאורך הדרך:

- **חלוקה ב- a .** מותר לחלק רק במספר שאינו אפס. כאן זה בסדר, כי $a \neq 0$.
- **הוצאת שורש.** מותר להוציא שורש רק ממספר שאינו שלילי. לכן לפני השלב הזה נעצור ונבדוק את הסימן של אגף ימין – ושם "תיוולד" הדיסקרימיננטה.

נימוק	טענה
המשוואה הנתונה, $a \neq 0$	$ax^2 + bx + c = 0$ (1)
מחלקים את שני האגפים ב־ a	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ (2)
מעבירים את $\frac{c}{a}$ לאגף ימין	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ (3)
מוסיפים לשני האגפים את ריבוע המחצית של המקדם של x	$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$ (4)
באגף שמאל: $(m+n)^2$ עם $m = x$ ו־ $n = \frac{b}{2a}$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ (5)
מכנה משותף $4a^2$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ (6)

רגע לפני שמוציאים שורש. אגף שמאל הוא ריבוע, ולכן הוא לעולם לא שלילי. במכנה של אגף ימין יש $4a^2$, שהוא חיובי (כי $a \neq 0$). לכן הסימן של אגף ימין הוא בדיוק הסימן של $\Delta = b^2 - 4ac$:

- אם $\Delta < 0$, אגף ימין שלילי. ריבוע לא יכול להיות שווה למספר שלילי, ולכן **אין פתרון**.
- אם $\Delta \geq 0$, אפשר להמשיך:

נימוק	טענה
אם $t^2 = k \geq 0$ אז $t = \pm\sqrt{k}$ וגם $\sqrt{4a^2} = 2 a $	$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2 a }$ (7)
בגלל ה־ $\pm$ מותר לכתוב $2a$ במקום $2 a $	$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ (8)
מעבירים את $\frac{b}{2a}$ לאגף ימין, ומחברים שברים	$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (9)

ולמה אלה באמת פתרונות? בהוכחה יצאנו ממספר x שמקיים את המשוואה, והראינו שהוא חייב להיות אחד משני המספרים שבנוסחה. אבל כל צעד בדרך הפיך: את החלוקה ב־ $a \neq 0$ מבטלים בכפל ב־ a , את ההוספה לשני האגפים מבטלים בחיסור, ואם $t = \pm\sqrt{k}$ אז $t^2 = k$. לכן אפשר לקרוא את ההוכחה גם מלמטה למעלה: כל אחד משני המספרים שבנוסחה אכן מקיים את המשוואה. הנוסחה נותנת את כל הפתרונות — ורק אותם.

מש"ל

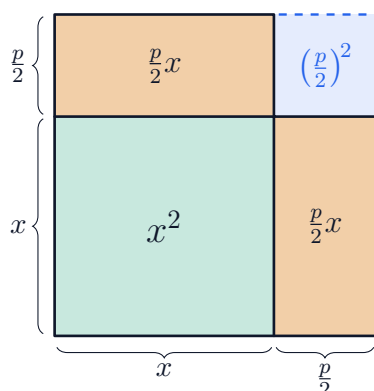
עצרו ובדקו

בצעד 8 החלפנו את $2|a|$ ב־ $2a$. אם $a > 0$ ברור שזה מותר. אבל מה קורה כש־ $a < 0$? למה גם אז לא איבדנו פתרונות ולא הוספנו פתרונות?

ומה קורה כש- $\Delta = 0$? אז $\sqrt{\Delta} = 0$, והפלוס והמינוס נותנים אותו מספר: $x = -\frac{b}{2a}$. אומרים שלמשוואה יש **פתרון אחד**, או ששני הפתרונות "מתלכדים".

4 הוכחה 2: השלמה לריבוע בסרטוט

הרעיון נחשוב על x^2 כעל שטח של ריבוע, ועל px כעל שטח של מלבנים. נוסיף את הפינה החסרה, ונקבל ריבוע שלם. כך פתר את המשוואות האלה המתמטיקאי אל-חוארזמי, לפני יותר מאלף שנה. כדי שכל האורכים והשטחים יהיו חיוביים, נעבוד עם משוואה מהצורה $x^2 + px = q$, שבה $p > 0$ ו- $q > 0$, ונחפש פתרון חיובי.



סרטוט 3: ריבוע ושני מלבנים. הפינה החסרה מסומנת בקו מקווקו.

• הריבוע הירוק: צלעו x , ושטחו x^2 .

• את המלבן px נחצה לשני מלבנים כתומים, כל אחד x על $\frac{p}{2}$, ונצמיד אותם לשתי צלעות של הריבוע.

השטח של הצורה הירוקה-כתומה הוא $x^2 + px$, ולפי המשוואה הוא שווה ל- q .

לצורה חסרה פינה: ריבוע קטן שצלעו $\frac{p}{2}$. אם נוסיף אותו, נקבל ריבוע גדול ושלם, שצלעו $x + \frac{p}{2}$.

נימוק

טענה

שטח הצורה הירוקה-כתומה

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x = q \quad (1)$$

מוסיפים את הפינה לשני האגפים

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \quad (2)$$

עכשיו זה ריבוע שלם, שצלעו $x + \frac{p}{2}$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \frac{p^2}{4} \quad (3)$$

הצלע היא השורש של השטח (אורך – לכן רק השורש החיובי)

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}} \quad (4)$$

מחסירים $\frac{p}{2}$

$$x = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}} - \frac{p}{2} \quad (5)$$

מש"ל

הבעיה המפורסמת של אל-חוארזמי

"ריבוע ועשרה שורשים שווים לשלושים ותשע": $x^2 + 10x = 39$. כאן $p = 10$, ולכן לכל מלבן כתום יש צלע 5, והפינה החסרה היא $5 \cdot 5 = 25$. אחרי ההשלמה: $(x + 5)^2 = 39 + 25 = 64$, ולכן $x + 5 = 8$ ו- $x = 3$. בדיקה: $9 + 30 = 39$.

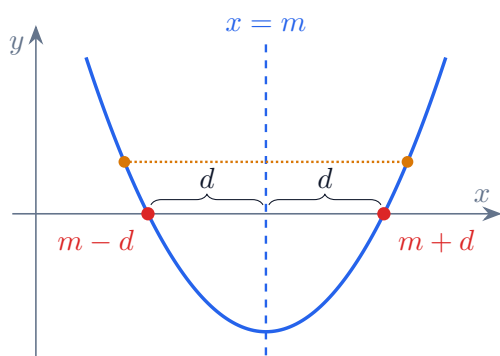
מסרטוט לנוסחה כללית. לסרטוט יש מגבלות: הוא עובד רק כש p ו- q חיוביים, ומוצא רק פתרון חיובי. למשל, גם $x = -13$ הוא פתרון של $x^2 + 10x = 39$ (בדקו!), אבל אין לו מקום בסרטוט. האלגברה מסירה את המגבלות: אם נחלק את $ax^2 + bx + c = 0$ ב- a , נקבל $x^2 + px = q$ עם $p = \frac{b}{a}$ ו- $q = -\frac{c}{a}$, והוספת "הפינה" $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ היא בדיוק צעד 4 בהוכחה 1. שם השתמשנו ב- $\pm$ במקום "רק השורש החיובי", ולכן קיבלנו את כל הפתרונות, לכל סימן של המקדמים.

5 הוכחה 3: הסימטריה של הפרבולה

הרעיון הגרף של $y = ax^2 + bx + c$ הוא פרבולה, והיא סימטרית ביחס לישור אנכי. נמצא את ציר הסימטריה, $x = m$. אם יש פתרונות, הם נמצאים במרחק שווה ממנו, משני צדדיו: $x = m \pm d$. נשאר רק למצוא את d .

שלב א': איפה ציר הסימטריה?

נסמן $f(x) = ax^2 + bx + c$. ציר הסימטריה הוא ישר $x = m$ שמקיים: לכל מרחק d , לנקודות $m + d$ ו- $m - d$ יש אותו גובה. נחשב את ההפרש בין הגבהים:



$$\begin{aligned} f(m+d) - f(m-d) &= a[(m+d)^2 - (m-d)^2] + b \cdot 2d \\ &= a \cdot 4md + 2bd = 2d(2am + b). \end{aligned}$$

ההפרש הוא אפס לכל d בדיוק כאשר $2am + b = 0$, כלומר

$$m = -\frac{b}{2a}.$$

שלב ב': מוצאים את d . כל מספר x אפשר לכתוב בצורה $x = m + d$, כאשר $d = x - m$ הוא המרחק (עם סימן) מהציר. לכן זו לא הנחה, אלא החלפת משתנה. נציב $x = m + d$ במשוואה:

נימוק	טענה
הצבה של $x = m + d$	$a(m+d)^2 + b(m+d) + c = 0$ ①
פתיחת סוגריים וסידור לפי חזקות של d	$ad^2 + (2am + b)d + (am^2 + bm + c) = 0$ ②
$2am + b = 0$, ולכן האיבר $(2am + b)d$ נעלם	$ad^2 + am^2 + bm + c = 0$ ③
הצבה של $m = -\frac{b}{2a}$	$am^2 + bm + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a}$ ④
מצעדים 3 ו-4, וחלוקה ב- a	$d^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, כלומר $ad^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ ⑤
כש- $\Delta \geq 0$, כמו בהוכחה 1. אם $\Delta < 0$, אז $-d^2 < 0$ ואין פתרון	$d = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ⑥

$$m = -\frac{b}{2a}$$

$$x = m + d = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (7)$$

מש"ל

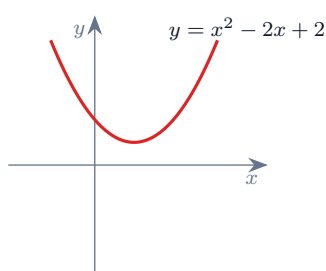
ההוכחה הזאת מסבירה **למה** הנוסחה בנויה כך: החלק $-\frac{b}{2a}$ הוא ציר הסימטריה של הפרבולה (שם נמצא הקודקוד שלה), והחלק $\pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ הוא המרחק של הפתרונות מהציר, ימינה ושמאלה.

6 שלוש הדרכים זו מול זו

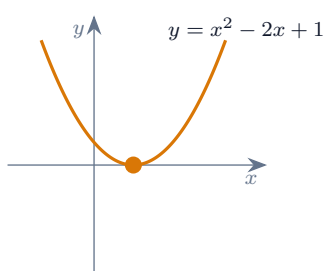
הוכחה 1: השלמה לריבוע	הוכחה 2: סרטוט	הוכחה 3: סימטריה	
להביא את המשוואה לצורה $(x + n)^2 = k$	להשלים פינה חסרה לריבוע שלם	הפתרונות סימטריים ביחס לישר $x = -\frac{b}{2a}$	הרעיון
נוסחאות הכפל המקוצר, הוצאת שורש	שטחים של ריבוע ומלבן	פרבולה, החלפת משתנה	הכלים
כל משוואה עם $a \neq 0$	רק $p, q > 0$, ורק פתרון חיובי	כל משוואה עם $a \neq 0$	תקפות
ישירה, וזו הדרך המקובלת	"רואים" מה זה "להשלים לריבוע"	מסבירה את המבנה של הנוסחה	היתרון

7 הדיסקרימיננטה: כמה פתרונות יש?

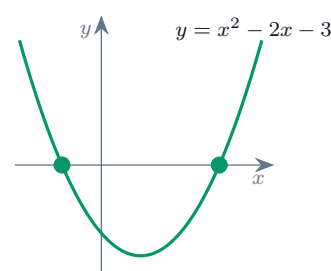
הפתרונות של $ax^2 + bx + c = 0$ הם שיעורי ה- x של נקודות החיתוך של הפרבולה $y = ax^2 + bx + c$ עם ציר ה- x (שם $y = 0$). הדיסקרימיננטה "יודעת" כמה נקודות כאלה יש:



$\Delta < 0$: אין פתרון



$\Delta = 0$: פתרון אחד



$\Delta > 0$: שני פתרונות

סרטוט 5: אותו a ואותו b , ורק c משתנה: הפרבולה "עולה", ומספר נקודות החיתוך יורד.

נבדוק בחישוב:

- במשוואה $x^2 - 2x - 3 = 0$ מקבלים $\Delta = 4 + 12 = 16 > 0$, יש שני פתרונות: 1 ו-3.
- במשוואה $x^2 - 2x + 1 = 0$ מקבלים $\Delta = 4 - 4 = 0$, יש פתרון אחד: 1.
- במשוואה $x^2 - 2x + 2 = 0$ מקבלים $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$, ואין פתרון.

כש- $a < 0$ הפרבולה "הפוכה" (פתוחה כלפי מטה), אבל הכלל לא משתנה.

8 מסקנה: נוסחאות ויאטה

מנוסחת השורשים נובע קשר פשוט בין הפתרונות למקדמים. בעזרתו אפשר לבדוק פתרונות במהירות, ולמצוא את הסכום או את המכפלה שלהם בלי לפתור את המשוואה.

נוסחאות ויאטה

אם $\Delta \geq 0$, והפתרונות של $ax^2 + bx + c = 0$ הם x_1 ו- x_2 (ואם $\Delta = 0$, אז $x_1 = x_2$), אז

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

הוכחה. נסמן $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ו- $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

נימוק

טענה

לשברים יש מכנה משותף, והאיברים $\pm\sqrt{\Delta}$ מבטלים זה את זה

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \quad (1)$$

במונה: הפרש ריבועים

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} \quad (2)$$

$$(\sqrt{\Delta})^2 = \Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \quad (3)$$

מש"ל

9 מה עושים עם הנוסחה?

דוגמה 1: שני פתרונות

נפתור $2x^2 - 5x + 3 = 0$. המקדמים: $a = 2, b = -5, c = 3$.

ולכן $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 1}{4} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{6}{4} = 1.5, \quad x_2 = \frac{4}{4} = 1.$$

בדיקה לפי ויאטה: $x_1 \cdot x_2 = 1.5 = \frac{3}{2} = \frac{c}{a}$ ו- $x_1 + x_2 = 2.5 = -\frac{b}{a}$

דוגמה 2: המקדם של x^2 שלילי

נפתור $-x^2 + 2x + 8 = 0$. כאן $a = -1, b = 2, c = 8$.

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 4 + 32 = 36 \text{ ולכן}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 6}{-2} \implies x_1 = \frac{4}{-2} = -2, \quad x_2 = \frac{-8}{-2} = 4.$$

אפשר גם להכפיל קודם את המשוואה ב-1 ולפתור את $x^2 - 2x - 8 = 0$. הפתרונות זהים.

טעויות נפוצות

- **מקדם שלילי.** אם $b = -5$, אז $-b = 5$ ו- $b^2 = (-5)^2 = 25$, ולא $b^2 = -25$ (במחשבון הקלידו $(-5)^2$ עם הסוגריים).
- **קו השבר נמשך מתחת לכל המונה.** הביטוי $\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - b \pm$ אינו הנוסחה.
- **קודם מסדרים.** מעבירים הכול לאגף אחד: $x^2 = 3x + 4$ הופכת ל- $x^2 - 3x - 4 = 0$, ולכן $b = -3$ ו- $c = -4$.
- **כשי- $\Delta < 0$** התשובה היא "אין פתרון". לא מוציאים שורש ממספר שלילי.

הידעתם?

את השיטה של הוכחה 2 תיאר המתמטיקאי מוחמד אבן מוסא אל-חוארזמי, שפעל בבגדאד במאה ה-9. בספרו על "אל-ג'בר ואל-מוקאבלה" הוא פתר משוואות ריבועיות במילים ובסרטוטים, בלי אותיות ובלי סימנים, ובין השאר את הבעיה "ריבוע ועשרה שורשים שווים לשלושים ותשע". אל-חוארזמי לא השתמש במספרים שליליים, ולכן מצא רק את הפתרון $x = 3$. מהמילה "אל-ג'בר" נגזרה המילה **אלגברה**, ומשמו – המילה **אלגוריתם**.

בעיות שמובילות למשוואות ריבועיות נפתרו עוד קודם, בבבל העתיקה, לפני כמעט 4,000 שנה – גם שם במילים ובדוגמאות מספריות, ולא בנוסחה עם אותיות. כלל כללי לפתרון, עדיין במילים, ניסח לראשונה בבירור המתמטיקאי ההודי ברהמגופטה, בשנת 628. ונוסחה עם אותיות, כמו שלנו, נכתבה רק אחרי שפרנסואה ויאטה (זה של נוסחאות ויאטה) הנהיג בסוף המאה ה-16 אותיות גם למקדמים.

בשורה התחתונה

- בהשלמה לריבוע אפשר להביא כל משוואה ריבועית לצורה $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ – ומשם הנוסחה נובעת מייד.
- הסימן של $\Delta = b^2 - 4ac$ קובע כמה פתרונות יש: שניים, אחד או אף לא אחד.
- לנוסחה יש גם משמעות גאומטרית: הישר $x = -\frac{b}{2a}$ הוא ציר הסימטריה של הפרבולה, ו- $\pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ הוא המרחק של הפתרונות ממנו.

10 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות ✓

1. פתרו בעזרת הנוסחה: $3x^2 - 7x + 2 = 0$.
2. כמה פתרונות יש למשוואה $x^2 + 4x + 5 = 0$? נמקו בלי לפתור.
3. פתרו את $x^2 + 8x = 20$ בהשלמה לריבוע, כמו אל-חוארזמי. איזה פתרון הסרטוט "מפספס"?
4. בלי לפתור: מהם הסכום והמכפלה של הפתרונות של $2x^2 - 6x - 5 = 0$?
5. לאיזה ערך של k יש למשוואה $x^2 - 6x + k = 0$ פתרון אחד בדיוק?
6. למה בצעד 8 של הוכחה 1 מותר לכתוב $2a$ במקום $|a|$, גם כש- $a < 0$? (זאת השאלה מתיבת "עצרו ובדקו".)

תשובות

1. $\Delta = 49 - 24 = 25$, ולכן $x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{6}$, כלומר $x_1 = 2$ ו- $x_2 = \frac{1}{3}$.
2. $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$, ולכן אין פתרון.
3. מוסיפים $\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$ לשני האגפים ומקבלים $(x + 4)^2 = 36$. לכן $x + 4 = \pm 6$, כלומר $x = 2$ או $x = -10$. הסרטוט מוצא רק את $x = 2$, כי אורך לא יכול להיות שלילי.
4. $\Delta = 36 + 40 = 76 > 0$, ולכן יש שני פתרונות. סכומם $-\frac{-6}{2} = 3$, ומכפלתם $-\frac{5}{2} = -2.5$.
5. יש פתרון אחד בדיוק כש- $\Delta = 0$, כלומר כש- $36 - 4k = 0$, ולכן $k = 9$. (ואז $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$).
6. אם $a < 0$, אז $2|a| = -2a$, ולכן $\pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{-2a} = \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$. אלה אותם שני מספרים, רק בסדר הפוך: מה שהיה "הפתרון עם פלוס" הפך ל"פתרון עם מינוס", ולהפך. קבוצת הפתרונות לא השתנתה.