

נוסחאות הכפל המקוצר

שלוש נוסחאות שחוסכות פתיחת סוגריים –
ולמה הן נכונות, באלגברה ובשטחים

כ־15 דקות קריאה

2 הוכחות לכל נוסחה

אלגברה

כיתות ח'–ט'

מה כדאי לדעת קודם

- חוק הפילוג: $a(b+c) = ab+ac$.
- כפל מספרים מכוונים: מינוס כפול מינוס הוא פלוס.
- כינוס איברים דומים.
- שטח של ריבוע ושל מלבן.

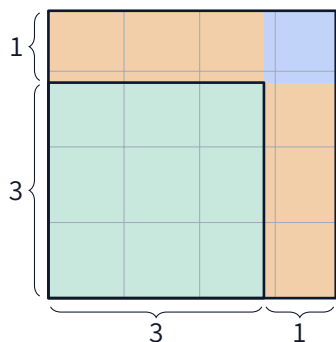
מה תמצאו כאן

- אינטואיציה: למה $(a+b)^2$ אינו שווה ל- $a^2 + b^2$.
- הוכחה 1 (אלגברית): פתיחת סוגריים בחוק הפילוג.
- הוכחה 2 (גאומטרית): חישוב שטחים, כולל "חתוך והזז".
- להעמקה: נוסחאות לחזקה שלישית.
- חשבון בעל פה, פירוק לגורמים, טעויות נפוצות ובדיקה עצמית.

1 האינטואיציה: כמה אריחים חסרים?

האינטואיציה

על הרצפה מונח ריבוע של אריחים, 3 על 3. רוצים להגדיל אותו לריבוע של 4 על 4. כמה אריחים צריך להוסיף?
תשובה מהירה ושגויה: " $3+1=4$ ", ולכן $3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10$ – צריך רק אריח אחד".
אבל בסרטוט רואים שזה לא נכון: צריך להוסיף **שורה** של 3 אריחים, **עמודה** של 3 אריחים, ועוד **אריח אחד** **בפינה**. בסך הכול $9 + 3 + 3 + 1 = 16$.
השורה והעמודה הן בדיוק מה שהתשובה המהירה "שוכחת". באלגברה הן הופכות ל"איבר האמצעי" – ובו עוסקות כל נוסחאות הכפל המקוצר.



- הריבוע המקורי: $3 \cdot 3 = 9$ אריחים
- שורה ועמודה חדשות: $3 + 3$ אריחים
- הפינה: אריח אחד

סרטוט 1: $(3+1)^2 = 9 + 3 + 3 + 1 = 16$, ולא $9 + 1 = 10$.

אותו דבר עם מספרים אחרים

נבדוק עוד כמה זוגות מספרים, ונשווה את $(a+b)^2$ ל- $a^2 + b^2$:

הפרש	$a^2 + b^2$	$(a+b)^2$	b	a
$6 = 2 \cdot 3 \cdot 1$	10	16	1	3
$20 = 2 \cdot 5 \cdot 2$	29	49	2	5
$60 = 2 \cdot 10 \cdot 3$	109	169	3	10

בכל השורות ההפרש הוא בדיוק $2ab$: שני מלבנים של a על b – השורה והעמודה מהסרטוט.

2 הנוסחאות

נוסחאות הכפל המקוצר

לכל שני מספרים a ו- b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ריבוע של סכום

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ריבוע של הפרש

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

הפרש ריבועים

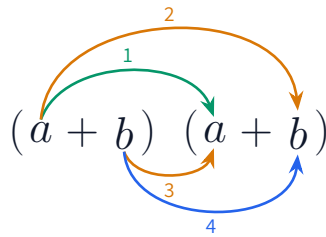
במילים: ריבוע של סכום שווה לריבוע של האיבר הראשון, ועוד פעמיים המכפלה של שני האיברים, ועוד ריבוע של האיבר השני. בריבוע של הפרש רק הסימן של $2ab$ מתחלף. ומכפלה של סכום בהפרש של אותם שני איברים שווה להפרש הריבועים שלהם.

את a ו- b אפשר להחליף בכל מספר – חיובי, שלילי, שבר או שורש – ואפילו בביטוי אלגברי. למשל, אם $a = 2x$ ו- $b = 3$, הנוסחה הראשונה נותנת $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$. השם "כפל מקוצר" בא מכך שהנוסחאות חוסכות את פתיחת הסוגריים המלאה, ונותנות את התוצאה מייד.

3 הוכחה 1: פתיחת סוגריים

הרעיון ריבוע של ביטוי הוא הביטוי כפול עצמו. נכפול שני סוגריים לפי חוק הפילוג – כל איבר בסוגריים הראשונים כפול כל איבר בסוגריים השניים – ונכנס איברים דומים.

כשכופלים שני סוגריים שבכל אחד מהם שני איברים, מתקבלות **ארבע** מכפלות. בסרטוט כל קשת מחברת זוג איברים שנכפלים זה בזה:



סרטוט 2: ארבע מכפלות בפתיחת $(a+b)(a+b)$.

1. הראשון בראשון: $a \cdot a$

2. הראשון בשני: $a \cdot b$

3. השני בראשון: $b \cdot a$

4. השני בשני: $b \cdot b$

זה בדיוק חוק הפילוג, שמופעל פעמיים.

ריבוע של סכום

נימוק	טענה
ריבוע פירושו כפל של הביטוי בעצמו	① $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$
חוק הפילוג: ארבע המכפלות מהסרטוט	② $(a+b)(a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$
$b \cdot a = a \cdot b$ ו- $b \cdot b = b^2, a \cdot a = a^2$	③ $(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$
כינוס איברים דומים: $ab + ab = 2ab$	④ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

מש"ל

עצרו ובדקו ✓

בצעד 3 החלפנו את $b \cdot a$ ב- $a \cdot b$. איזה חוק מאפשר זאת? ולמה הצעד הזה חשוב כל כך להמשך?

ריבוע של הפרש

אותה פתיחת סוגריים, אבל הפעם צריך לשים לב לסימנים: בסוגריים יש a ו- $(-b)$.

נימוק	טענה
ריבוע פירושו כפל של הביטוי בעצמו	① $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$
חוק הפילוג: כל איבר בכל איבר, עם הסימנים	② $(a-b)(a-b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + (-b) \cdot (-b)$
מינוס כפול מינוס: $(-b)(-b) = b^2$	③ $(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2$
כינוס איברים דומים: $-ab - ab = -2ab$	④ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

מש"ל

דרך קצרה יותר. חיסור הוא חיבור של המספר הנגדי: $a-b = a+(-b)$. לכן אפשר להציב $-b$ במקום b בנוסחה הראשונה, שכבר הוכחנו לכל שני מספרים:

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

שימו לב: $(-b)^2 = b^2$, ולכן האיבר האחרון נשאר חיובי.

הפרש ריבועים

נימוק	טענה
חוק הפילוג: ארבע מכפלות	① $(a + b)(a - b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b$
$b \cdot a = a \cdot b$	② $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$
האיברים האמצעיים מבטלים זה את זה	③ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

מש"ל

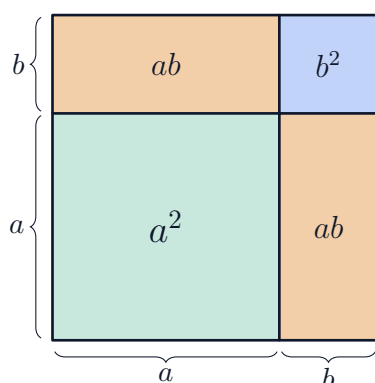
מה למדנו מהוכחה 1

בשלוש הנוסחאות מתקבלות אותן ארבע מכפלות: a^2 , פעמיים ab ו- b^2 . ההבדל ביניהן הוא רק בסימנים. בריבוע של סכום שני האיברים האמצעיים מסתכמים ב- $+2ab$, בריבוע של הפרש הם מסתכמים ב- $-2ab$, ובהפרש ריבועים הם מבטלים זה את זה. ההוכחה הזאת נכונה לכל המספרים, בלי שום תנאי.

4 הוכחה 2: שטחים

הרעיון נניח ש- a ו- b הם מספרים חיוביים, ונחשוב עליהם כעל אורכים. כך כל איבר בנוסחה הופך לשטח: a^2 הוא שטח של ריבוע שצלעו a , ו- ab הוא שטח של מלבן שצלעותיו a ו- b . נחשב את אותו שטח בשתי דרכים, ונשווה.

ריבוע של סכום



סרטוט 3: ריבוע שצלעו $a + b$, מחולק לארבעה חלקים.

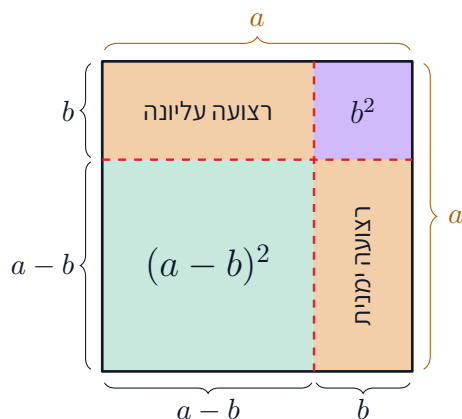
נבנה ריבוע שצלעו $a + b$. נחלק כל צלע לקטע שאורכו a ולקטע שאורכו b , ונעביר דרך נקודות החלוקה קווים מקבילים לצלעות. הריבוע הגדול מתחלק לארבעה חלקים:

- ריבוע ירוק שצלעו a ;
 - ריבוע כחול שצלעו b ;
 - שני מלבנים כתומים, כל אחד a על b .
- זה בדיוק סרטוט האריחים מסעיף 1, אבל עם אורכים כלליים.

טענה	נימוק
① $S = (a + b)^2$	שטח הריבוע הגדול: צלע בריבוע
② $S = a^2 + ab + ab + b^2$	סכום השטחים של ארבעת החלקים
③ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	זה אותו שטח, ולכן שני הביטויים שווים

מש"ל

ריבוע של הפרש: חותכים פעמיים ומחזירים פעם אחת



סרטוט 4: ריבוע שצלעו a . הריבוע הסגול שייך לשתי הרצועות.

כאן נניח גם ש- $a > b$, כדי ש- $a - b$ יהיה אורך חיובי. נתחיל מריבוע שצלעו a . בפינה שלו נמצא הריבוע הירוק, שצלעו b . כדי "לחשוף" אותו, נחתוך מהריבוע הגדול שתי רצועות:

- רצועה עליונה: מלבן a על b , ששטחו ab ;
- רצועה ימנית: מלבן b על a , ששטחו ab .

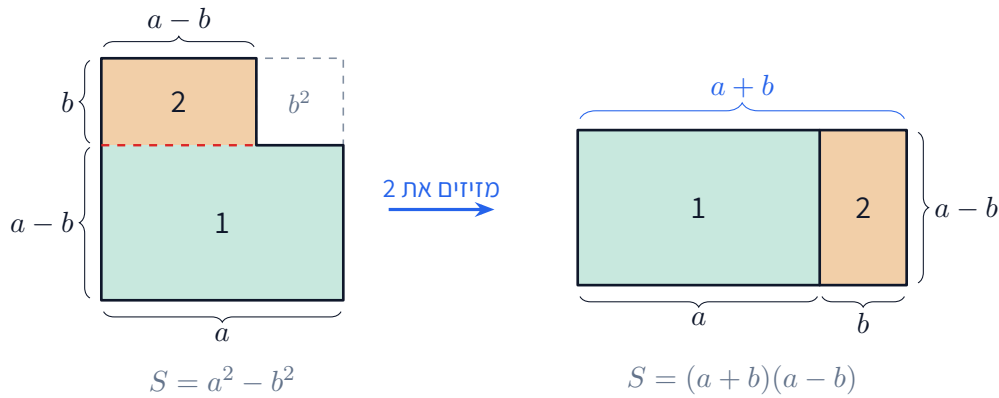
אבל לשתי הרצועות יש חלק משותף: הריבוע הסגול שבפינה, שצלעו b , שייך לשתייהן. לכן כשחותכים את שתיהן, הוא נחתך פעמיים.

טענה	נימוק
① $S_{\text{ירוק}} = (a - b)^2$	ריבוע שצלעו $a - b$
② $a^2 - ab - ab = S_{\text{ירוק}} - b^2$	מהריבוע הגדול הורדנו שתי רצועות. הפינה b^2 ירדה פעמיים – פעם אחת יותר מדי
③ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	מוסיפים b^2 לשני האגפים – "מחזירים" את הפינה

מש"ל

הפרש ריבועים: חותכים ומזיזים

נניח שוב ש- $a > b > 0$. מהפינה של ריבוע שצלעו a נחתוך ריבוע שצלעו b . תישאר צורה של האות L, ששטחה $a^2 - b^2$. עכשיו נחתוך את צורת ה-L לאורך הקו המקווקו לשני מלבנים: מלבן ירוק (1), שמידותיו a על $a - b$, ומלבן כתום (2), שמידותיו $a - b$ על b . נסובב את המלבן הכתום ברבע סיבוב, ונצמיד אותו לצד של המלבן הירוק.



סרטוט 5: צורת ה־L נחתכת לשני מלבנים, ומהם מרכיבים מלבן אחד.

נימוק	טענה
ריבוע שצלעו a , פחות הריבוע שנחתך מהפינה	$S_L = a^2 - b^2$ ①
המלבן החדש: אורכו $a + b$ ורוחבו $a - b$	$S_{\text{מלבן}} = (a + b)(a - b)$ ②
חיתוך והזזה לא משנים את השטח הכולל	$S_{\text{מלבן}} = S_L$ ③
השוואה בין צעד 1 לצעד 2	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ④

מש"ל

מה למדנו מהוכחה 2

ההוכחה הגאומטרית מסבירה **למה** יש בנוסחאות איבר אמצעי: $2ab$ הוא השטח של שני המלבנים שנוצרים "בין" a ל- b . אבל יש לה מגבלה: היא עובדת רק כש- a חיוביים (ובשתי הנוסחאות האחרונות גם $a > b$), כי אורך לא יכול להיות שלילי. את המקרים האחרים מכסה ההוכחה האלגברית.

5 שתי הדרכים זו מול זו

הוכחה 1: פתיחת סוגריים	הוכחה 2: שטחים	
ריבוע הוא כפל של ביטוי בעצמו	מחשבים אותו שטח בשתי דרכים	הרעיון
חוק הפילוג, חוק החילוף, כינוס איברים דומים	שטח של ריבוע ושל מלבן, חיתוך והזזה	הכלים
כל המספרים, בלי תנאים	רק $a, b > 0$ (ולפעמים $a > b$)	תקפות
קצרה, כללית, ומתאימה גם לחזקות גבוהות	"רואים" מאיפה מגיע $2ab$	היתרון

6 להעמקה: חזקה שלישית

אותה שיטה של פתיחת סוגריים נותנת נוסחאות גם לחזקה שלישית. לא בכל בית ספר מלמדים אותן בחטיבת הביניים, אבל הן שימושיות בהמשך.

נוסחאות לחזקה שלישית

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

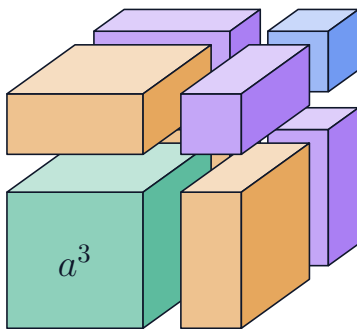
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

הוכחה לנוסחה הראשונה. נכתוב חזקה שלישית כריבוע כפול הביטוי, ונשתמש בנוסחה שכבר הוכחנו:

נימוק	טענה
חזקה שלישית: ריבוע כפול הביטוי פעם נוספת	① $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b)$
ריבוע של סכום	② $(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$
חוק הפילוג: שש מכפלות	③ $(a + b)^3 = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$
כינוס איברים דומים	④ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

מש"ל



סרטוט 6: קובייה שמקצועה $a + b$, מפורקת לשמונה חלקים.

הסבר גאומטרי: נפחים. קובייה שמקצועה $a + b$ מתפרקת לשמונה תיבות:

- קובייה ירוקה אחת, a^3 ;
- שלוש תיבות כתומות, כל אחת $a \cdot a \cdot b$;
- שלוש תיבות סגולות, כל אחת $a \cdot b \cdot b$;
- קובייה כחולה אחת, b^3 .

בסרטוט הרחקנו את החלקים זה מזה. אחת התיבות הכתומות מוסתרת מאחור.

הנוסחה השנייה מתקבלת מהראשונה בהצבת $-b$ במקום b : האיברים שבהם b מופיע בחזקה אי-זוגית מחליפים סימן. את הנוסחאות ל- $a^3 + b^3$ ול- $a^3 - b^3$ מוכיחים בפתיחת הסוגריים באגף ימין. למשל:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

כל האיברים האמצעיים מבטלים זה את זה, בדיוק כמו בהפרש ריבועים. את הנוסחה האחרונה מוכיחים באותו אופן. שימו לב למקדמים: 1, 2, 1 בריבוע ו-1, 3, 3, 1 בחזקה שלישית. אלה שורות במשולש פסקל – ועל כך תוכלו לקרוא במסמך "הבינום של ניוטון ונוסחת ברנולי".

7 מה עושים עם הנוסחאות?

שימוש 1: חשבון בעל פה

הרעיון: לכתוב מספר "לא נוח" כסכום או כהפרש של מספרים "עגולים".

ריבועים ומכפלות בלי מחשבון

$$\begin{aligned} 99^2 &= (100 - 1)^2 = 10,000 - 200 + 1 = 9,801 \\ 102^2 &= (100 + 2)^2 = 10,000 + 400 + 4 = 10,404 \\ 51 \cdot 49 &= (50 + 1)(50 - 1) = 2,500 - 1 = 2,499 \\ 35^2 &= (30 + 5)^2 = 900 + 300 + 25 = 1,225 \end{aligned}$$

במכפלה $51 \cdot 49$ הסוד הוא למצוא את המספר שבאמצע: 50. שני הגורמים רחוקים ממנו באותו מרחק (1), ולכן אפשר להשתמש בהפרש ריבועים.

שימוש 2: פירוק לגורמים

את הנוסחאות אפשר לקרוא גם "בכיוון ההפוך" – מהצד המפותח לצד של המכפלה. כך הופכים סכום למכפלה, וזה עוזר לפתור משוואות ולצמצם שברים.

פירוק לגורמים ופתרון משוואה

$$\begin{aligned} x^2 - 25 &= x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5) \quad (\text{הפרש ריבועים}). \\ 4x^2 - 12x + 9 &= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x - 3)^2 \quad (\text{ריבוע של הפרש}). \\ x^2 - 6x + 9 &= 0 \quad \text{היא בעצם } (x - 3)^2 = 0, \text{ ולכן הפתרון היחיד שלה הוא } x = 3. \end{aligned}$$

כדי לזהות ריבוע של סכום או של הפרש, בודקים שני דברים: האיבר הראשון והאיבר האחרון הם ריבועים, והאיבר האמצעי הוא פעמיים המכפלה של השורשים שלהם.

⚠ טעויות נפוצות

- **"לפזר" את החזקה.** $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ ו- $(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$. בדיקה מהירה: $(3 + 1)^2 = 16$, אבל $3^2 + 1^2 = 10$.
- **לשכוח את ה-2.** באיבר האמצעי יש **פעמיים** את המכפלה: $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$, ולא $x^2 + 5x + 25$.
- **הסימן של b^2 .** בריבוע של הפרש האיבר האחרון חיובי: $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$, ולא $x^2 - 8x - 16$.
- **מקדם בתוך הריבוע.** $(3x)^2 = 9x^2$ ולא $3x^2$. לכן $(3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$.
- **חזקה שלישית.** הביטוי $a^2 - ab + b^2$ בנוסחה של $a^3 + b^3$ אינו $(a - b)^2$ – האיבר האמצעי שלו הוא $-ab$, ולא $-2ab$.

הידעתם?

הנוסחה $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ מופיעה כבר ב"יסודות" של אוקלידס (בערך 300 לפני הספירה), בספר ב', טענה 4. אבל אוקלידס לא השתמש בסימון אלגברי. הוא ניסח הכול בשפה של קטעים ושטחים: אם מחלקים קטע לשני חלקים, הריבוע על הקטע כולו שווה לשני הריבועים על החלקים, ועוד פעמיים המלבן שצולעותיו הן שני החלקים – בדיוק הסרטוט של הוכחה 2. גם שתי הנוסחאות האחרות מופיעות באותו ספר, בניסוח של שטחים (טענות 5 ו-7). הסימון האלגברי שאנחנו משתמשים בו היום, עם אותיות במקום מספרים, התפתח רק במאות ה-16 וה-17.

8 בדקו את עצמכם

שש שאלות קצרות

- פתחו את הסוגריים: $(x + 7)^2$ ו- $(2x - 5)^2$.
- חשבו בעל פה: 101^2 ו- $48 \cdot 52$.
- פרקו לגורמים: $x^2 - 49$ ו- $x^2 + 6x + 1$.
- האם $(a - b)^2 = (b - a)^2$? הסבירו בשתי דרכים.
- פשטו: $(x + 3)^2 - (x - 3)^2$.
- בהוכחה 1, בצעד 3 של "ריבוע של סכום", החלפנו את $a \cdot b$ ב- $a \cdot b$. איזה חוק מאפשר זאת, ולמה זה חשוב? (זאת השאלה מתיבת "עצרו ובדקו").

תשובות

- $(2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$ ו- $(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$.
- $48 \cdot 52 = (50 - 2)(50 + 2) = 2,500 - 4 = 2,496$ ו- $101^2 = (100 + 1)^2 = 10,000 + 200 + 1 = 10,201$.
- $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 = (3x + 1)^2$ ו- $x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7)$.
- כן. לפי הנוסחה: $(b - a)^2 = b^2 - 2ba + a^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$. ובדרך שנייה: $b - a = -(a - b)$, ולמספר ולנגדי שלו יש אותו ריבוע.
- לפי הנוסחאות: $(x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9) = 12x$. אפשר לחשב גם בעזרת הפרש ריבועים: נסמן $A = x + 3$ ו- $B = x - 3$, ונקבל $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) = 6 \cdot 2x = 12x$.
- חוק החילוף בכפל: $b \cdot a = a \cdot b$. בזכותו שני האיברים האמצעיים הם איברים דומים, ואפשר לכנס אותם ל- $2ab$.