תנועה הרמונית פשוטה

קובץ הסבר • כוח מחזיר, מעגל הייחוס, אנרגיה, קפיצים ומטוטלות

כיתה י״א | 5 יח״ל | מכינה קדם־אקדמית

אינסוף
פיזיקה • מכניקה

מה תמצאו כאן?

נדנדה, המתלה של מכונית, מטוטלת של שעון וגוף שקשור לקפיץ חוזרים על אותה תנועה שוב ושוב. בנושא הזה נלמד לתאר תנועה מחזורית, ונכיר את המקרה החשוב ביותר שלה: **תנועה הרמונית פשוטה**. בתנועה כזו הכוח השקול מושך את הגוף אל נקודת שיווי המשקל, וגודלו פרופורציוני למרחק ממנה. בעזרת **מעגל הייחוס** נמצא את המקום, המהירות והתאוצה כפונקציה של הזמן. אחר כך נחשב אנרגיה, וננתח קפיץ אופקי, קפיץ אנכי ומטוטלת פשוטה. שני עמודי ״מקרים״ מרכזים 36 מצבים: 18 בנושא גרפים, מעגל הייחוס ואנרגיה, ו־18 בנושא קפיצים ומטוטלות. אחרי הקובץ הזה מחכה לכם קובץ של 15 תרגילים באותו נושא.

מה כדאי לדעת קודם? חוק הוק (נושא 2), אנרגיה אלסטית ושימור אנרגיה (נושא 3), ובעיקר תנועה מעגלית: זמן מחזור, מהירות זוויתית ורדיאנים (נושא 5). בשאלות המשולבות נשתמש גם בשימור תנע (נושא 4), ובכמה דוגמאות נזכיר את תאוצת הנפילה על הירח ועל כוכבי לכת אחרים, ואת ״חוסר המשקל״ (נושא 6).

צבעי החצים: מקום והעתק בירוק →, מהירות בכחול →, תאוצה באדום →, כוחות בכתום →, משקל בסגול →.

נתונים וסימון: $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, אלא אם נאמר אחרת. x הוא המקום ביחס לנקודת שיווי המשקל, A המשרעת, ω התדירות הזוויתית ו־T זמן המחזור. מכיוון שהאות T תפוסה, את המתיחות בחוט נסמן ב־F_T, כמו בנושא 5. כשמציבים במחשבון $\sin$ או $\cos$ של ωt, עובדים ברדיאנים.

1 הרעיון הגדול: כוח שמחזיר אל האמצע

בגובה העיניים

משכו מעט למטה גוף שתלוי על קפיץ, ושחררו אותו. הכוח השקול על הגוף (כוח הקפיץ פחות המשקל) מושך אותו בחזרה למעלה. כשהגוף מגיע לנקודה שבה היה קודם במנוחה, הוא כבר נע מהר, ולכן הוא ממשיך הלאה. מעל הנקודה הזו הכוח השקול מכוון למטה, והגוף מאט, נעצר וחוזר. וכך שוב ושוב. אם נצמיד לגוף עט ונמשוך לידו רצועת נייר במהירות קבועה, העט יצייר גל חלק: זו ״חתימת היד״ של **תנועה הרמונית**. שני דברים יוצרים אותה: הכוח השקול תמיד מכוון אל נקודת שיווי המשקל, וגודלו פרופורציוני למרחק ממנה.



ההפתעה הגדולה של הנושא: הזמן של תנודה שלמה **לא תלוי** ברוחב התנודה. לפי הסיפור, גלילאו גילה את זה בצעירותו, כשצפה במנורה שהתנדנדה בקתדרלה של פיזה ומדד את זמן התנודות לפי הדופק שלו: תנודות רחבות ותנודות צרות נמשכו אותו זמן. גלילאו חשב שזה נכון בכל זווית, והיום ידוע שזה נכון בקירוב טוב רק בזוויות קטנות (פרק 9). על התכונה הזו בנה כריסטיאן הויגנס ב־1656 את שעון המטוטלת הראשון, והסטייה של שעונים ירדה מכרבע שעה ביום לכרבע דקה ביום. בהמשך הנושא נבין מאיפה התכונה הזו באה, ומתי היא נכונה.

© אור בן שטרית · אינסוף

2 תנועה מחזורית: זמן מחזור, תדירות ותדירות זוויתית

תנועה **מחזורית** חוזרת על עצמה בדיוק, אחרי פרק זמן קבוע T (הקצר ביותר שבו זה קורה). בכל רגע t, המקום ברגע $t+T$ זהה למקום ברגע t, וגם המהירות זהה. בנושא 5 הכרנו שתי תנועות כאלה: תנועה מעגלית קצובה ותנועה במעגל אנכי.

שלוש דרכים לתאר את אותו קצב

$$T\ [\text{s}] \qquad f=\frac{1}{T}\ [\text{Hz}=1/\text{s}] \qquad \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f\ [\text{rad/s}]$$

T הוא **זמן המחזור**, f היא **התדירות** (מספר המחזורים בשנייה), ו־ω היא **התדירות הזוויתית**. מספיק לדעת אחד מהשלושה כדי לחשב את שני האחרים.

דוגמה קטנה. מטוטלת מבצעת 30 תנודות שלמות ב־48 שניות. לכן $T=\frac{48}{30}=1.6\,\text{s}$ ו־$f=\frac{1}{1.6}=0.625\,\text{Hz}$. התדירות הזוויתית היא $\omega=\frac{2\pi}{1.6}\approx 3.93\,\text{rad/s}$.



תנודה היא תנועה מחזורית הלוך ושוב סביב נקודת שיווי משקל. **תנודה הרמונית** היא תנודה מיוחדת, שבה הכוח השקול פרופורציוני להעתק מנקודת שיווי המשקל, ומכוון בכיוון הפוך לו (פרק 3). כל תנודה הרמונית היא תנודה, וכל תנודה בלי חיכוך היא תנועה מחזורית, אבל לא להפך. כדור שקופץ על רצפה וחוזר לאותו גובה נע בתנועה מחזורית, אבל הוא לא מתנודד סביב נקודת שיווי משקל. גוף שמחליק הלוך ושוב בשוקת בצורת V מתנודד, אבל התנודה שלו אינה הרמונית (פרק 10). התנודה של מטוטלת הרמונית רק בזוויות קטנות (פרק 9).

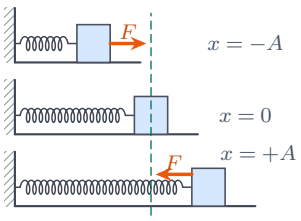
תדירות זוויתית אינה מהירות זוויתית. בתנועה מעגלית קצובה ω היא המהירות הזוויתית: הקצב שבו הרדיוס מסתובב. בתנודה ω היא רק דרך אחרת לכתוב את התדירות. במטוטלת, למשל, קצב הסיבוב של החוט משתנה כל הזמן, ובקצוות החוט נעצר. התדירות הזוויתית של התנודה, לעומת זאת, קבועה. הסימן זהה והיחידות זהות, ולכן קל להתבלבל.

בדקו את עצמכם

לב של אדם במנוחה פועם 72 פעמים בדקה. מה זמן המחזור של הפעימות, מה התדירות שלהן ומה התדירות הזוויתית?

3 הכוח של תנועה הרמונית: $F=-cx$

קחו קרונית שקשורה לקפיץ ונמצאת על משטח אופקי חלק. כשהקרונית ב־$x=0$, הקפיץ רפוי, והקרונית בשיווי משקל. כשהקרונית במקום x, הקפיץ מפעיל עליה כוח $F=-kx$ (חוק הוק, נושא 2). הכוח תמיד מכוון אל נקודת שיווי המשקל, וזה תפקידו של סימן המינוס: כש־x חיובי הכוח שלילי, וכש־x שלילי הכוח חיובי. גודל הכוח פרופורציוני למרחק מנקודת שיווי המשקל. כוח כזה נקרא **כוח מחזיר**.



תנועה הרמונית פשוטה

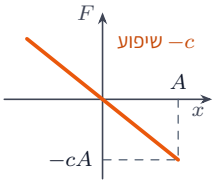
תנודה היא **הרמונית פשוטה** כשהכוח השקול על הגוף הוא

$$F=-c\,x \qquad \Longrightarrow \qquad a=-\frac{c}{m}\,x$$

כאן x הוא המקום ביחס לנקודת שיווי המשקל, ו־c הוא קבוע חיובי: **קבוע התנועה ההרמונית**. התאוצה פרופורציונית למקום ומנוגדת לו בכיוונה, בכל רגע.

© אור בן שטרית · אינסוף

למה c ולא k? כי תנועה הרמונית לא שייכת רק לקפיצים. בקפיץ $c=k$, ובמטוטלת נמצא בפרק 9 ש־$c=\frac{mg}{L}$. בתנועה הרמונית, הגרף של הכוח השקול כפונקציה של המקום נראה תמיד אותו הדבר: קו ישר שעובר בראשית, עם שיפוע שלילי. השיפוע הוא $-c$. כל כוח עם גרף כזה יוצר תנועה הרמונית, ובפרק 10 נראה גם תנודות שהגרף שלהן אחר.

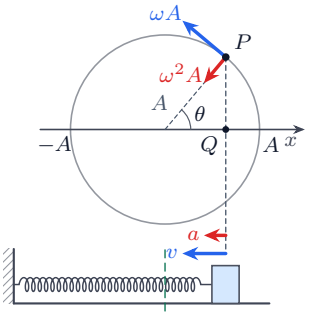


בדקו את עצמכם

גרף הכוח השקול על גוף כפונקציה של מקומו הוא קו ישר, שעובר בנקודות $(-0.1\,\text{m},\ 2\,\text{N})$ ו־$(0.1\,\text{m},\ -2\,\text{N})$. מסת הגוף $0.2\,\text{kg}$. האם התנועה הרמונית? מה c, ומה התאוצה של הגוף כשהוא במקום $x=5\,\text{cm}$?

4 מעגל הייחוס: מקום, מהירות ותאוצה

איך נראית התנועה שהכוח $F=-cx$ יוצר? אפשר למצוא אותה בלי חשבון מסובך, בעזרת תנועה מעגלית קצובה (נושא 5). דמיינו נקודה P שנעה במעגל שרדיוסו A, נגד כיוון השעון, במהירות זוויתית קבועה ω. ה**היטל** שלה, Q, הוא הנקודה על ציר x שמתחת ל־P או מעליה. כש־P מקיפה את המעגל, Q נע הלוך ושוב בין $A-$ ל־A. המעגל הזה נקרא **מעגל הייחוס**.



P נעה במעגל במהירות זוויתית ω.
Q הוא ההיטל של P על ציר x.
הגוף שעל הקפיץ נע בדיוק כמו Q.

ברגע t הזווית של P היא $\theta=\omega t+\varphi_0$. המהירות של P משיקה למעגל, וגודלה ωA. התאוצה שלה פונה אל המרכז, וגודלה $\omega^2 A$ (נושא 5). ההיטלים על ציר x של הרדיוס, של המהירות ושל התאוצה של P הם המקום, המהירות והתאוצה של Q:

מקום, מהירות ותאוצה בתנועה הרמונית

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0) \qquad v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi_0) \qquad a=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi_0)=-\omega^2 x$$

בנוסחת התאוצה הכול מתחבר: התאוצה של ההיטל היא $a=-\omega^2 x$. זו בדיוק הצורה שהכוח המחזיר נותן, $a=-\frac{c}{m}x$. לכן גוף שפועל עליו כוח $F=-cx$ נע כמו ההיטל, עם $\omega^2=\frac{c}{m}$:

$$a_{\max}=\omega^2 A \qquad v_{\max}=\omega A \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} \qquad \omega=\sqrt{\frac{c}{m}}$$

לכל קבוע בנוסחה יש משמעות:

- **המשרעת** A היא המרחק הגדול ביותר מנקודת שיווי המשקל. היא נקבעת לפי האופן שבו הפעלנו את המערכת.
- **התדירות הזוויתית** ω נקבעת רק לפי c ו־m. היא לא תלויה במשרעת, ולכן גם זמן המחזור לא תלוי בה. בתנודה רחבה הגוף עובר דרך ארוכה יותר, אבל גם הכוח חזק יותר, ולכן הגוף מהיר יותר. שני האפקטים מתקזזים בדיוק.
- **המופע ההתחלתי** φ_0 הוא הזווית של P ברגע $t=0$. הוא נקבע לפי המקום והמהירות של הגוף ברגע שבו מתחילים למדוד זמן.

אותה תנועה אפשר לכתוב גם בעזרת sin, למשל $x=A\sin(\omega t+\varphi_0')$, עם מופע התחלתי אחר. בפרק 5 נראה איך בוחרים את הצורה הנוחה.

הדגמה בכיתה. גלגל מסתובב בקצב קבוע, ועל היקפו מוט קצר. מאירים עליו באלומה מקבילה, למשל מפנס רחוק, והצל של המוט נע על הקיר למעלה ולמטה. ליד הצל תולים משקולת על קפיץ, עם אותה משרעת ואותו זמן מחזור, ומשחררים אותה כשהצל בקצה. הצל והמשקולת נעים יחד, כגוף אחד.

© אור בן שטרית · אינסוף

דוגמה פתורה

שתי דוגמאות קצרות.

1. על גוף שמסתו $0.5\,\text{kg}$ פועל כוח שקול $F=-8x$ (בניוטון, כש־x במטרים). זו תנועה הרמונית עם $c=8\,\text{N/m}$, ולכן $\omega=\sqrt{\frac{8}{0.5}}=4\,\text{rad/s}$ ו־$T=\frac{2\pi}{4}\approx 1.57\,\text{s}$.
2. גוף מתנודד במשרעת $A=10\,\text{cm}$ ובזמן מחזור $T=2\,\text{s}$, ולכן $\omega=\pi\,\text{rad/s}$. ברגע $t=0$ הגוף בקצה החיובי, ולכן $\varphi_0=0$. ברגע $t=0.25\,\text{s}$ הזווית במעגל הייחוס היא $\theta=\frac{\pi}{4}$:

$$x=0.1\cos\tfrac{\pi}{4}\approx 0.0707\,\text{m}\qquad v=-\pi\cdot 0.1\sin\tfrac{\pi}{4}\approx -0.222\,\text{m/s}\qquad a=-\pi^2 x\approx -0.698\,\text{m/s}^2$$

בשפת הנגזרות

מכינה גוזרים את $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$ פעמיים לפי הזמן:

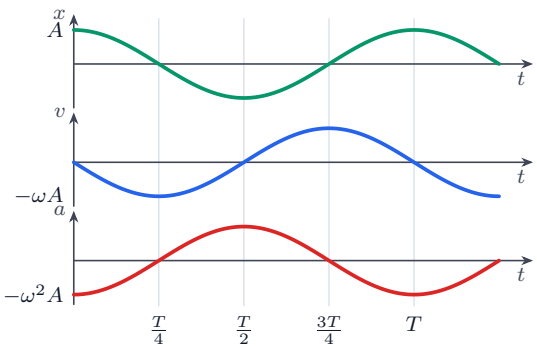
$$v=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi_0)\qquad a=\frac{dv}{dt}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi_0)=-\omega^2 x$$

הפונקציה מקיימת בכל רגע את משוואת התנועה $ma=-cx$, בתנאי ש־$\omega^2=\frac{c}{m}$. אפשר לבחור כל A וכל φ_0, ולכן אפשר להתאים את הפתרון לכל מקום התחלתי ולכל מהירות התחלתית: זה הפתרון הכללי.

בדקו את עצמכם

גוף מתנודד במשרעת $4\,\text{cm}$ ובתדירות $5\,\text{Hz}$. מה גודל המהירות המרבית שלו, ומה גודל התאוצה המרבית?

5 גרפים, משרעת ומופע התחלתי



הגרפים של המקום, המהירות והתאוצה הם גרפים של $\cos$ ו־$\sin$, עם אותו זמן מחזור. בשרטוט הגוף משוחרר ממנוחה ב־$x=A$. כדאי לזכור שלושה קשרים:

- המהירות היא השיפוע של גרף המקום. בקצוות השיפוע אפס, ובמרכז הוא הגדול ביותר.
- התאוצה תמיד מנוגדת בכיוונה למקום: $a=-\omega^2 x$. כשהגוף בצד החיובי, התאוצה שלילית, ולהפך.
- גרף המהירות "מקדים" את גרף המקום ברבע מחזור: כל מה שקורה למקום, קרה למהירות רבע מחזור קודם.

מקום	מהירות	תאוצה וכוח שקול
$x=\pm A$ (בקצוות)	$v=0$	מרביים: $a_{\max}=\omega^2 A$ ו־$F_{\max}=cA$, אל המרכז
$x=0$ (במרכז)	הגדולה ביותר: ωA	$a=0$, $F=0$

איזו נוסחה לבחור?

הנוסחה תלויה ברגע שבו מתחילים למדוד זמן. בשאלות של בגרות המצב ברגע $t=0$ הוא בדרך כלל אחד מאלה:

- הגוף משוחרר ממנוחה ב־$x=A$: $x=A\cos\omega t$. ממנוחה ב־$x=-A$: $x=-A\cos\omega t$.
- הגוף עובר בנקודת שיווי המשקל בכיוון החיובי: $x=A\sin\omega t$. בכיוון השלילי: $x=-A\sin\omega t$.

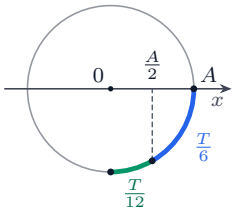
כשהגוף נמצא ברגע $t=0$ במקום x_0 ומהירותו v_0, המשרעת נקבעת לפי שניהם:

$$A^2=x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

© אור בן שטרית · אינסוף

את הקשר הזה נקבל משימור האנרגיה בפרק 6. במעגל הייחוס זה פשוט משפט פיתגורס: x_0 הוא ההיטל של הרדיוס על ציר x, ו־$\frac{|v_0|}{\omega}$ הוא גודל ההיטל שלו על הציר הניצב.

טריק הזמנים של מעגל הייחוס



כמה זמן לוקח לגוף להגיע מנקודת שיווי המשקל אל $x=\frac{A}{2}$? הנקודה P על מעגל הייחוס מסתובבת בקצב קבוע, ולכן הזמן פרופורציוני לזווית שהיא עוברת. מ־$x=0$ ועד $x=\frac{A}{2}$ היא עוברת $30°$, כלומר $\frac{1}{12}$ מהסיבוב. מ־$\frac{A}{2}$ ועד A היא עוברת $60°$, כלומר $\frac{1}{6}$ מהסיבוב. הגוף עובר את החצי הראשון של הדרך פי 2 מהר יותר מהחצי השני, כי ליד המרכז הוא מהיר, וליד הקצה הוא מאט.

מ־	0	0	0	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}A$
עד	$\frac{A}{2}$	A	A	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}A$
הזמן	$\frac{T}{12}$	$\frac{T}{8}$	$\frac{T}{6}$	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{6}$	$\frac{T}{2}$

דוגמה קטנה. $T=1.2\,\mathrm{s}$ ו־$A=10\,\mathrm{cm}$. מנקודת שיווי המשקל ועד $x=5\,\mathrm{cm}$ הגוף נע $\frac{T}{12}=0.1\,\mathrm{s}$, במהירות ממוצעת של $0.5\,\mathrm{m/s}$. משם ועד $x=10\,\mathrm{cm}$ הוא נע $\frac{T}{6}=0.2\,\mathrm{s}$, במהירות ממוצעת של $0.25\,\mathrm{m/s}$ בלבד.

בדקו את עצמכם

זמן המחזור של תנודה הוא $0.6\,\mathrm{s}$. כמה זמן לוקח לגוף לעבור ישירות מ־$x=-\frac{A}{2}$ אל $x=+\frac{A}{2}$?

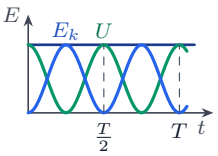
6 אנרגיה בתנועה הרמונית

הכוח $F=-cx$ הוא כוח משמר, כמו כוח הקפיץ בנושא 3, והאנרגיה הפוטנציאלית שלו היא $U=\frac{1}{2}cx^2$. כשאין חיכוך, האנרגיה המכנית נשמרת. בקצוות כל האנרגיה פוטנציאלית, ובמרכז כולה קינטית:

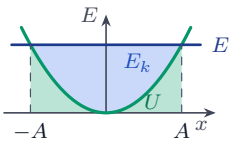
אנרגיה בתנועה הרמונית

$$v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2} \qquad E_k=\tfrac{1}{2}c\left(A^2-x^2\right) \qquad E=\tfrac{1}{2}mv^2+\tfrac{1}{2}cx^2=\tfrac{1}{2}cA^2=\tfrac{1}{2}mv_{\max}^2$$

האנרגיה הכוללת פרופורציונית לריבוע המשרעת: משרעת כפולה, אנרגיה פי 4.



אנרגיה לפי זמן



אנרגיה לפי מקום

בשרטוט הימני, הגרף של האנרגיה הפוטנציאלית הוא פרבולה, והגרף של האנרגיה הכוללת הוא קו אופקי. האנרגיה הקינטית היא הפער ביניהם. הגוף לא יכול לעבור את הנקודות שבהן $U=E$, והן הקצוות $\pm A$. האנרגיה הקינטית והאנרגיה הפוטנציאלית שוות כש־$\frac{1}{2}cx^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}cA^2$, כלומר ב־$x=\pm\frac{A}{\sqrt{2}}\approx\pm 0.71A$. בשרטוט השמאלי רואים את אותו הדבר לפי הזמן. האנרגיה הקינטית מגיעה לשיא פעמיים בכל מחזור, פעם בכל מעבר במרכז, ולכן זמן המחזור שלה הוא $\frac{T}{2}$.

את הקשר $A^2=x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$ מפרק 5 מקבלים מכאן: כותבים $\frac{1}{2}cA^2=\frac{1}{2}cx_0^2+\frac{1}{2}mv_0^2$, ומחלקים ב־$\frac{1}{2}c$.

© אור בן שטרית · אינסוף

דוגמה פתורה

קפיץ ואנרגיה. גוף שמסתו $0.5\,\text{kg}$ קשור לקפיץ שקבועו $50\,\text{N/m}$, ומתנודד במשרעת $10\,\text{cm}$ על משטח חלק. במקום $x = 6\,\text{cm}$:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.16}{0.5}} = 0.8\,\text{m/s} \qquad E_k = 0.16\,\text{J} \qquad U = \tfrac{1}{2} \cdot 50 \cdot 0.06^2 = 0.09\,\text{J} \qquad E = \tfrac{1}{2} \cdot 50 \cdot 0.1^2 = 0.25\,\text{J}$$

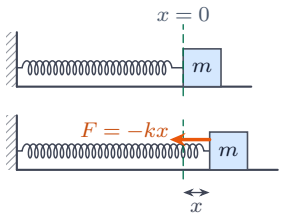
אותה תוצאה מתקבלת ישירות: $\omega = \sqrt{\frac{50}{0.5}} = 10\,\text{rad/s}$, ו־$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 10 \cdot \sqrt{0.1^2 - 0.06^2} = 0.8\,\text{m/s}$.

בדקו את עצמכם

באיזה מקום גודל המהירות של גוף מתנודד הוא חצי מהמהירות המרבית שלו? בטאו את התשובה בעזרת A.

7 גוף על קפיץ אופקי

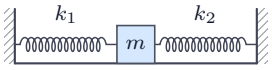
כשגוף קשור לקפיץ קל (שמסתו זניחה) על משטח אופקי חלק, הכוח השקול עליו הוא כוח הקפיץ, $F = -kx$. זה בדיוק כוח מחזיר עם $c = k$, ולכן:



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

גוף כבד יותר מאיץ לאט יותר, ולכן זמן המחזור שלו ארוך יותר. קפיץ קשיח יותר מפעיל כוח חזק יותר, ולכן זמן המחזור קצר יותר. זמן המחזור לא תלוי במשרעת, וגם לא ב־g: אותו גוף על אותו קפיץ יתנודד באותו קצב על הירח ובתחנת חלל.

מדידת מסה בחלל. בתחנת חלל מאזני אמבטיה מראים אפס, כי האסטרונאוט והמאזניים נופלים יחד ("חוסר משקל", נושא 6). איך בכל זאת מודדים את המסה של האסטרונאוט? בתחנות חלל השתמשו בכיסא שמחובר לקפיצים: מודדים את זמן המחזור של התנודה, מחשבים את המסה הכוללת לפי $m = \frac{kT^2}{4\pi^2}$, ומחסירים את המסה של הכיסא. השיטה עובדת, כי זמן המחזור תלוי במסה ולא בכבידה.



גוף בין שני קפיצים. גוף קשור לשני קפיצים, שהקצוות האחרים שלהם מחוברים לשני קירות, ובנקודת שיווי המשקל שני הקפיצים רפויים. כשהגוף זז ב־x ימינה, הקפיץ השמאלי נמתח ב־x ומושך אותו שמאלה. הקפיץ הימני מתכווץ ב־x, וגם הוא דוחף אותו שמאלה. לפי חוק הוק הכוח השקול הוא $F = -(k_1 + k_2)x$, כלומר $c = k_1 + k_2$. התוצאה נכונה גם כשהקפיצים מתוחים בשיווי המשקל, כי גם אז הכוח של כל קפיץ משתנה ב־$k_1 x$ או ב־$k_2 x$, אל נקודת שיווי המשקל.

דוגמה פתורה

גוף שמסתו $0.25\,\text{kg}$ קשור לקפיץ שקבועו $100\,\text{N/m}$. לכן $\omega = \sqrt{\frac{100}{0.25}} = 20\,\text{rad/s}$ ו־$T = \frac{2\pi}{20} \approx 0.314\,\text{s}$. אם מחליפים את הגוף בגוף כבד פי 4, זמן המחזור גדל פי $\sqrt{4} = 2$, ל־$0.628\,\text{s}$ בערך. אם מחברים את אותו גוף בין שני קפיצים כאלה, $c = 200\,\text{N/m}$, וזמן המחזור קטן פי $\sqrt{2}$, לכ־$0.222\,\text{s}$.

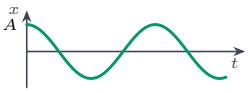
בדקו את עצמכם

גוף שמסתו $0.4\,\text{kg}$ קשור לקפיץ ומתנודד בזמן מחזור של $0.5\,\text{s}$. מה קבוע הקפיץ? מה יהיה זמן המחזור אם נחליף את הגוף בגוף שמסתו $1.6\,\text{kg}$?

מקרים גרפים, מעגל הייחוס ואנרגיה — 18 מקרים

בכל כרטיס: מצב אחד, המשוואה המרכזית שלו, ומה שכדאי לזכור. בגרפים: מקום בירוק, מהירות בכחול, תאוצה באדום. באנרגיה: U בירוק, E_k בכחול.

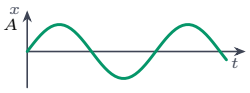
1 ממנוחה ב־$+A$



$$x = A\cos\omega t$$

מתחיל בקצה, והמופע ההתחלתי אפס

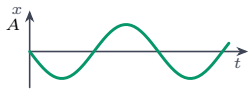
2 מהמרכז, בכיוון החיובי



$$x = A\sin\omega t$$

עובר בנקודת שיווי המשקל ועולה

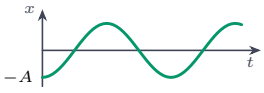
3 מהמרכז, בכיוון השלילי



$$x = -A\sin\omega t$$

עובר בנקודת שיווי המשקל וויורד

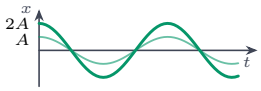
4 ממנוחה ב־$-A$



$$x = -A\cos\omega t$$

מתחיל בקצה השלילי

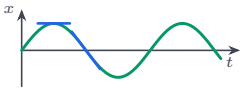
5 משרעת כפולה



$$T' = T \qquad E' = 4E$$

אותו זמן מחזור, ו־$v_{\max}$ גדלה פי 2

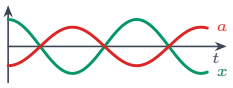
6 המהירות היא השיפוע



$$v_{\max} = \omega A$$

במרכז השיפוע הכי תלול, ובקצה הוא אפס

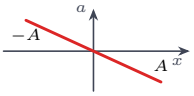
7 תאוצה מנוגדת למקום



$$a = -\omega^2 x$$

$a_{\max} = \omega^2 A$ בקצוות, ואפס במרכז

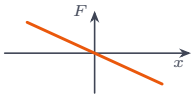
8 גרף תאוצה–מקום



$$\omega^2 = \frac{a_{\max}}{A}$$

קו ישר דרך הראשית, ששיפועו $-\omega^2$

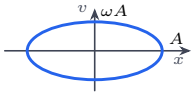
9 גרף כוח–מקום



$$F = -cx \qquad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

השיפוע הוא $-c$. בקפיץ $c = k$

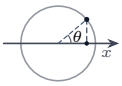
10 מהירות לפי מקום



$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

אליפסה: הכי מהיר במרכז, נעצר בקצוות

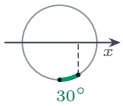
11 מעגל הייחוס



$$x = A\cos\theta \qquad \theta = \omega t + \varphi_0$$

הגוף נע כמו ההיטל של
נקודה שנעה על המעגל

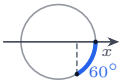
12 מהמרכז עד $\frac{A}{2}$



$$t = \frac{T}{12}$$

$30°$ במעגל הייחוס

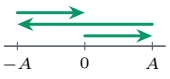
13 מ־$\frac{A}{2}$ עד הקצה



$$t = \frac{T}{6}$$

פי 2 מהזמן של החצי הראשון

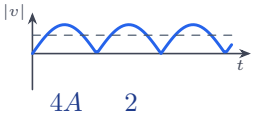
14 הדרך במחזור



$$d_T = 4A \qquad d_{T/2} = 2A$$

בכל חצי מחזור הדרך היא
$2A$, מכל נקודת התחלה

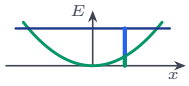
15 מהירות נסיעה ממוצעת



$$\frac{4A}{T} = \frac{2}{\pi}\,v_{\max}$$

והמהירות הממוצעת
במחזור שלם: אפס $\frac{\Delta x}{\Delta t}$

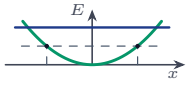
16 אנרגיה לפי מקום



$$E = \tfrac{1}{2}cA^2 \qquad E_k = E - U$$

הפער בין הקו לפרבולה הוא E_k

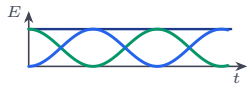
17 $E_k = U$



$$x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}} \approx \pm 0.71A$$

שם כל אחת מהן חצי מהאנרגיה

18 אנרגיה לפי זמן



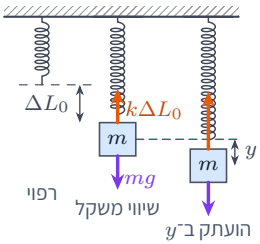
$$T_{E_k} = \frac{T}{2}$$

E_k ו־U מתחלפות, והסכום קבוע

8 גוף על קפיץ אנכי

כשתולים גוף על קפיץ אנכי, הקפיץ נמתח עד שכוח הקפיץ מאזן את המשקל. זו **נקודת שיווי המשקל** של המערכת, והיא נמוכה מהנקודה שבה הקפיץ רפוי:

$$k\,\Delta L_0 = mg \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta L_0 = \frac{mg}{k}$$



נמדוד את המקום y מנקודת שיווי המשקל, והכיוון החיובי כלפי מטה. כשהגוף נמצא ב־y, הקפיץ מתוח ב־$\Delta L_0 + y$. לכן הוא מפעיל כוח $k(\Delta L_0 + y)$ כלפי מעלה, והמשקל mg פועל כלפי מטה. הכוח השקול:

$$F = mg - k(\Delta L_0 + y) = -ky$$

המשקל "נעלם" מהמשוואה: כל מה שהוא עשה הוא להזיז את נקודת שיווי המשקל. הגוף מתנודד סביב הנקודה החדשה, ו־$c = k$, בדיוק כמו בקפיץ אופקי. זמן המחזור אפילו מתקבל מהמתיחה בשיווי משקל בלבד:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta L_0}{g}}$$

שני מרחקים שונים

ההתארכות מהמצב הרפוי, $\Delta L_0 + y$, קובעת את כוח הקפיץ. ההעתק מנקודת שיווי המשקל, y, קובע את הכוח השקול. מי שמציב בנוסחה $F = -ky$ את ההתארכות מהמצב הרפוי, מקבל תשובה שגויה.

אנרגיה בקפיץ אנכי: שתי דרכים. אפשר לכתוב את שימור האנרגיה בשתי דרכים, והן נותנות אותה תוצאה:

א. **כל אנרגיה בנפרד:** $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}k\,\Delta L^2$, כאשר ΔL היא ההתארכות מהמצב הרפוי, ו־h הגובה מעל נקודת ייחוס כלשהי.

ב. **ביטוי אחד:** $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2$, כאשר y הוא ההעתק מנקודת שיווי המשקל. הביטוי $\frac{1}{2}ky^2$ כולל את האנרגיה הכובדית ואת האנרגיה האלסטית יחד (עד כדי קבוע, שלא משנה את ההפרשים).

דוגמה פתורה

שתי הדרכים בפעולה. גוף שמסתו $0.2\,\text{kg}$ תלוי על קפיץ שקבועו $20\,\text{N/m}$, ולכן $\Delta L_0 = \frac{0.2\cdot 10}{20} = 0.1\,\text{m}$. מחזיקים את הגוף בגובה שבו הקפיץ רפוי, ומשחררים אותו ממנוחה. המשרעת היא $0.1\,\text{m}$, כי הגוף מתחיל במרחק $0.1\,\text{m}$ מנקודת שיווי המשקל, במנוחה. מה מהירותו כשהוא עובר בנקודת שיווי המשקל?

- דרך א: הגוף ירד $0.1\,\text{m}$, והקפיץ נמתח מאפס ל־$0.1\,\text{m}$. לכן $\frac{1}{2}mv^2 = mg\cdot 0.1 - \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 0.1^2 = 0.2 - 0.1 = 0.1\,\text{J}$, ו־$v = 1\,\text{m/s}$.
- דרך ב: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 0.1^2 = 0.1\,\text{J}$, ושוב $v = 1\,\text{m/s}$. בדיקה: $\omega = \sqrt{\frac{20}{0.2}} = 10\,\text{rad/s}$, ו־$v_{\max} = \omega A = 1\,\text{m/s}$.

מכונית על קפיצים. ארבעה נוסעים, עם מסה כוללת של $300\,\text{kg}$, נכנסים למכונית, והיא שוקעת ב־$2.5\,\text{cm}$. לכן קבוע הקפיצים של המכונית הוא $k = \frac{3000}{0.025} = 1.2\times 10^5\,\text{N/m}$. המסה של המכונית עם הנוסעים היא $1500\,\text{kg}$, ולכן $T = 2\pi\sqrt{\frac{1500}{1.2\times 10^5}} \approx 0.70\,\text{s}$.

אותה תוצאה מקבלים מהשקיעה הכוללת של המכונית מהמצב הרפוי, $\frac{mg}{k} = 0.125\,\text{m}$: $T = 2\pi\sqrt{\frac{0.125}{10}} \approx 0.70\,\text{s}$.

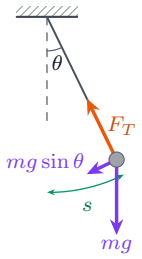
שתי הערות. אם המשרעת גדולה מ־ΔL_0, בנקודה העליונה הקפיץ מתכווץ. קפיץ מתכת ממשיך לפעול כרגיל, אבל גומייה או חוט נרפים, והתנועה מפסיקה להיות הרמונית. ובקפיץ על מדרון חלק קורה אותו דבר כמו בקפיץ אנכי: נקודת שיווי המשקל זזה ב־$\frac{mg\sin\alpha}{k}$, וזמן המחזור נשאר $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

בדקו את עצמכם

גוף שמסתו $0.5\,\text{kg}$ תלוי על קפיץ אנכי, ומותח אותו ב־$20\,\text{cm}$ בשיווי משקל. מה זמן המחזור של התנודות שלו?

© אור בן שטרית · אינסוף

9 מטוטלת פשוטה



מטוטלת פשוטה היא גוף קטן, כמעט נקודתי, שתלוי על חוט קל באורך L. כשהחוט יוצר זווית θ עם האנך, המתיחה ניצבת למסלול, והרכיב המשיקי של המשקל, $mg\sin\theta$, מחזיר את הגוף אל הנקודה הנמוכה (נושא 5). נמדוד את המקום לאורך הקשת: $s = L\theta$, כש־θ ברדיאנים. בזוויות קטנות $\sin\theta \approx \theta$, ולכן הכוח המחזיר הוא

$$F = -mg\sin\theta \approx -mg\,\theta = -\frac{mg}{L}\,s$$

זה כוח מחזיר עם $c = \frac{mg}{L}$.

מטוטלת פשוטה (בזוויות קטנות)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

- **המסה מצטמצמת.** גוף כבד וגוף קל על חוטים באותו אורך מתנודדים יחד, כמו שגופים כבדים וקלים נופלים יחד (נושא 1).
- **זמן המחזור תלוי באורך ובתאוצת הנפילה.** מטוטלת ארוכה פי 4 איטית פי 2. על הירח, שם $g = 1.6\,\mathrm{m/s^2}$, אותה מטוטלת איטית פי $\sqrt{\frac{10}{1.6}} = 2.5$. מטוטלת שזמן המחזור שלה $2\,\mathrm{s}$ צריכה להיות באורך $L = \frac{gT^2}{4\pi^2} \approx 1.01\,\mathrm{m}$.
- **תדירות זוויתית ומהירות זוויתית.** במטוטלת שאורכה $0.9\,\mathrm{m}$, $\omega = \sqrt{\frac{10}{0.9}} \approx 3.33\,\mathrm{rad/s}$. אם המשרעת היא $\theta_0 = 0.1\,\mathrm{rad}$, החוט מסתובב בקצב שמשתנה כל הזמן: מאפס בקצוות ועד $\theta_0\omega \approx 0.333\,\mathrm{rad/s}$ בנקודה הנמוכה. התדירות הזוויתית של התנודה, $3.33\,\mathrm{rad/s}$, קבועה. המהירות המרבית של הגוף היא $L\theta_0\omega = 0.3\,\mathrm{m/s}$.

עד איזו זווית הקירוב טוב? בטבלה: היחס $\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}$ (כש־θ_0 ברדיאנים), ויחס זמן המחזור האמיתי לזמן המחזור שבנוסחה, $\frac{T}{T_0}$. עד כ־$15°$ זמן המחזור ארוך רק בפחות מחצי אחוז, ובזווית של $60°$ הוא ארוך כבר ב־7%. בזוויות גדולות הכוח המחזיר $mg\sin\theta$ קטן מ־$mg\theta$, ולכן הגוף חוזר לאט יותר.

θ_0	$\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}$	$\frac{T}{T_0}$
$5°$	0.9987	1.0005
$10°$	0.9949	1.0019
$15°$	0.9886	1.0043
$30°$	0.9549	1.0174
$60°$	0.8270	1.0732
$90°$	0.6366	1.1803

מטוטלת במערכת מאיצה. במעלית שמאיצה כלפי מעלה בתאוצה a, המטוטלת "מרגישה" תאוצת נפילה $g + a$, ובמעלית שמאיצה כלפי מטה, $g - a$ (כש־$a < g$). זה הטריק של g אפקטיבי מנושא 2. במכונית שמאיצה אופקית, $g_{\text{eff}} = \sqrt{g^2 + a^2}$, ובשיווי משקל החוט נוטה לאחור. בכל המקרים $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{\text{eff}}}}$. בנפילה חופשית ובתחנת חלל $g_{\text{eff}} = 0$, והמטוטלת לא מתנודדת כלל. קפיץ, לעומת זאת, ממשיך להתנודד שם כרגיל.

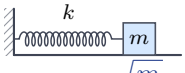
בדקו את עצמכם

אסטרונאוטית על הירח ($g = 1.6\,\mathrm{m/s^2}$) תולה משקולת על חוט שאורכו $0.4\,\mathrm{m}$. מה זמן המחזור של המטוטלת? מה יהיה זמן המחזור של אותה מטוטלת על כדור הארץ?

מקרים קפיצים ומטוטלות – 18 מקרים

בכל כרטיס: מצב אחד, המשוואה המרכזית שלו, ומה שכדאי לזכור. $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

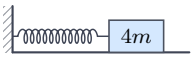
1 קפיץ אופקי



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

לא תלוי במשרעת, וגם לא ב־g

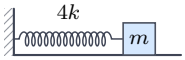
2 מסה פי 4



$$m' = 4m \;\Rightarrow\; T' = 2T$$

גוף כבד יותר מאיץ לאט יותר

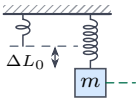
3 קפיץ קשיח פי 4



$$k' = 4k \;\Rightarrow\; T' = \frac{T}{2}$$

כוח חזק יותר, תנודה מהירה יותר

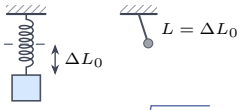
4 קפיץ אנכי



$$\Delta L_0 = \frac{mg}{k} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

אותו T, סביב נקודת
שיווי משקל נמוכה יותר

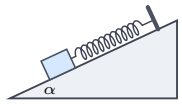
5 כמו מטוטלת באורך ΔL_0



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta L_0}{g}}$$

מספיק לדעת את המתיחה בשיווי משקל

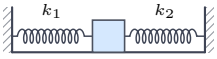
6 קפיץ על מדרון חלק



$$\Delta L_0 = \frac{mg\sin\alpha}{k}$$

זמן המחזור לא תלוי בשיפוע

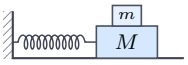
7 גוף בין שני קפיצים



$$c = k_1 + k_2$$

שני הקפיצים מחזירים אל המרכז

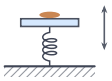
8 גוף על גוף



$$A_{\max} = \frac{\mu_s\, g}{\omega^2} \qquad \omega^2 = \frac{k}{M+m}$$

החיכוך הסטטי מאיץ את
הגוף העליון (מכינה)

9 מטבע על משטח מתנודד



$$\omega^2 A \le g$$

אחרת המטבע מתנתק בחלק העליון

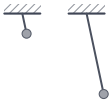
10 מטוטלת פשוטה



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

בזוויות קטנות, ולא תלוי במסה

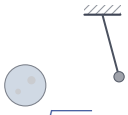
11 חוט ארוך פי 4



$$L' = 4L \;\Rightarrow\; T' = 2T$$

T פרופורציוני ל־$\sqrt{L}$

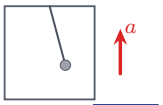
12 על הירח



$$T' = T\sqrt{\frac{10}{1.6}} = 2.5\,T$$

תאוצת נפילה קטנה, תנודה איטית

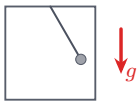
13 מעלית שמאיצה למעלה



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}}$$

כלפי מעלה מהיר יותר, כלפי מטה איטי יותר

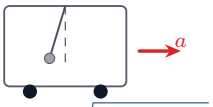
14 נפילה חופשית



$$g_{\text{eff}} = 0$$

המטוטלת לא מתנודדת. קפיץ כן

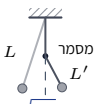
15 מכונית שמאיצה



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\sqrt{g^2+a^2}}}$$

בשיווי משקל החוט נוטה לאחור

16 מטוטלת ומסמר



$$T = \pi\sqrt{\frac{L}{g}} + \pi\sqrt{\frac{L'}{g}}$$

חצי מחזור בכל צד

17 משרעת גדולה



$$\theta_0 = 60^\circ: \quad T \approx 1.07\,T_0$$

ולכן איטי יותר, $mg\sin\theta < mg\theta$

18 מהירות זוויתית של החוט

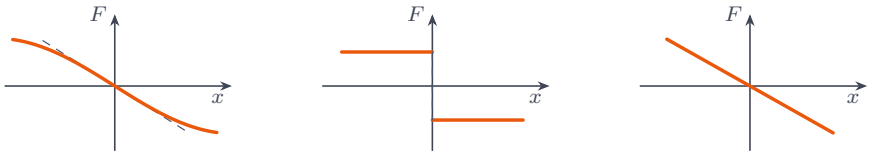


$$\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)_{\max} = \theta_0\,\omega$$

ω של התנודה קבועה. θ_0 ברדיאנים.

10 הרמונית או לא?

תנודה היא הרמונית רק כשהכוח השקול פרופורציוני להעתק מנקודת שיווי המשקל ומכוון אליה. בגרף של כוח לפי מקום רואים את זה מיד: בתנועה הרמונית הגרף הוא קו ישר שעובר בראשית, עם שיפוע שלילי, וכל צורה אחרת אינה הרמונית. כדאי להשוות בין שלושה מקרים:



קפיץ: הרמונית | שוקת בצורת V: לא הרמונית | מטוטלת: הרמונית רק ליד המרכז

- **קפיץ:** הכוח $-kx$ יוצר תנועה הרמונית בכל משרעת (כל עוד חוק הוק תקף).
- **גוף קטן שמחליק בשוקת בצורת** V (שני מדרונות חלקים, ותחתית מעוגלת מעט): הכוח קבוע בגודלו ומכוון אל המרכז, אבל לא תלוי במרחק. זמן המחזור גדל עם המשרעת, ולכן התנודה לא הרמונית, גם כשהמשרעת קטנה.
- **מטוטלת:** הגרף הוא $-mg\sin\theta$. רחוק מהמרכז הוא מתעקם, אבל ליד המרכז הוא כמעט ישר, כמו הקו המקווקו. לכן תנודות קטנות של מטוטלת הן הרמוניות בקירוב טוב.

ברוב המערכות, קרוב מספיק לנקודת שיווי המשקל, הגרף כמעט ישר, ולכן תנודות קטנות הן הרמוניות בקירוב. אבל לא תמיד: בשוקת בצורת V הכוח לא קטן כשמתקרבים למרכז.

בשפת האנרגיה

מכינה ליד נקודת מינימום x_0 של גרף האנרגיה הפוטנציאלית, הגרף נראה כמו פרבולה: $U\approx U_0+\frac{1}{2}c\,(x-x_0)^2$, ו־$c$ הוא הנגזרת השנייה של U בנקודה הזו (כי $F=-\frac{dU}{dx}$, נושא 3). למשל, ל־$U=x^3-6x^2+9x$ (בג׳אול, כש־x במטרים) יש מינימום ב־$x_0=3\,\mathrm{m}$, ושם $U''=6x_0-12=6\,\mathrm{N/m}$. גוף שמסתו $0.5\,\mathrm{kg}$ יתנודד סביב הנקודה הזו בזמן מחזור $2\pi\sqrt{\frac{0.5}{6}}\approx 1.81\,\mathrm{s}$, כל עוד המשרעת קטנה.

בדקו את עצמכם

כדור קופץ על רצפה בלי אובדן אנרגיה, ובכל פעם עולה לאותו גובה. מה זמן המחזור של התנועה כשהגובה הוא $1.25\,\mathrm{m}$, ומה כשהגובה $5\,\mathrm{m}$? האם התנועה הרמונית?

11 שאלות משולבות: התנגשות ואחריה תנודה

שאלות רבות בבגרות משלבות תנודה עם נושאים קודמים. בדרך כלל יש בהן שלושה שלבים, ובכל שלב משתמשים בחוק אחר:

לפני: נפילה או זריקה
שימור אנרגיה, קינמטיקה

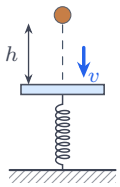
←

ההתנגשות: קצרה מאוד
שימור תנע

←

אחרי: תנודה
מסה חדשה, שיווי משקל חדש

דוגמה פתורה



מגש שמסתו $0.3\,\text{kg}$ מונח על קפיץ אנכי שקבועו $40\,\text{N/m}$, ונמצא בשיווי משקל. גוש פלסטלינה שמסתו $0.1\,\text{kg}$ משוחרר ממנוחה בגובה $45\,\text{cm}$ מעל המגש, נופל עליו ונדבק אליו. מה המשרעת של התנודות, ומה זמן המחזור שלהן?

1. **הנפילה (שימור אנרגיה):** רגע לפני הפגיעה $v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 10\cdot 0.45}=3\,\text{m/s}$.
2. **ההתנגשות (שימור תנע):** ההתנגשות קצרה מאוד, ולכן המתקף של המשקל ושל כוח הקפיץ בזמן הזה זניח: $0.1\cdot 3=0.4\,v'$, ו־$v'=0.75\,\text{m/s}$ כלפי מטה.
3. **התנודה:** המסה החדשה $0.4\,\text{kg}$, ולכן $\omega'=\sqrt{\frac{40}{0.4}}=10\,\text{rad/s}$ ו־$T'=\frac{2\pi}{10}\approx 0.63\,\text{s}$. נקודת שיווי המשקל החדשה נמוכה יותר ב־$\frac{mg}{k}=\frac{0.1\cdot 10}{40}=2.5\,\text{cm}$. לכן מיד אחרי ההתנגשות המערכת נמצאת $2.5\,\text{cm}$ מעל נקודת שיווי המשקל החדשה, ונעה כלפי מטה במהירות $0.75\,\text{m/s}$:

$$A'=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega'}\right)^2}=\sqrt{0.025^2+0.075^2}\approx 0.079\,\text{m}$$

המשרעת קטנה מהכיווץ של הקפיץ בנקודת שיווי המשקל החדשה, $\frac{0.4\cdot 10}{40}=0.1\,\text{m}$, ולכן הקפיץ נשאר מכווץ כל הזמן, והמגש לא מתנתק ממנו.

בהתנגשות עצמה אבדה אנרגיה קינטית: $\frac{1}{2}\cdot 0.1\cdot 3^2-\frac{1}{2}\cdot 0.4\cdot 0.75^2\approx 0.34\,\text{J}$. לכן אי אפשר לכתוב שימור אנרגיה אחד מתחילת הנפילה ועד הנקודה הנמוכה. כותבים שימור אנרגיה רק לפני ההתנגשות ורק אחריה.

בדקו את עצמכם

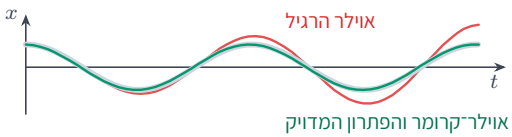
קליע שמסתו $10\,\text{g}$ נע אופקית, לאורך ציר הקפיץ, במהירות $100\,\text{m/s}$. הוא פוגע בגוש שמסתו $0.99\,\text{kg}$ ונתקע בו. הגוש נח בנקודת שיווי המשקל של קפיץ אופקי שקבועו $100\,\text{N/m}$, על משטח חלק. מה המשרעת של התנודות?

12 פתרון בגיליון אלקטרוני

את משוואת התנועה $a=-\frac{c}{m}x$ אפשר לפתור גם בגיליון אלקטרוני, צעד אחר צעד, בפרקי זמן קטנים Δt. בכל שורה מחשבים את התאוצה לפי המקום, מעדכנים את המהירות, ואז את המקום:

$$a_n=-\frac{c}{m}\,x_n$$
$$v_{n+1}=v_n+a_n\,\Delta t$$
$$x_{n+1}=x_n+v_{n+1}\,\Delta t$$

שימו לב לסדר: את המקום מעדכנים עם המהירות החדשה. זו שיטת **אוילר־קרומר**. אם מעדכנים את המקום עם המהירות הישנה (שיטת אוילר "הרגילה"), המשרעת גדלה ממחזור למחזור, והאנרגיה "נוצרת יש מאין". בשרטוט, אחרי שני מחזורים, השיטה הרגילה כבר כמעט הכפילה את המשרעת, ואוילר־קרומר נשארת צמודה לפתרון המדויק.



n	$t\,(\text{s})$	$x\,(\text{m})$	$v\,(\text{m/s})$	$a\,(\text{m/s}^2)$	מדויק
0	0	0.1	0	−0.4	0.1
1	0.05	0.099	−0.02	−0.396	0.0995
2	0.10	0.0970	−0.0398	−0.388	0.0980
3	0.15	0.0940	−0.0592	−0.376	0.0955

בטבלה: $\frac{c}{m}=4\,\text{s}^{-2}$ (כלומר $\omega=2\,\text{rad/s}$ ו־$T=\pi\,\text{s}$), $x_0=0.1\,\text{m}$, $v_0=0$ ו־$\Delta t=0.05\,\text{s}$. בעמודה האחרונה: $0.1\cos 2t$. ככל ש־Δt קטן יותר, הפתרון המספרי קרוב יותר למדויק.

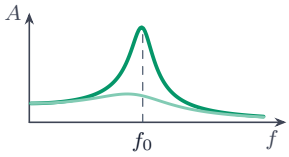
בדקו את עצמכם

המשיכו את הטבלה בשורה אחת: מה המהירות והמקום בשורה $n=4$, ומה הערך המדויק של המקום ברגע $t=0.2\,\text{s}$?

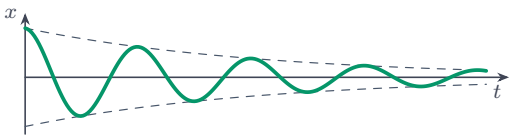
© אור בן שטרית · אינסוף

13 ריסון ותהודה

מכינה במציאות תמיד יש חיכוך או התנגדות אוויר (נושא 2), ולכן התנודות **דועכות**: המשרעת קטנה עם הזמן, והאנרגיה המכנית הופכת לאנרגיה פנימית. אלה **תנודות מרוסנות**. בריסון חלש הגוף ממשיך להתנודד, והמשרעת קטנה בהדרגה. בריסון חזק הוא חוזר לאט לנקודת שיווי המשקל, בלי לחצות אותה. בולמי הזעזועים במכונית מרסנים את הקפיצים, כדי שאחרי מהמורה המכונית תחזור למקומה בלי להמשיך לקפץ.



תהודה: המשרעת לפי תדירות הדחיפה



ריסון חלש: המשרעת דועכת

כשמפעילים על מערכת כוח מחזורי, למשל דוחפים נדנדה, היא מתנודדת בתדירות של הכוח. אלה **תנודות מאולצות**. כשתדירות הדחיפה שווה לתדירות הטבעית של המערכת, $f_0 = \frac{1}{T}$, המשרעת גדלה מאוד. זו **תהודה**: כך ילד בנדנדה עולה גבוה בעזרת דחיפות קטנות בזמן הנכון, ומכונת כביסה רועדת חזק במהירות סחיטה מסוימת. ככל שהריסון חלש יותר, השיא חד וגבוה יותר (הקו הכהה בשרטוט). גשר המילניום בלונדון נסגר יומיים אחרי שנפתח, ב־2000, כי צעדים של הולכי רגל הגבירו את התנודות הצידיות שלו. הוא נפתח מחדש ב־2002, אחרי שהותקנו בו בולמים.

14 עשרה טיפים שחוסכים נקודות

1. מזהים לפי הכוח. מראים שהכוח השקול הוא $F = -cx$, עם c חיובי ו־x מנקודת שיווי המשקל. משם $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

2. המשרעת לא משנה את הקצב. T תלוי רק ב־m וב־c. משרעת כפולה: אותו T, מהירות מרבית כפולה ואנרגיה פי 4.

3. בוחרים נוסחה לפי הרגע $t = 0$. שוחרר ממנוחה בקצה: $\cos$. עבר במרכז: $\sin$. הסימן לפי הקצה (ב־$\cos$) או לפי כיוון התנועה (ב־$\sin$).

4. קצוות מול מרכז. בקצוות: $v = 0$, ותאוצה וכוח מרביים. במרכז: מהירות מרבית, ותאוצה וכוח אפס.

5. זמנים בעזרת מעגל הייחוס. הזמן פרופורציוני לזווית: מהמרכז עד $\frac{A}{2}$ לוקח $\frac{T}{12}$, ומשם עד הקצה $\frac{T}{6}$.

6. קפיץ אנכי: מודדים מנקודת שיווי המשקל. אותו T כמו בקפיץ אופקי, ו־$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta L_0}{g}}$.

7. שלוש צורות לאותה אנרגיה. $\frac{1}{2}cA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}mv^2$. בוחרים את הצורה שמתאימה לנתונים.

8. מטוטלת: זוויות קטנות ו־g_{eff}. המסה לא משנה. במעלית או במכונית מאיצה מחליפים את g ב־g_{eff}.

9. התנגשות? קודם תנע. בהתנגשות הקצרה משתמשים בשימור תנע. אחריה מחשבים מסה חדשה ונקודת שיווי משקל חדשה, ואז $A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$.

10. רדיאנים ו־2π. כשמציבים ωt, המחשבון צריך להיות ברדיאנים. התדירות הזוויתית ω (ב־rad/s) גדולה פי 2π מהתדירות f (ב־Hz).

© אור בן שטרית · אינסוף

15 טעויות נפוצות

שמונה טעויות שחוזרות בכל מבחן

1. מבלבלים בין ω ל־f, ושוכחים את 2π.
2. מציבים ωt במחשבון שמכוון למעלות.
3. בקפיץ אנכי מציבים בכוח השקול את ההתארכות מהמצב הרפוי, במקום את ההעתק מנקודת שיווי המשקל.
4. חושבים שזמן המחזור תלוי במשרעת, או שזמן המחזור של קפיץ תלוי ב־g.
5. חושבים ש"מטוטלת כבדה מתנודדת לאט יותר" (המסה מצטמצמת), או משתמשים בנוסחת המטוטלת גם בזוויות גדולות.
6. "התאוצה הכי גדולה במרכז, כי שם המהירות הכי גדולה." במרכז התאוצה אפס.
7. בהתנגשות משתמשים בשימור אנרגיה במקום בשימור תנע, או מניחים שהמשרעת לא השתנתה.
8. מבלבלים בין התדירות הזוויתית של התנודה למהירות הזוויתית של החוט במטוטלת.

16 תשובות לתיבות "בדקו את עצמכם"

- **פרק 2:** $T = \frac{60}{72} \approx 0.833\,\text{s}$, $f = 1.2\,\text{Hz}$ ו־$\omega = 2\pi \cdot 1.2 \approx 7.54\,\text{rad/s}$.
- **פרק 3:** כן, הגרף קו ישר דרך הראשית עם שיפוע שלילי. $c = \frac{2}{0.1} = 20\,\text{N/m}$, ו־$a = -\frac{20}{0.2} \cdot 0.05 = -5\,\text{m/s}^2$, כלומר $5\,\text{m/s}^2$ אל נקודת שיווי המשקל.
- **פרק 4:** $\omega = 2\pi \cdot 5 \approx 31.4\,\text{rad/s}$, ולכן $v_{\max} = \omega A \approx 1.26\,\text{m/s}$ ו־$a_{\max} = \omega^2 A \approx 39.5\,\text{m/s}^2$.
- **פרק 5:** $\frac{T}{12} + \frac{T}{12} = \frac{T}{6} = 0.1\,\text{s}$.
- **פרק 6:** $\omega\sqrt{A^2 - x^2} = \frac{1}{2}\omega A$, ולכן $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A \approx \pm 0.87A$.
- **פרק 7:** $k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0.4}{0.5^2} \approx 63.2\,\text{N/m}$. מסה פי 4, ולכן זמן המחזור גדל פי 2, ל־$1.0\,\text{s}$.
- **פרק 8:** $T = 2\pi\sqrt{\frac{0.2}{10}} \approx 0.89\,\text{s}$. לא צריך את המסה.
- **פרק 9:** על הירח $T = 2\pi\sqrt{\frac{0.4}{1.6}} = \pi \approx 3.14\,\text{s}$. על כדור הארץ $T = 2\pi\sqrt{\frac{0.4}{10}} \approx 1.26\,\text{s}$.
- **פרק 10:** $T = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$: $1\,\text{s}$ מגובה $1.25\,\text{m}$, ו־$2\,\text{s}$ מגובה $5\,\text{m}$. זמן המחזור תלוי במשרעת, ולכן התנועה לא הרמונית.
- **פרק 11:** $v' = \frac{0.01 \cdot 100}{1.0} = 1\,\text{m/s}$ ו־$\omega = \sqrt{\frac{100}{1.0}} = 10\,\text{rad/s}$, ולכן $A = \frac{v'}{\omega} = 0.1\,\text{m}$.
- **פרק 12:** $v_4 \approx -0.0780\,\text{m/s}$ ו־$x_4 \approx 0.0901\,\text{m}$. הערך המדויק: $0.1\cos 0.4 \approx 0.0921\,\text{m}$.

ומה עכשיו? עברו לקובץ התרגילים של הנושא: 15 שאלות, מהבסיס ועד שאלות אתגר, עם תשובות סופיות בסוף. הנושא הבא בסדרה הוא **גז אידיאלי**.

17 דף הנוסחאות של הנושא

תנועה הרמונית פשוטה בעמוד אחד

תנועה מחזורית
$f = \frac{1}{T}$ $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

כוח מחזיר
$F = -c\,x$ $a = -\frac{c}{m}\,x = -\omega^2 x$ x מנקודת שיווי המשקל

תדירות זוויתית וזמן מחזור
$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$ לא תלויים במשרעת

מקום, מהירות ותאוצה
$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ $v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$
$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0)$

ערכים מרביים
$v_{\max} = \omega A$ במרכז $a_{\max} = \omega^2 A$ בקצוות

מהירות לפי מקום
$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$ משרעת לפי תנאי ההתחלה: $A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$

אנרגיה
$E = \frac{1}{2}cA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$ $U = \frac{1}{2}cx^2$ $E_k = \frac{1}{2}c\left(A^2 - x^2\right)$

קפיץ
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ גוף בין שני קפיצים: $c = k_1 + k_2$

קפיץ אנכי
$\Delta L_0 = \frac{mg}{k}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta L_0}{g}}$ מודדים מנקודת שיווי המשקל החדשה

מטוטלת פשוטה
$c = \frac{mg}{L}$ בזוויות קטנות $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ במערכת מאיצה: g_{eff}

זמנים במעגל הייחוס
מהמרכז עד $\frac{A}{2}$: $\frac{T}{12}$ מ־$\frac{A}{2}$ עד הקצה: $\frac{T}{6}$ מהמרכז עד הקצה: $\frac{T}{4}$

אוילר־קרומר
$v_{n+1} = v_n + a_n\Delta t$ $x_{n+1} = x_n + v_{n+1}\Delta t$

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את הקובץ בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אסור להעתיק ממנו תרגילים או איורים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות בלי אישור בכתב.
הקובץ נכתב בידי אינסוף ואינו פרסום רשמי של משרד החינוך או של גוף אחר.