

משפט פיתגורס

שבע הוכחות למשפט אחד – מאוקלידס ועד נשיא ארצות הברית

כ־30 דקות קריאה

7 הוכחות

גאומטריה

כיתות ז'–ט'

מה כדאי לדעת קודם

- שטח של ריבוע, מלבן, משולש וטרפז.
- סכום הזוויות במשולש.
- חפיפת משולשים ודמיון משולשים.
- להוכחות 6–7: משיקים למעגל ונגזרת.

מה תמצאו כאן

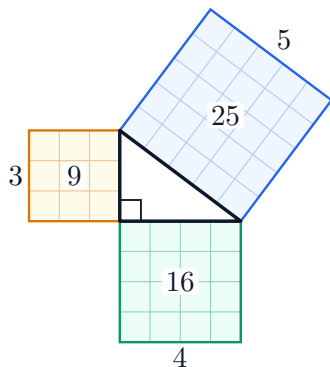
- אינטואיציה: סופרים משבצות על צלעות המשולש.
- שבע הוכחות: סידור מחדש, משולשים דומים, אוקלידס, שני משושים, הנשיא גרפילד, המעגל החסום וחשבון דיפרנציאלי (להעמקה).
- המשפט ההפוך ושלשות פיתגוריות.
- דוגמאות, טעויות נפוצות, היסטוריה ושאלות לבדיקה עצמית.

1 האינטואיציה: צעדים, משבצות וריבועים

האינטואיציה

צאו מנקודה כלשהי, לכו 4 צעדים מזרחה ואחר כך 3 צעדים צפונה. הלכתם 7 צעדים, אבל כמה רחוק אתם עכשיו מנקודת ההתחלה, בקו ישר? ברור שפחות מ־7, כי הדרך הישירה קצרה יותר מהעיקוף. מתברר שהתשובה היא בדיוק 5 צעדים.

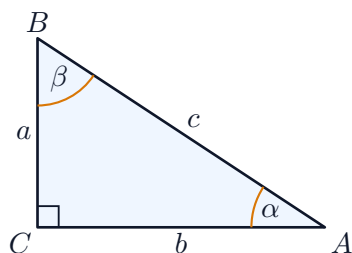
איך אפשר לדעת את זה בלי סרגל? משפט פיתגורס עונה על השאלה בעזרת **ריבועים**. שני הקטעים שהלכתם, יחד עם הקו הישר שמחבר את נקודת הסיום לנקודת ההתחלה, יוצרים משולש ישר-זווית. נבנה ריבוע על כל אחת משלוש הצלעות שלו ונספור משבצות: בריבוע שעל הצלע 3 יש $3 \cdot 3 = 9$ משבצות, בריבוע שעל הצלע 4 יש 16, ובריבוע שעל הצלע 5 יש 25. ובאמת, $9 + 16 = 25$: בשני הריבועים הקטנים יש יחד בדיוק אותו מספר משבצות כמו בריבוע הגדול.



סרטוט 1: סופרים משבצות: $9 + 16 = 25$.

זה לא צירוף מקרים שקשור דווקא למספרים 3, 4 ו־5: בכל משולש ישר-זווית השטח של הריבוע שעל הצלע הארוכה שווה לסכום השטחים של שני הריבועים האחרים. זה תוכן המשפט. אבל שימו לב: זה נכון **רק** כשהפנייה בין שני הקטעים היא בזווית ישרה. אם הזווית במשולש בין הקטע של 4 צעדים לקטע של 3 צעדים קטנה מ־ 90° , נקודת הסיום מתקרבת לנקודת ההתחלה, והמרחק קטן מ־5. אם היא גדולה מ־ 90° , המרחק גדול מ־5. את המקרה הכללי מתאר משפט הקוסינוסים.

2 המשפט



סרטוט 2: הסימון שנשתמש בו לאורך המסמך.

במשולש ישר-זווית נסמן ב- C את הקודקוד של הזווית הישרה. שתי הצלעות שיוצרות את הזווית הישרה נקראות **ניצבים**, והצלע שמולה נקראת **יתר**. היתר הוא הצלע הארוכה ביותר במשולש. נשתמש בסימון המקובל: הניצבים הם $a = BC$ ו- $b = AC$, והיתר הוא $c = AB$. הזוויות החדות הן α (ב- A) ו- β (ב- B). סכום הזוויות במשולש הוא 180° , ולכן $\alpha + \beta = 90^\circ$ – עובדה שנשתמש בה כמה פעמים.

משפט פיתגורס

בכל משולש ישר-זווית, סכום הריבועים של הניצבים שווה לריבוע של היתר:

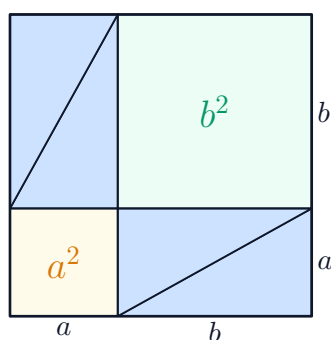
$$a^2 + b^2 = c^2$$

במילים: אם בונים ריבוע על כל אחת מצלעות המשולש, השטח של הריבוע שעל היתר שווה לסכום השטחים של שני הריבועים שעל הניצבים.

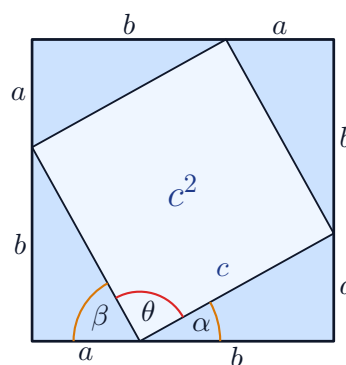
כל ההוכחות שבהמשך מוכיחות את אותה טענה בדיוק. ההבדל ביניהן הוא בכלי שכל אחת משתמשת בו: סידור מחדש של חלקים, דמיון, חפיפה, השוואת שטחים, מעגל או נגזרת. אפשר לקרוא אותן בכל סדר.

3 הוכחה 1: סידור מחדש בשני ריבועים

הרעיון ניקח שני ריבועים זהים שהצלע שלהם $a + b$, ונסדר בכל אחד מהם ארבעה עותקים של המשולש – בשני סידורים שונים. השטח שנשאר פנוי בשני הריבועים חייב להיות שווה.



סידור ב'



סידור א'

סרטוט 3: שני ריבועים שהצלע שלהם $a + b$. בכל אחד ארבעה עותקים של המשולש (בכחול).

טענה	נימוק
① בסידור א' השטח הפנוי הוא מרובע שכל צלעותיו c	כל צלע שלו היא היתר של אחד המשולשים
② כל זווית של המרובע הזה היא 90°	בכל קודקוד שלו: $\alpha + \theta + \beta = 180^\circ$ (זווית שטוחה), ו- $\alpha + \beta = 90^\circ$
③ השטח הפנוי בסידור א' הוא ריבוע ששטחו c^2	מרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו ישרות
④ השטח הפנוי בסידור ב' הוא שני ריבועים, ששטחם $a^2 + b^2$	המשולשים מסודרים בזוגות, כשני מלבנים שצלעותיהם a ו- b
⑤ $c^2 = a^2 + b^2$	משני ריבועים שווים הוצאנו את אותו שטח: ארבעה משולשים חופפים

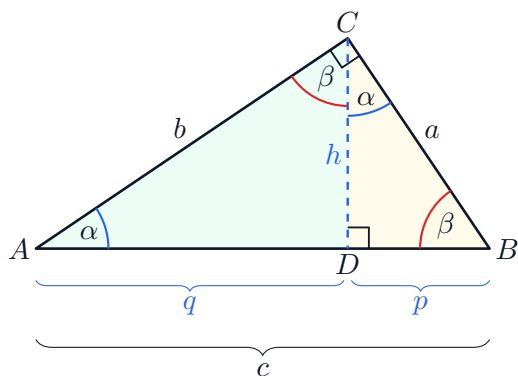
מש"ל

אפשר לכתוב את סידור א' גם כחישוב. שטח הריבוע הגדול הוא $(a+b)^2$, והוא מורכב מהריבוע הפנימי ומארבעה משולשים:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} \implies a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \implies a^2 + b^2 = c^2.$$

4 הוכחה 2: משולשים דומים

הרעיון הגובה ליתר מחלק את המשולש לשני משולשים קטנים, וכל אחד מהם דומה למשולש המקורי. מהדמיון נקבל שתי משוואות, ומהחיבור שלהן נקבל את המשפט.



סרטוט 4: הגובה CD יוצר שני משולשים קטנים הדומים ל- $\triangle ABC$.

מהקודקוד C נוריד גובה ליתר, ונסמן את עקב הגובה ב- D . הגובה מחלק את היתר לשני קטעים: $p = BD$ ו- $q = AD$. הזוויות α ו- β חדות, ולכן נמצאת בין A ל- B , $c = p + q$. בסרטוט מסומנות זוויות שוות באותו צבע. למשל, ב- $\triangle CBD$ מתקיים $\angle BCD = 90^\circ - \beta = \alpha$.

טענה	נימוק
① $\triangle ABC \sim \triangle CBD$	ז.ז: הזווית B משותפת, ושני המשולשים ישרי-זווית ($\angle ACB = \angle CDB = 90^\circ$)
② $\frac{c}{a} = \frac{a}{p}$ ולכן $a^2 = cp$	יחס הצלעות המתאימות: $\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB}$
③ $\triangle ABC \sim \triangle ACD$	ז.ז: הזווית A משותפת, ושני המשולשים ישרי-זווית ($\angle ACB = \angle ADC = 90^\circ$)

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \text{ יחס הצלעות המתאימות:}$$

$$b^2 = cq, \text{ ולכן } \frac{c}{b} = \frac{b}{q} \quad (4)$$

חיבור צעדים 2 ו-4

$$a^2 + b^2 = cp + cq = c(p + q) \quad (5)$$

$$p + q = c$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (6)$$

מש"ל

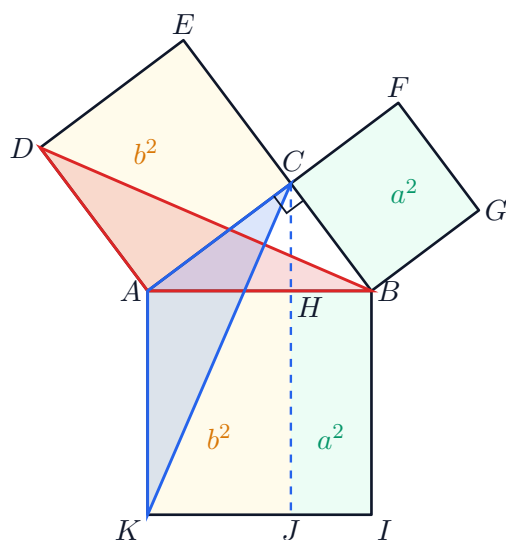
✓ **עצרו ובדקו**

גם שני המשולשים הקטנים דומים זה לזה: $\triangle CBD \sim \triangle ACD$. כתבו איזה קודקוד מתאים לאיזה, והראו $h^2 = pq$, כאשר $h = CD$.

5 הוכחה 3: אוקלידס – חפיפה ושטחים

הרעיון נחלק את הריבוע שעל היתר לשני מלבנים בעזרת המשך הגובה, ונראה שכל מלבן שווה בשטחו לריבוע שעל הניצב הסמוך אליו. הגשר בין הריבוע למלבן הוא זוג משולשים חופפים.

זאת ההוכחה שמופיעה בספר "יסודות" של אוקלידס (ספר א', טענה 47). היא ארוכה מהקודמות, אבל משתמשת רק בחפיפת משולשים ובשטח של משולש.



סרטוט 5: הבנייה של אוקלידס.

הבנייה:

- על כל צלע בנוי ריבוע כלפי חוץ: $ABIK$ על היתר, $ACED$ על הניצב a , $BCFG$ על הניצב b .
- מ- C נוריד גובה ליתר ונמשיך אותו עד הצלע KI .
- הגובה חותך את AB ב- H ואת KI ב- J .
- הקטע HJ מחלק את הריבוע $ABIK$ לשני מלבנים: $AHJK$ ו- $HBIJ$.

הכלי המרכזי: אם למשולש ולמלבן יש אותו בסיס ואותו גובה, שטח המשולש הוא חצי משטח המלבן. נוכיח שהמלבן $AHJK$ שווה בשטחו לריבוע $ACED$. המשולשים הצבועים, $\triangle BAD$ ו- $\triangle KAC$, הם הגשר.

נימוק

טענה

$$\angle ACB + \angle ACE = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

1 C, B, E על ישר אחד

שני הישרים מאונכים ל- AC

2 $BE \parallel AD$

הבסיס $AD = b$, והגובה מ- B ליתר AD הוא המרחק בין המקבילים, $AC = b$.

$$S_{\triangle BAD} = \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}S_{ACED} \quad (3)$$

$$\triangle KAC \cong \triangle BAD \quad (4)$$

ז.י.צ: $AC = AD, AK = AB$,
והזוויות שביניהן: $\angle KAC = \angle BAD = 90^\circ + \alpha$

$$S_{\triangle KAC} = \frac{1}{2} S_{AHJK} \quad (5)$$

בסיס AK , וגובה AH (כי $CJ \parallel AK$)

$$S_{AHJK} = b^2 \quad (6)$$

צעדים 3-5: $\frac{1}{2} S_{AHJK} = \frac{1}{2} b^2$

$$S_{HBIJ} = a^2 \quad (7)$$

אותו נימוק, עם $\triangle IBC \cong \triangle ABG$

$$c^2 = S_{AHJK} + S_{HBIJ} = b^2 + a^2 \quad (8)$$

הריבוע $ABIK$ מורכב משני המלבנים

מש"ל

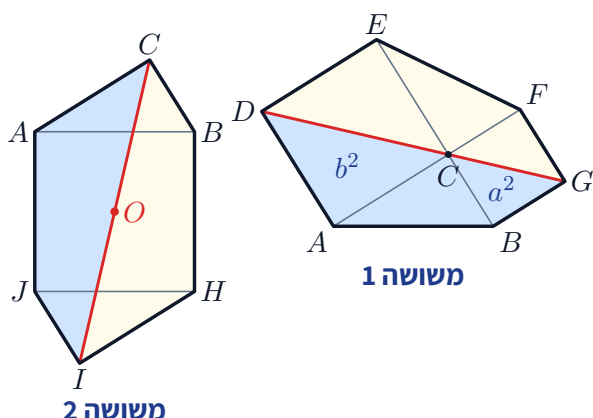
כדאי לשים לב לרעיון שמסתתר בצעד 4: אם מסובבים את $\triangle KAC$ ב- 90° סביב הקודקוד A , מקבלים בדיוק את $\triangle BAD$. אפשר לראות את ההוכחה כולה גם כ"הזזה בשלבים" של הריבוע $ACED$: "מחליקים" אותו למקבילית בעלת אותו בסיס ואותו גובה (ולכן אותו שטח), מסובבים אותה ב- 90° סביב A , ומחליקים שוב – עד שמתקבל המלבן $AHJK$.

עצרו ובדקו

השלימו את צעד 7 בעצמכם: (א) הסבירו למה A, C ו- F נמצאות על ישר אחד. (ב) כתבו את שלושת הנתונים שמראים ש- $\triangle IBC \cong \triangle ABG$. (ג) הסבירו למה $S_{\triangle ABG} = \frac{1}{2} a^2$ ולמה $S_{\triangle IBC} = \frac{1}{2} S_{HBIJ}$.

6 הוכחה 4: שני משושים ("ההוכחה של דה וינצ'י")

הרעיון נבנה שני משושים שווים בשטחם. האחד מורכב משני הריבועים שעל הניצבים ומשני עותקים של המשולש, והשני – מהריבוע שעל היתר ומשני עותקים של המשולש. אם נוריד משניהם את המשולשים, יישאר המשפט. (היא מכונה לפעמים "ההוכחה של לאונרדו דה וינצ'י", אבל הכינוי כנראה שגוי – ראו בתיבת "הידעתם?" בסוף המסמך.)



משושה 1. על הניצבים בנויים הריבועים $ACED$ ו- $CBGF$. נחבר את E ל- F . המשולש ECF חופף ל- $\triangle ACB$ (ז.י.צ: $CE = b, CF = a$, והזווית שביניהן ישרה). כך נוצר המשושה $ABGFED$.
משושה 2. על היתר בנוי הריבוע $ABHJ$, ומתחתיו המשולש JHI – עותק "הפוך" של $\triangle ABC$. הוא מתקבל מ- $\triangle ABC$ בסיבוב של 180° סביב O , מרכז הריבוע. הסיבוב הזה מעביר את A ל- H , את B ל- J ואת C ל- I . כך נוצר המשושה $AJIHBC$.

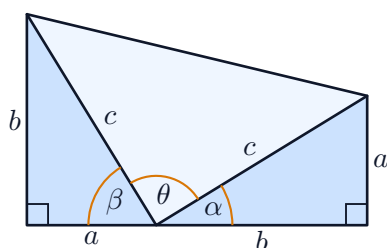
סרטוט 6: הקו האדום מחלק כל משושה לשני מרובעים.

טענה	נימוק
① C, D ו- G על ישר אחד	CD ו- CG הם אלכסונים בריבועים: $45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$
② $ABGD \cong EFGD$	שיקוף בישר DG מעביר את A ל- E ואת B ל- F , כי הישר חוצה את הזוויות הישרות $\angle ACE$ ו- $\angle BCF$ ו- $CA = CE$ ו- $CB = CF$
③ $CAJI \cong IHBC$	הסיבוב ב- 180° סביב O מעביר את משושה 2 לעצמו, והישר CI עובר דרך O
④ $\angle ABG = \angle AJI = 90^\circ + \beta$	$\angle ABG = \beta + 90^\circ$ ו- $\angle HJI = \angle ABC = \beta$, כי JHI הוא העותק ההפוך
⑤ $ABGD \cong AJIC$	סיבוב ב- 90° סביב A מעביר את B ל- J ואת D ל- C ; לפי צעד 4 ו- $BI = BG$, הוא מעביר גם את G ל- I
⑥ $S_{ABGFED} = S_{AJIHBC}$	כל משושה מורכב משני מרובעים, וכל ארבעת המרובעים חופפים
⑦ $a^2 + b^2 + 2 \cdot \frac{ab}{2} = c^2 + 2 \cdot \frac{ab}{2}$	משושה 1: שני ריבועים ושני משולשים. משושה 2: ריבוע ושני משולשים
⑧ $a^2 + b^2 = c^2$	חיסור ab משני האגפים

מש"ל ■

7 הוכחה 5: הנשיא גרפילד – טרפז

הרעיון נחשב את השטח של טרפז אחד בשתי דרכים: פעם בנוסחה של שטח טרפז, ופעם כסכום של שלושת המשולשים שמרכיבים אותו.



סרטוט 7: הטרפז של גרפילד.

נשים שני עותקים של המשולש זה ליד זה, כך שהניצב a של האחד והניצב b של השני נמצאים על ישר אחד (ראו סרטוט). נחבר את שני הקודקודים העליונים ונקבל טרפז ישר-זווית: הבסיסים שלו (הצלעות המקבילות) הם a ו- b , והגובה שלו הוא $a + b$. הטרפז מורכב משלושה משולשים: שני העותקים (בכחול) ומשולש באמצע ששתיים מצלעותיו שוות ל- c .

טענה	נימוק
① $\theta = 90^\circ$	זווית שטוחה: $\beta + \theta + \alpha = 180^\circ$ ו- $\alpha + \beta = 90^\circ$
② שטח המשולש האמצעי הוא $\frac{1}{2}c^2$	משולש ישר-זווית ששני ניצביו c
③ $S = \frac{a+b}{2} \cdot (a+b) = \frac{(a+b)^2}{2}$	שטח טרפז: חצי סכום הבסיסים כפול הגובה

סכום השטחים של שלושת המשולשים

$$S = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} \quad (4)$$

השוואה בין צעדים 3 ו-4, וכפל ב-2

$$(a+b)^2 = 2ab + c^2 \quad (5)$$

פתיחת סוגריים וחסור $2ab$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (6)$$

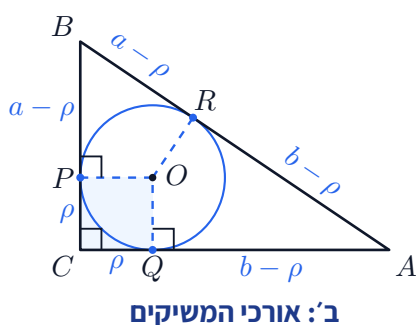
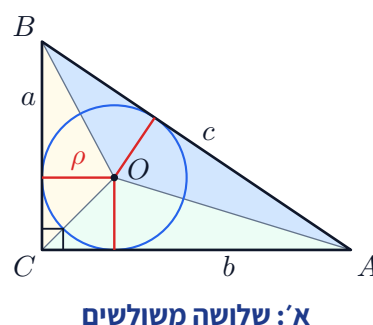
מש"ל

הסתכלו שוב על סידור א' בהוכחה 1 וחתכו את הריבוע הגדול לאורך אלכסון של הריבוע הפנימי: כל אחד משני החלקים הוא בדיוק הטרפז של גרפילד. ההוכחה של גרפילד היא "חצי" מהוכחה 1.

8 הוכחה 6: המעגל החסום

הרעיון נחשב את הרדיוס ρ של המעגל החסום במשולש בשתי דרכים: פעם מהשטח, ופעם מאורכי המשיקים. מהשוואת שתי התוצאות נקבל את המשפט.

נזכיר שתי עובדות על מעגל: רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה, ושני משיקים למעגל מנקודה שמחוץ לו שווים באורכם. נסמן ב- O את מרכז המעגל החסום. המעגל משיק לצלעות BC , CA ו- AB בנקודות P , Q ו- R .



סרטוט 8: המעגל החסום. בסרטוט א' הרדיוסים הם גבהים; בסרטוט ב' המשיקים מכל קודקוד שווים.

טענה	נימוק
$\frac{ab}{2} = \frac{\rho a}{2} + \frac{\rho b}{2} + \frac{\rho c}{2} \quad (1)$	המשולש מורכב מ- $\triangle OAB$, $\triangle OCA$, $\triangle OBC$ ובכל אחד מהם הגובה מ- O הוא רדיוס
$\rho = \frac{ab}{a+b+c} \quad (2)$	כפל ב-2 וחילוק ב- $a+b+c$
$CP = CQ = \rho \quad (3)$	שלוש זוויות ישרות (ב- C , ב- P וב- Q) ושתי צלעות סמוכות $OP = OQ = \rho$
$AR = AQ = b - \rho \text{ ו- } BR = BP = a - \rho \quad (4)$	משיקים מנקודה שמחוץ למעגל שווים
$\rho = \frac{a+b-c}{2} \text{ ולכן } c = (a-\rho) + (b-\rho) \quad (5)$	$c = BR + RA$

שני ביטויים לאותו רדיוס (צדדים 2 ו-5)

$$\frac{ab}{a+b+c} = \frac{a+b-c}{2} \quad (6)$$

כפל בהצלבה; $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$

$$2ab = (a+b-c)(a+b+c) = (a+b)^2 - c^2 \quad (7)$$

פתיחת סוגריים וחסור $2ab$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (8)$$

מש"ל

9 הוכחה 7 (להעמקה): חשבון דיפרנציאלי

הרעיון נשאיר את הניצב b קבוע, ונבדוק איך היתר c משתנה כשהניצב a גדל. נקבל משוואה על הנגזרת, וממנה את המשפט. הדרך הזאת מתאימה למי שלמד נגזרות, והיא רק סקיצה של הוכחה (ההסבר בסוף הפרק).

נחשוב על היתר כעל פונקציה של הניצב: $c = c(a)$.

נגדיל את a בכמות קטנה Δa : הקודקוד B זז ל- B' ,

והיתר גדל בכמות Δc .

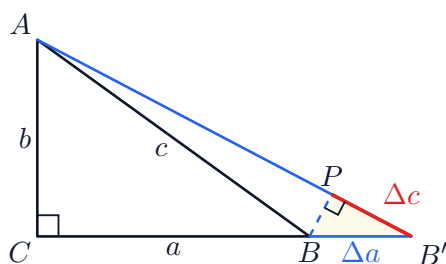
מ- B נוריד אנך ליתר החדש AB' , ונסמן את עקבו ב- P .

המשולש הזעיר $BB'P$ ישר-זווית, והיתר שלו הוא Δa .

המשולש הזה דומה ל- $\triangle AB'C$ (ז.ז: זווית משותפת

ב- B' וזווית ישרה).

כאשר Δa קטן מאוד, PA כמעט שווה ל- BA , ולכן הקטע $B'P$ הוא כמעט בדיוק Δc .



נימוק	טענה
הדמיון $\triangle B'PB \sim \triangle B'CA$; כש- Δa קטן, $B'A \approx c$ ו- $B'C \approx a$	$\frac{\Delta c}{\Delta a} \approx \frac{B'P}{B'B} = \frac{B'C}{B'A} \approx \frac{a}{c} \quad (1)$
כאשר $\Delta a \rightarrow 0$, ה"בערך" הופך לשוויון	$c'(a) = \frac{a}{c} \quad (2)$
גזירת פונקציה מורכבת, והצבת צעד 2	$(c^2 - a^2)' = 2c \cdot c'(a) - 2a = 2a - 2a = 0 \quad (3)$
פונקציה שהנגזרת שלה 0 בכל נקודה היא פונקציה קבועה	$c^2 - a^2 = k \quad (4)$ כאשר k קבוע
כאשר $a \rightarrow 0$, המשולש "נמעך" והיתר שואף ל- b , ולכן $b^2 - 0 = k$	$a^2 + b^2 = c^2, k = b^2 \quad (5)$

מש"ל

בסימון של דיפרנציאלים כותבים את צעד 2 כ"משוואה דיפרנציאלית", ואינטגרציה של שני האגפים נותנת $\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{k}{2}$. עבור קבוע k — אותה תוצאה כמו בצעד 4. **למה זאת רק סקיצה?** כי בצעד 1 השתמשנו ב"בערך" בלי להוכיח כמה קטנה השגיאה, והנחנו מראש ש- $c(a)$ גזירה. אפשר להשלים את הפרטים, אבל זה דורש כלים של גבולות — וגם זהירות: הדרך הטבעית להעריך את השגיאה, $AP - c$, נעזרת במשפט פיתגורס במשולש APB , כלומר בדיוק במה שרוצים להוכיח (ראו "הוכחה מעגלית" בתיבת הטעויות הנפוצות בהמשך).

10 שבע ההוכחות זו מול זו

רוב ההוכחות (1, 3, 4 ו-5) מבוססות על אותו עיקרון: **השוואת שטחים**. מחשבים שטח בשתי דרכים, או מראים ששני שטחים שווים. הוכחות 2 ו-7 משתמשות בדמיון, והוכחה 6 משלבת שטח עם תכונות של משיקים.

ההוכחה	הרעיון	הכלים
1. סידור מחדש	שני סידורים של ארבעה משולשים באותו ריבוע	שטחים; סכום זוויות
2. משולשים דומים	הגובה ליתר יוצר משולשים דומים למקורי	דמיון משולשים
3. אוקלידס	כל מלבן שווה לריבוע שעל ניצב	חפיפה; שטח משולש
4. שני משושים	שני משושים שווים בשטחם	שיקוף, סיבוב וחפיפה
5. גרפילד	שטח של טרפז בשתי דרכים	שטח טרפז ומשולש
6. המעגל החסום	הרדיוס של המעגל החסום בשתי דרכים	משיקים; שטח משולש
7. חשבון דיפרנציאלי	קצב השינוי של היתר כשניצב גדל	דמיון; נגזרת

11 המשפט ההפוך

המשפט ההפוך למשפט פיתגורס

אם במשולש ABC מתקיים $a^2 + b^2 = c^2$, אז המשולש ישר-זווית, והזווית הישרה היא γ – הזווית שמול הצלע c .

הוכחה. נבנה משולש $A'B'C'$ שבו $\angle C' = 90^\circ$, $B'C' = a$ ו- $A'C' = b$. לפי משפט פיתגורס ולפי הנתון,

$$(A'B')^2 = a^2 + b^2 = c^2,$$

ולכן $A'B' = c$. שני המשולשים חופפים לפי צ.צ.צ., ומכאן ש- $\gamma = \angle C' = 90^\circ$.

שימו לב שבהוכחה של המשפט ההפוך השתמשנו במשפט פיתגורס עצמו. כך בדיוק עשה גם אוקלידס: המשפט ההפוך הוא הטענה שבאה מייד אחרי משפט פיתגורס ב"יסודות" (ספר א', טענה 48).

12 מה עושים עם המשפט?

שימוש 1: מוצאים צלע חסרה

דוגמה מספרית

סולם שאורכו 2.5 מטרים נשען על קיר. רגל הסולם נמצאת במרחק 0.7 מטר מהקיר. לאיזה גובה מגיע ראש הסולם?

הסולם הוא היתר, והגובה h הוא ניצב: $h^2 = 2.5^2 - 0.7^2 = 6.25 - 0.49 = 5.76$, ולכן $h = 2.4$ מטרים.

שימוש 2: בודקים אם משולש ישר-זווית

מספיק לבדוק אם ריבוע הצלע הארוכה שווה לסכום הריבועים של שתי הצלעות האחרות. אם כן – המשולש ישר-זווית (לפי המשפט ההפוך). אם לא – הוא אינו ישר-זווית (לפי משפט פיתגורס עצמו: אילו היה ישר-זווית, הצלע הארוכה הייתה היתר, והשוויון היה מתקיים). למשל:

- במשולש שצלעותיו 20, 21 ו-29 מתקיים $20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841 = 29^2$, ולכן הוא ישר-זווית.
- במשולש שצלעותיו 6, 7 ו-9 מתקיים $6^2 + 7^2 = 85 \neq 81 = 9^2$, ולכן הוא אינו ישר-זווית.

שימוש 3: שלשות פיתגוריות

שלשה פיתגורית היא שלושה מספרים טבעיים a, b, c שמקיימים $a^2 + b^2 = c^2$, כלומר אורכי הצלעות של משולש ישר-זווית. המוכרות ביותר הן $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(8, 15, 17)$, $(7, 24, 25)$ ו- $(20, 21, 29)$. אם מכפילים שלשה פיתגורית במספר טבעי, מקבלים שוב שלשה פיתגורית, למשל $(6, 8, 10)$.

יש גם "מתכון" שמייצר שלשות. לכל שני מספרים טבעיים $m > n$, שלושת המספרים

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

הם שלשה פיתגורית. למשל, $m = 2$ ו- $n = 1$ נותנים $(3, 4, 5)$, ו- $m = 3$ ו- $n = 2$ נותנים $(5, 12, 13)$. הבדיקה:

$$a^2 + b^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 = c^2.$$

⚠ טעויות נפוצות

- **רק במשולש ישר-זווית.** במשולש שאין בו זווית ישרה, $a^2 + b^2 \neq c^2$. שם משתמשים במשפט הקוסינוסים.
- **מי היתר?** היתר הוא תמיד הצלע שמול הזווית הישרה, והיא הארוכה ביותר. אם היתר הוא 13 ואחד הניצבים 5, הניצב השני הוא $12 = \sqrt{13^2 - 5^2}$, ולא $\sqrt{13^2 + 5^2}$.
- **שורש של סכום.** $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$. למשל, $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, ולא 7.
- **הוכחה מעגלית.** אפשר "לקבל" את המשפט מהזהות $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, או ממשפט הקוסינוסים כש- $\gamma = 90^\circ$. אבל זאת לא הוכחה, כי את שתי הנוסחאות האלה מוכיחים בעזרת משפט פיתגורס.

🕒 הידעתם?

המשפט נקרא על שם פיתגורס, מתמטיקאי ופילוסוף יווני מהמאה השישית לפני הספירה, אבל לא נשארה ממנו שום הוכחה כתובה. המשפט היה מוכר עוד לפניו: לוח החרס הבבלי "פלימפטון 322", שנכתב יותר מאלף שנים לפני פיתגורס, מכיל רשימה של מספרים שקשורים לשלושת פיתגוריות. בסין העתיקה קראו למשפט "גואו-גו", על שם הניצב הקצר ("גואו") והניצב הארוך ("גו").

ב"סודות" של אוקלידס (בערך 300 לפני הספירה) המשפט הוא טענה 47 בספר א' (הוכחה 3), והמשפט ההפוך הוא טענה 48. לפי השערה מקובלת, ההוכחה הקדומה של המשפט הייתה בעזרת דמיון (כמו הוכחה 2), ואוקלידס המציא הוכחה חדשה כי רצה להציג את המשפט כבר בספר הראשון, לפני הפרקים על יחס ודמיון. בספר ו' (טענה 31) הוא אכן מוכיח, בעזרת דמיון, גרסה כללית יותר של המשפט. הוכחה 4 מכונה "ההוכחה של לאונרדו דה וינצ'י" (1452–1519), אבל אין לה שום עדות בכתביו: היא מופיעה לראשונה בדפוס

בספר גאומטריה של טמפל הוף (ברלין, 1790), ספר מ-1826 מייחס אותה ליוהאן טוביאס מאייר (1772), ושמו של לאונרדו הוצמד אליה רק ב-1906 — כנראה בגלל טעות בציטוט. את הוכחת הטרפז פרסם ג'יימס גרפילד ב-1876, חמש שנים לפני שנעשה הנשיא ה-20 של ארצות הברית.

בספר "The Pythagorean Proposition" של אלישע סקוט לומיס קובצו 367 הוכחות (במהדורה השנייה, 1940). ב-2023 הציגו שתי תלמידות תיכון מניו אורלינס, קלסיה ג'ונסון ונקיה ג'קסון, הוכחה טריגונומטרית שנמנעת מהמעגליות שתוארה בתיבה הקודמת.

13 בדקו את עצמכם

✓ שבע שאלות קצרות

1. הניצבים במשולש ישר-זווית הם 9 ו-12. מצאו את היתר.
2. האם משולש שצלעותיו 11, 60 ו-61 הוא ישר-זווית?
3. מצאו את אורך האלכסון של ריבוע שהצלע שלו 5.
4. במשולש ישר-זווית $a = 6$ ו- $b = 8$. חשבו את p , q ו- h מהוכחה 2, ובדקו ש- $h^2 = pq$.
5. חשבו את הרדיוס של המעגל החסום במשולש שצלעותיו 5, 12 ו-13, בשתי הנוסחאות מהוכחה 6.
6. השאלה מתיבת "עצרו ובדקו" בהוכחה 2: הראו ש- $h^2 = pq$.
7. השאלה מתיבת "עצרו ובדקו" בהוכחה 3: השלימו את צעד 7.

תשובות

1. $c^2 = 81 + 144 = 225$, ולכן $c = 15$.
2. כן: $11^2 + 60^2 = 121 + 3600 = 3721 = 61^2$.
3. האלכסון הוא היתר של משולש ישר-זווית ששני ניצביו שווים ל-5, ולכן $d^2 = 25 + 25 = 50$ ו- $d = 5\sqrt{2} \approx 7.07$.
4. היתר הוא $c = 10$, ולכן $p = \frac{a^2}{c} = \frac{36}{10} = 3.6$, $q = \frac{b^2}{c} = \frac{64}{10} = 6.4$, $h = \frac{ab}{c} = \frac{48}{10} = 4.8$ (משטח המשולש: $\frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$). ובאמת $h^2 = 23.04 = 3.6 \cdot 6.4$.
5. $\rho = \frac{a+b-c}{2} = \frac{5+12-13}{2} = 2$ וגם $\rho = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{60}{30} = 2$.
6. ההתאמה היא $A \leftrightarrow C, B \leftrightarrow D, C \leftrightarrow A$, כי $\angle CDB = \angle ADC = 90^\circ$ ו- $\angle BCD = \angle CAD = \alpha$.
מיחס הצלעות $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$, כלומר $\frac{h}{q} = \frac{p}{h}$, ולכן $h^2 = pq$.
7. (א) $\angle ACB + \angle BCF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. (ב) $BI = BA$ (צלעות בריבוע שעל היתר), $BC = BG$ (צלעות בריבוע שעל a), $\angle IBC = \angle ABG = 90^\circ + \beta$. לכן המשולשים חופפים לפי צ.ז.צ.
(ג) $AF \parallel BG$ (שני הישרים מאונכים ל- BC), ולכן הגובה מ- A לבסיס BG הוא $BC = a$, ו- $S_{\triangle ABG} = \frac{1}{2}a^2$.
באותו אופן $CJ \parallel BI$, ולכן הגובה מ- C לבסיס BI הוא BH , ו- $S_{\triangle IBC} = \frac{1}{2}S_{HB IJ}$.