כבידה

אינסוף
פיזיקה • מכניקה

קובץ הסבר • חוקי קפלר, חוק הכבידה, שדה הכבידה, לוויינים ומהירות מילוט

כיתה י״א | 5 יח״ל | מכינה קדם־אקדמית

מה תמצאו כאן?
הכוח שמפיל תפוח מהעץ הוא אותו כוח שמחזיק את הירח במסלולו ואת כדור הארץ סביב השמש. בנושא הזה נלך בדרך שבה התגלה הרעיון: מהתצפיות של האסטרונומים ומשלושת החוקים של קפלר, אל חוק הכבידה של ניוטון ואל הניסוי של קבנדיש. אחר כך נתאר את הכבידה בעזרת שדה, ננתח לוויינים במסלולים מעגליים, ונחשב אנרגיה בשדה הכבידה, אנרגיית קשר ומהירות מילוט. שני עמודי ״מקרים״ מרכזים 36 מצבים: 18 של כוח ושדה, ו־18 של לוויינים, מסלולים ואנרגיה. אחרי הקובץ הזה מחכה לכם קובץ של 15 תרגילים באותו נושא.

מה כדאי לדעת קודם? חיבור וקטורים (נושא 1), חוקי ניוטון (נושא 2), עבודה ואנרגיה (נושא 3), ובעיקר תנועה מעגלית (נושא 5). בפרק 7 נזכיר גם את מרכז המסה, ונסביר שם בקצרה מהו.

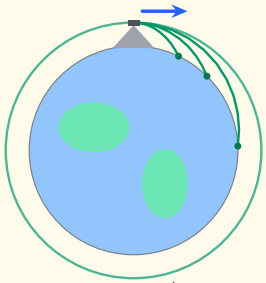
צבעי החצים: כוח הכבידה ושדה הכבידה בסגול →, מהירות בכחול →, תאוצה באדום →, כוחות אחרים בכתום →.

נתונים וסימון: $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$. לכדור הארץ מסה של $6.0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ ורדיוס של $6.4 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$, ומהם מתקבלת תאוצת הנפילה על פני הארץ, $g_0 \approx 9.8\,\mathrm{m/s^2}$. בנושא הזה נשתמש בערך הזה, ולא בערך 10. M היא המסה של הגוף המרכזי, m המסה של הגוף שנמשך אליו, R הרדיוס של כוכב, r המרחק ממרכזו, ו־T זמן מחזור.

1 הרעיון הגדול: התפוח, הירח והתותח של ניוטון

בגובה העיניים

דמיינו תותח על פסגת הר גבוה מאוד, מעל לאטמוספרה. כדור שנורה אופקית נופל ונוחת במרחק מסוים. במהירות גדולה יותר הוא נוחת רחוק יותר, אבל כדור הארץ עגול, והקרקע ״מתעקלת״ ומתרחקת מתחת לכדור. במהירות מתאימה הכדור נופל כל הזמן, ובכל זאת לעולם לא פוגע בקרקע: הוא **מקיף** את כדור הארץ. זה הרעיון של ניוטון: הירח הוא ״כדור תותח״ שנופל אל כדור הארץ כל הזמן, ואותו כוח שמפיל תפוח מהעץ מכופף גם את המסלול של הירח.



ככל שהמהירות גדולה יותר, הכדור נוחת רחוק יותר.
במהירות המתאימה: מסלול מעגלי, בלי נחיתה.

חישוב קטן. אילו לא היו הר ואוויר, כדור שנורה אופקית ממש מעל פני הקרקע היה מקיף את כדור הארץ כשכוח הכבידה משמש לו ככוח מרכזי (נושא 5): $mg_0 = m\frac{v^2}{R}$, ולכן $v = \sqrt{g_0 R} = \sqrt{9.8 \cdot 6.4 \times 10^6} \approx 7.9\,\mathrm{km/s}$. זמן הסיבוב השלם, $\frac{2\pi R}{v}$, היה כ־85 דקות. כך בערך נעים הלוויינים הנמוכים. בהמשך הנושא נראה איך אותו רעיון מסביר את תנועת הירח וכוכבי הלכת, ומאיפה בא הכוח.

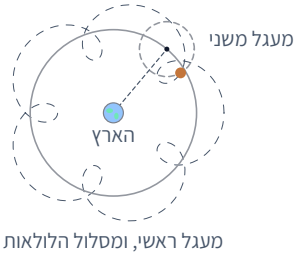
2 רקע היסטורי: מהארץ במרכז אל השמש במרכז

מאז ימי קדם צפו בני האדם בשמיים. הכוכבים מסתובבים כל לילה סביב נקודה אחת, והשמש והירח נעים ביניהם. חמשת כוכבי הלכת שנראים בעין (חמה, נוגה, מאדים, צדק ושבתאי) ״נודדים״ ביניהם, ולפעמים אף חוזרים לאחור במשך שבועות או חודשים (**תנועה נסוגה**). כמה מודלים ניסו להסביר את התצפיות האלה.

- **פיתגורס ותלמידיו, ואריסטו** (המאות ה־6 וה־4 לפני הספירה): הארץ כדורית, והיא במרכז העולם. לפי אריסטו, העולם שמתחת לירח עשוי מארבעה יסודות (אדמה, מים, אוויר ואש), והעולם שמעל לירח עשוי מ״אתר״, ושם גרמי השמיים נעים במעגלים מושלמים. זה עוד לא מודל במובן של היום: הוא מתאר את העולם במילים, ולא נובעות ממנו תחזיות מספריות שאפשר לבדוק במדידה.

© אור בן שטרית · אינסוף

- **תלמי** (המאה ה־2 לספירה): הארץ במרכז, וכל כוכב לכת נע על **מעגל משני** קטן (אפיציקל), שמרכזו נע על **מעגל ראשי** גדול (דפרנט). כך מתקבלות לולאות, כמו בתנועה הנסוגה.
- **קופרניקוס** (1543): השמש במרכז, והארץ מסתובבת סביב צירה וסביב השמש. התנועה הנסוגה מוסברת בפשטות: הארץ, שקרובה יותר לשמש, "עוקפת" את כוכבי הלכת החיצוניים. אבל המסלולים במודל שלו עדיין מעגלים, והתחזיות שלו לא היו מדויקות יותר מאלה של תלמי.



מעגל ראשי, ומסלול הלולאות

- **טיכו ברהה** (סוף המאה ה־16): מדד במשך כעשרים שנה, עוד בלי טלסקופ, את מקומות כוכבי הלכת, ברמת דיוק שלא הייתה כמותה קודם: כ־$0.03°$.
- **גלילאו גליליי** (1610): כיוון טלסקופ לשמיים וגילה הרים ומכתשים על הירח, אינספור כוכבים בשביל החלב, ארבעה ירחים שמקיפים את צדק, ומחזור שלם של מופעים של נוגה, כמו מופעי הירח. ההרים על הירח הראו שגרמי השמיים אינם "מושלמים". הירחים של צדק הראו שלא כל גרמי השמיים מקיפים את הארץ. המופעים של נוגה מתאימים לכוכב לכת שמקיף את השמש, ולא למודל של תלמי, שבו נוגה נמצא תמיד בין הארץ לשמש.
- **יוהן קפלר** (1609 עד 1619): ניתח את הנתונים של טיכו, בעיקר את המסלול של מאדים. המסלול המעגלי הטוב ביותר החטיא את התצפיות ב־$0.13°$ בלבד, אבל קפלר סמך על הדיוק של טיכו, וויתר על המעגלים. התוצאה: שלושת החוקים בפרק הבא.

ההנחה ש"מסלולים חייבים להיות מעגלים" נשארה כמעט אלפיים שנה בלי שאיש יבדוק אותה מחדש. זו דוגמה טובה לכך שהנחת יסוד שגויה יכולה לעכב את המדע, כל עוד לא מעמידים אותה מול מדידות מדויקות.

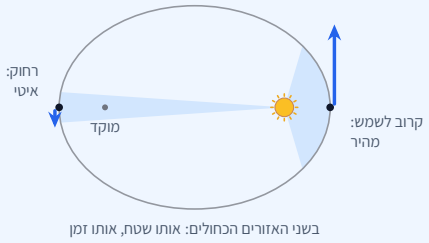
3 שלושת החוקים של קפלר

חוקי קפלר

1. **חוק המסלולים:** כל כוכב לכת נע במסלול אליפטי, והשמש נמצאת באחד משני ה**מוקדים** של האליפסה.
2. **חוק השטחים:** הקו שמחבר את כוכב הלכת לשמש סורק שטחים שווים בזמנים שווים. לכן כוכב הלכת מהיר יותר כשהוא קרוב לשמש.
3. **חוק התקופות:** היחס $\frac{T^2}{r^3}$ זהה לכל כוכבי הלכת שמקיפים את השמש:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

r הוא המרחק הממוצע מהשמש: הממוצע של המרחק הקטן ביותר והמרחק הגדול ביותר, שהוא חצי מהציר הארוך של האליפסה.



בשני האזורים הכחולים: אותו שטח, אותו זמן

אליפסה היא אוסף הנקודות שסכום המרחקים שלהן משתי נקודות קבועות (המוקדים) הוא קבוע. כך משרטטים אחת: קושרים את שני הקצוות של חוט לשני נעצים, ומותחים את החוט בעזרת עיפרון שמחליק לאורכו. בשרטוט האליפסה מוגזמת. רוב מסלולי כוכבי הלכת כמעט מעגליים: המרחק של כדור הארץ מהשמש משתנה במשך השנה בכ־3% בלבד, ולכן אפשר לחשב אותם בקירוב טוב כמעגלים.

חוק השטחים במספרים. בנקודה הקרובה ביותר לשמש ובנקודה הרחוקה ביותר המהירות ניצבת לקו שמחבר את כוכב הלכת לשמש. בזמן קצר Δt הקו סורק משולש צר, שבסיסו r וגובהו $v\,\Delta t$, ושטחו $\frac{1}{2}rv\,\Delta t$. שטחים שווים בזמנים שווים נותנים, רק בשתי הנקודות האלה,

$$r_1 v_1 = r_2 v_2$$

כדור הארץ, למשל, קרוב לשמש בתחילת ינואר ורחוק ממנה בתחילת יולי, ובינואר הוא נע מהר יותר בכ־3%.

כוכב הלכת	חמה	נוגה	כדור הארץ	מאדים	צדק	שבתאי
r (יחידות אסטרונומיות)	0.387	0.723	1	1.524	5.20	9.54
T (שנים)	0.241	0.615	1	1.881	11.86	29.46
T^2/r^3	1.00	1.00	1	1.00	1.00	1.00

יחידה אסטרונומית (AU) היא המרחק הממוצע מכדור הארץ לשמש, כ־$1.5 \times 10^{11}\ \mathrm{m}$. ביחידות של שנים ויחידות אסטרונומיות היחס $\frac{T^2}{r^3}$ שווה ל־1 לכל כוכב לכת במערכת השמש.

בדקו את עצמכם

המרחק הממוצע של כוכב לכת מהשמש הוא $4\ \mathrm{AU}$. כמה זמן נמשכת "שנה" שלו? (התשובות לכל תיבות "בדקו את עצמכם" נמצאות בסוף הקובץ.)

4 מקפלר לניוטון: חוק הכבידה

קפלר תיאר איך כוכבי הלכת נעים. ניוטון שאל למה: איזה כוח גורם להם לנוע כך? נניח, כקירוב, שהמסלולים מעגליים:

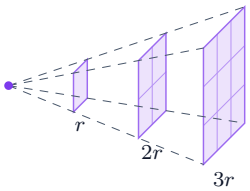
1. לפי חוק השטחים, במסלול מעגלי גודל המהירות קבוע, ולכן התנועה היא תנועה מעגלית קצובה. בתנועה כזו הכוח השקול פונה אל המרכז, כלומר אל השמש, וגודלו $F = m\frac{4\pi^2 r}{T^2}$ (נושא 5).
2. לפי החוק השלישי של קפלר $T^2 = k\,r^3$, כאשר k הוא קבוע אחד, משותף לכל כוכבי הלכת. מציבים ומקבלים $F = \frac{4\pi^2}{k}\cdot\frac{m}{r^2}$: הכוח פרופורציוני למסה של כוכב הלכת, והפוך לריבוע המרחק מהשמש.
3. לפי החוק השלישי של ניוטון, כוכב הלכת מושך את השמש בכוח שווה בגודלו. כוח שתלוי במסה של הגוף האחד צריך להיות תלוי באותה מידה גם במסה של הגוף השני, ולכן $F \propto \frac{Mm}{r^2}$, כאשר M היא מסת השמש.
4. ניוטון הכליל: זה כוח שפועל בין כל שני גופים ביקום, גם בין כדור הארץ לתפוח.

חוק הכבידה של ניוטון

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad\qquad G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$$

הכוח הוא תמיד משיכה, לאורך הקו שמחבר בין הגופים, ושני הגופים מושכים זה את זה בכוחות שווים והפוכים. החוק נכון לגופים נקודתיים, וגם לכדורים אחידים, או לכדורים שהצפיפות שלהם תלויה רק במרחק מהמרכז, כש־r הוא המרחק בין המרכזים. את זה ניוטון הוכיח, ואנחנו נקבל את זה בלי הוכחה. כדי לחשב את המשיכה של גוף שאינו כדורי, מחלקים אותו בדמיון לחלקים קטנים ומחברים, כווקטורים, את הכוחות של כל החלקים.

למה דווקא ריבוע המרחק? תמונה שעוזרת לזכור (אבל איננה הוכחה): דמיינו ש"השפעה" יוצאת מהגוף לכל הכיוונים, כמו צבע מתרסיס. אותה כמות צבע מכסה במרחק כפול שטח גדול פי 4, ובמרחק משולש שטח גדול פי 9, ולכן כל סנטימטר מרובע מקבל כמות צבע קטנה פי 4 או פי 9. כך בדיוק נחלשת הכבידה:



אותה כמות על 1, 4 ו־9 משבצות

מרחק	r	$2r$	$3r$	$10r$
כוח	F	$F/4$	$F/9$	$F/100$

דוגמה פתורה

- כדור הארץ מושך תלמידה שמסתה $50\ \mathrm{kg}$ בכוח

$$F = \frac{GMm}{R^2} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \cdot 6.0 \times 10^{24} \cdot 50}{(6.4 \times 10^6)^2} \approx 489\ \mathrm{N}$$

זה המשקל שלה, $mg_0 \approx 490\ \mathrm{N}$.

- חברה בעלת אותה מסה, שעומדת במרחק $1\ \mathrm{m}$, מושכת אותה בכוח של $1.7 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$ בלבד, אם מתייחסים לשתיהן כאל גופים נקודתיים. לכן לא מרגישים את המשיכה בין אנשים.
- גם התלמידה מושכת את כדור הארץ בכוח של $489\ \mathrm{N}$, אבל התאוצה שהיא נותנת לו זעירה: $\frac{489}{6.0\times10^{24}} \approx 8 \times 10^{-23}\ \mathrm{m/s^2}$.

טעות נפוצה

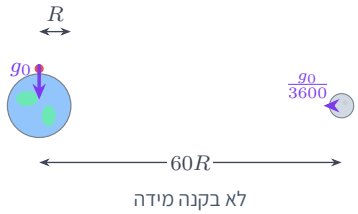
"כדור הארץ מושך את התפוח חזק יותר ממה שהתפוח מושך את כדור הארץ." **לא:** לפי החוק השלישי של ניוטון הכוחות שווים בגודלם. ההבדל הוא בתאוצות, $a = \frac{F}{m}$, ולכן התאוצה של כדור הארץ זעירה.

© אור בן שטרית · אינסוף

התפוח והירח: המבחן של ניוטון

אם אותו כוח מפיל את התפוח ומחזיק את הירח במסלולו, התאוצה של הירח צריכה להיות קטנה מ־g_0 פי $\left(\frac{r}{R}\right)^2$. הירח רחוק ממרכז כדור הארץ פי 60 בערך מתפוח על פני הארץ ($r = 3.84 \times 10^8\,\mathrm{m}$), ולכן הניבוי הוא

$$a = \frac{g_0}{60^2} = \frac{9.8}{3600} \approx 2.72 \times 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$$



לא בקנה מידה

ומה מראה המסלול של הירח? זמן המחזור שלו 27.3 ימים, והתאוצה הרדיאלית שלו מתאימה בדיוק לניבוי:

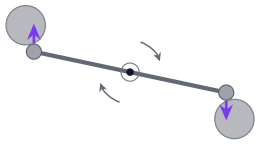
$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \approx 2.72 \times 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$$

ניוטון ניסח זאת גם כך: בזמן קצר t הירח "נופל" מתחת לקו הישר, המשיק למסלולו, מרחק של $\frac{1}{2}at^2$. בדקה אחת זה $\frac{1}{2}\cdot 2.72\times 10^{-3}\cdot 60^2 \approx 4.9\,\mathrm{m}$, בדיוק המרחק שתפוח נופל בשנייה אחת. במרחק גדול פי 60, התאוצה קטנה פי 60^2.

בדקו את עצמכם

המרחק בין שני גופים קטן פי 2, והמסה של אחד מהם גדלה פי 2. פי כמה גדל כוח המשיכה ביניהם?

5 ניסוי קבנדיש: "שוקלים" את כדור הארץ


מבט מלמעלה: המוט מסתובב והחוט באמצע מתפתל

בחוק הכבידה מופיע הקבוע G. מהתנועה של כוכבי הלכת אפשר למדוד רק את המכפלה GM, ולכן כדי למצוא את G עצמו צריך למדוד משיכה בין שני גופים שהמסות שלהם ידועות. ב־1798, יותר ממאה שנה אחרי ניוטון, עשה זאת **הנרי קבנדיש**. הוא תלה על חוט דק מוט קל שבקצותיו שני כדורי עופרת קטנים. אחר כך קירב אליהם שני כדורי עופרת גדולים. המשיכה סובבה את המוט בזווית זעירה, עד שהפיתול של החוט איזן אותה. מהזווית, אחרי שכייל את החוט, חישב כוחות בסדר גודל של $10^{-7}\,\mathrm{N}$, ומהם את הצפיפות של כדור הארץ. מהנתונים שלו אפשר לחשב גם את G.

הניסוי של קבנדיש היה האישור הניסיוני הראשון לכך שגם גופים בגודל שמתאים למעבדה מושכים זה את זה, ושהמשיכה מצייתת לאותו חוק. למה הכוח כל כך קטן? כי G קטן מאוד: כדי שהכבידה תהיה מורגשת, לפחות אחד הגופים צריך להיות ענק, כמו כוכב.

"שקילה" של כוכב לפי תאוצת הנפילה על פניו

על פני כוכב שמסתו M ורדיוסו R מתקיים $mg = \frac{GMm}{R^2}$, ולכן

$$g = \frac{GM}{R^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad M = \frac{gR^2}{G}$$

כדור הארץ: $M = \frac{9.8\cdot(6.4\times 10^6)^2}{6.67\times 10^{-11}} \approx 6.0\times 10^{24}\,\mathrm{kg}$. לכן קראו לניסוי של קבנדיש "שקילת כדור הארץ". הנפח של כדור הארץ הוא $\frac{4}{3}\pi R^3 \approx 1.1\times 10^{21}\,\mathrm{m^3}$, ולכן הצפיפות הממוצעת שלו היא כ־$5.5\times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$. זה בערך פי 2 מהצפיפות של הסלעים על פני הקרקע (כ־$2.7\times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$), ומכאן שבתוך כדור הארץ יש חומר צפוף הרבה יותר: ליבה של ברזל.

טיפ: המכפלה GM

בחישובים עם כדור הארץ נוח להשתמש במכפלה $GM \approx 4.0\times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}$, או בקשר $GM = g_0R^2$. כך חוסכים חזקות של 10, ולא צריך את G ואת M בנפרד.

בדקו את עצמכם

על פני נוגה תאוצת הנפילה היא $8.9\,\mathrm{m/s^2}$, והרדיוס של נוגה הוא $6.05\times 10^6\,\mathrm{m}$. מה המסה של נוגה?

© אור בן שטרית · אינסוף

6 שדה הכבידה

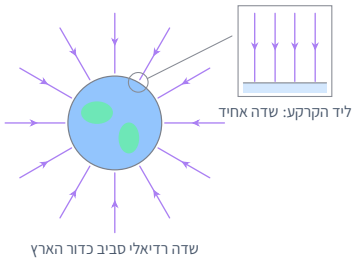
עד עכשיו תיארנו את הכבידה כ**פעולה מרחוק**: גוף אחד מושך גוף אחר, בלי שום מגע ביניהם. תיאור אחר הוא **שדה**: כל גוף בעל מסה יוצר סביבו שדה כבידה, ובכל נקודה במרחב יש "הוראה" שאומרת באיזה כוח יימשך כל קילוגרם של גוף שיגיע לשם.

עוצמת שדה הכבידה

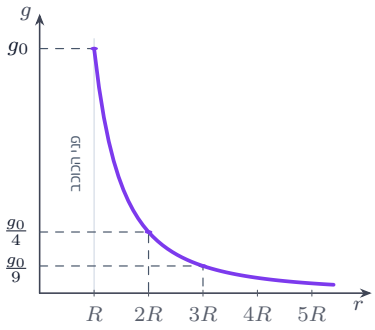
$$\vec{g}=\frac{\vec{F}}{m}\qquad \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]\qquad g=\frac{GM}{r^2}\qquad g(h)=\frac{GM}{(R+h)^2}=g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

השדה של כוכב כדורי, במרחק r ממרכזו (מחוץ לכוכב, $r\geq R$), פונה אל מרכז הכוכב. עוצמת השדה שווה לגודל התאוצה שהכבידה מקנה לכל גוף שנמצא שם, והיא לא תלויה במסה של הגוף שבודקים. כשיש כמה גופים, השדה בכל נקודה הוא הסכום **הווקטורי** של השדות שלהם.

שדה רדיאלי ושדה אחיד. את השדה מתארים ב**קווי שדה**: הכיוון שלהם הוא כיוון השדה, והצפיפות שלהם מראה את העוצמה. סביב כוכב הקווים **רדיאליים**: כולם פונים אל המרכז, ומתרחקים זה מזה ככל שמתרחקים מהכוכב, וזה מראה שהשדה נחלש (כמו $\frac{1}{r^2}$). קרוב לפני הארץ, בתחום של כמה קילומטרים, השדה כמעט קבוע בגודלו ובכיוונו: זה **שדה אחיד**, שאיתו עבדנו בכל הנושאים הקודמים, עם g קבוע.



עד כמה נחלש השדה? הגרף מראה את g כפונקציה של המרחק ממרכז כדור הארץ, והטבלה מראה ערכים בגבהים שונים. גם בגובה של טלסקופ החלל האבל השדה הוא עדיין 85% מ־g_0. מסלולים של לוויינים לא נמצאים "מחוץ לכבידה".

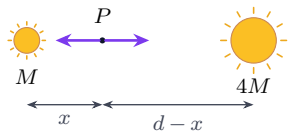


מקום	גובה	$g\ (\mathrm{m/s^2})$
פני הים	0	9.8
פסגת האוורסט	8.8 km	9.77
"גבול החלל"	100 km	9.5
טלסקופ החלל האבל	540 km	8.3
לוויין גאוסטציונרי (פרק 7)	35 900 km	0.22
המסלול של הירח	378 000 km	0.0027

הגובה נמדד מפני הים. המרחק ממרכז כדור הארץ הוא $r=R+h$, כלומר הגובה ועוד $6400\ \mathrm{km}$.

דוגמה פתורה: נקודה שבה השדה מתאפס

שני כוכבים, שהמסות שלהם M ו־$4M$, נמצאים במרחק d זה מזה. בנקודה P שביניהם, במרחק x מהכוכב הקל, שני השדות הפוכים בכיוונם. השדה השקול מתאפס כשהם שווים בגודלם:



$$\frac{GM}{x^2}=\frac{G\cdot 4M}{(d-x)^2}\quad\Longrightarrow\quad d-x=2x\quad\Longrightarrow\quad x=\frac{d}{3}$$

הנקודה קרובה לכוכב הקל: המסה שלו קטנה פי 4, ולכן השדה שלו משתווה לשדה של הכוכב הכבד רק במקום שקרוב אליו פי 2. (מחוץ לקטע שבין הכוכבים שני השדות באותו כיוון, ושם הם לא יכולים להתבטל.)

למה בכלל צריך "שדה"?

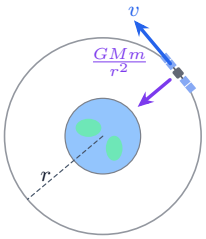
כשהגופים לא זזים, אין יתרון ממשי לאף אחד משני התיאורים. אבל נניח שהשמש זזה פתאום: האם כדור הארץ "ירגיש" את השינוי באותו רגע? לפי תורת היחסות, שום מידע לא עובר מהר יותר מהאור. "פעולה מרחוק" מיידית סותרת את העיקרון הזה, ואילו בתיאור של שדה השינוי מתפשט במרחב במהירות סופית. לכן במצבים משתנים השדה הוא התיאור הנכון.

© אור בן שטרית · אינסוף

בדקו את עצמכם

באיזה גובה מעל פני הארץ עוצמת שדה הכבידה קטנה פי 9 מ־g_0?

7 לוויינים במסלול מעגלי



לוויין, טבעי כמו הירח או מלאכותי, נע סביב כוכב כשהכוח היחיד שפועל עליו הוא הכבידה. במסלול מעגלי הכבידה היא הכוח המרכזי, ולכן החוק השני בכיוון המרכז (נושא 5) נותן

$$\frac{GMm}{r^2}=m\frac{v^2}{r} \quad\Longrightarrow\quad v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

וזמן המחזור הוא $T=\frac{2\pi r}{v}=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$.

לוויין במסלול מעגלי

$$v=\sqrt{\frac{GM}{r}} \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \qquad \frac{T^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{GM}$$

- המהירות וזמן המחזור **לא תלויים במסת הלוויין**: m מצטמצמת.
- ככל שהמסלול גבוה יותר, הלוויין **איטי יותר**, וזמן המחזור שלו ארוך יותר.
- זה **החוק השלישי של קפלר**! הקבוע $\frac{4\pi^2}{GM}$ תלוי רק במסה של הגוף המרכזי. לכן החוק נכון לכל קבוצה של גופים שמקיפים אותו גוף: כוכבי הלכת סביב השמש, הירחים של צדק סביב צדק והלוויינים סביב כדור הארץ, ולכל קבוצה קבוע משלה.

דוגמה. טלסקופ החלל האבל נע בגובה של כ־$540\,\text{km}$, כלומר $r=6.94\times10^6\,\text{m}$. עם $GM\approx4.0\times10^{14}\,\text{m}^3/\text{s}^2$ (פרק 5) מקבלים

$$v=\sqrt{\frac{4.0\times10^{14}}{6.94\times10^6}}\approx7.6\,\text{km/s} \qquad T=\frac{2\pi r}{v}\approx5740\,\text{s}\approx96\,\text{min}$$

מסה של כוכב מנתוני לוויין

מתוך הקשר $\frac{T^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{GM}$ אפשר למצוא את המסה של הגוף המרכזי, אם יודעים את רדיוס המסלול ואת זמן המחזור של גוף כלשהו שמקיף אותו:

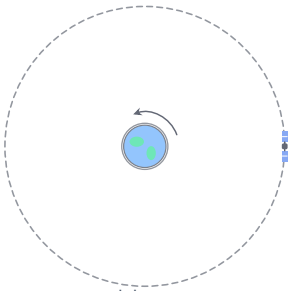
$$M=\frac{4\pi^2r^3}{GT^2}$$

כדור הארץ מקיף את השמש במסלול שהרדיוס שלו $1.5\times10^{11}\,\text{m}$, בשנה אחת, $3.16\times10^7\,\text{s}$. לכן המסה של השמש היא

$$M=\frac{4\pi^2(1.5\times10^{11})^3}{6.67\times10^{-11}\cdot(3.16\times10^7)^2}\approx2.0\times10^{30}\,\text{kg}$$

כלומר, היא גדולה פי $330\,000$ בערך ממסת כדור הארץ. כך מודדים מסות של כוכבי לכת שיש להם ירחים, ושל כוכבים שיש להם כוכבי לכת. כך נמדדה גם המסה של החור השחור במרכז שביל החלב, מהמסלולים של כוכבים שמקיפים אותו.

לוויין גאוסטציונרי



בקנה מידה: מסלול גאוסטציונרי ומסלול נמוך, ממש ליד כדור הארץ

לוויין **גאוסטציונרי** נמצא כל הזמן מעל אותה נקודה על כדור הארץ. לכן:

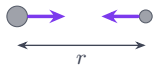
- זמן המחזור שלו שווה לזמן הסיבוב של כדור הארץ סביב צירו, יממה (ליתר דיוק 23 שעות ו־56 דקות, אבל נעגל ל־24 שעות);
- הוא נע בכיוון שבו כדור הארץ מסתובב;
- הוא נמצא מעל קו המשווה, כי מרכז המסלול חייב להיות מרכז כדור הארץ. לוויין במסלול נטוי היה עובר לסירוגין מעל חצי הכדור הצפוני ומעל חצי הכדור הדרומי.

אנטנה על הקרקע לא צריכה לעקוב אחרי לוויין כזה, ולכן משתמשים בלוויינים כאלה לתקשורת ולחיזוי מזג האוויר.

מקרים כוח הכבידה ושדה הכבידה – 18 מקרים

בכל כרטיס: מצב אחד, המשוואה המרכזית שלו, ומה שכדאי לזכור.

1 שני גופים נקודתיים



$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

כוחות שווים והפוכים (החוק השלישי)

2 מרחק כפול



$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

מרחק פי 2, כוח קטן פי 4

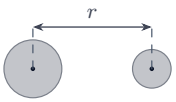
3 מסה כפולה



$$F \propto m_1 m_2$$

מסה פי 2, כוח פי 2

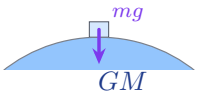
4 שני כדורים גדולים



$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

r בין המרכזים, לא בין פני הכדורים

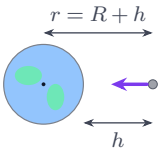
5 גוף על פני כוכב



$$g = \frac{GM}{R^2}$$

המשקל הוא כוח הכבידה של הכוכב

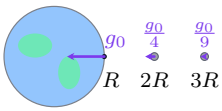
6 גוף בגובה h



$$g = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

מודדים מהמרכז, לא מהקרקע

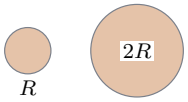
7 בגובה של רדיוס אחד



$$h = R \;\Rightarrow\; g = \frac{g_0}{4}$$

מרחקים מהמרכז; בגובה $2R$: $\frac{g_0}{9}$

8 רדיוס כפול, אותה צפיפות



$$g = \tfrac{4}{3}\pi G\rho R$$

מסה פי 8, ולכן g פי 2

9 נקודה שבה השדה מתאפס



$$\frac{GM}{x^2} = \frac{4GM}{(d-x)^2}$$

$x = \frac{d}{3}$, קרוב לכוכב הקל

10 שדה רדיאלי



$$g = \frac{GM}{r^2}$$

אל המרכז; הקווים מתרחקים, השדה נחלש

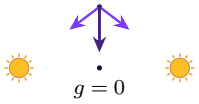
11 שדה אחיד בקירוב



$$g \approx g_0, \quad U_g = mgh$$

ליד הקרקע: קווים ישרים ומקבילים

12 שני כוכבים זהים



$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

באמצע: אפס; מעל האמצע: אנכי

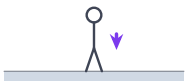
13 התפוח והירח



$$a = \frac{g_0}{60^2} \approx 2.7 \times 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$$

בדיוק כמו $\frac{4\pi^2 r}{T^2}$ של הירח

14 משקל על הירח



$$g \approx 1.6\,\mathrm{m/s^2} \approx \frac{g_0}{6}$$

המסה לא משתנה, המשקל קטן פי 6

15 הנוצה והפטיש



$$a = g = \frac{GM}{r^2}$$

בלי אוויר: אותה תאוצה לכל מסה

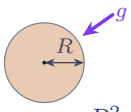
16 מאזני הפיתול של קבנדיש



$$F \sim 10^{-7}\,\mathrm{N}$$

מודדים כוח, ומקבלים את G

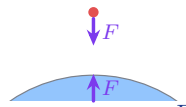
17 "שקילה" של כוכב



$$M = \frac{gR^2}{G}$$

מודדים g ו־R, ומקבלים את M

18 הארץ "נופלת" אל התפוח



$$F_1 = F_2, \quad a = \frac{F}{m}$$

לתפוח $a = g_0$, ולכדור הארץ $a \approx 0$

© אור בן שטרית · אינסוף

הרדיוס של המסלול נקבע לפי זמן המחזור:

$$r=\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{4.0\times10^{14}\cdot86\,400^2}{4\pi^2}}\approx4.23\times10^7\,\mathrm{m}$$

כלומר כ־6.6 רדיוסים של כדור הארץ, בגובה של כ־$35\,900\,\mathrm{km}$, והמהירות היא $v=\frac{2\pi r}{T}\approx3.1\,\mathrm{km/s}$.

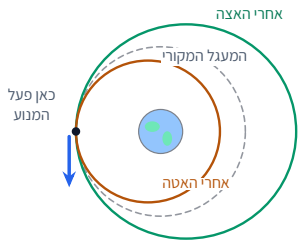
"חוסר משקל"

אסטרונאוטים בתחנת חלל מרחפים. הם לא "מחוץ לכבידה": המשקל שלהם, כלומר כוח הכבידה $mg(r)$ שפועל עליהם, לא התאפס, ובגובה של כמה מאות קילומטרים הוא עדיין קרוב למשקל על פני הארץ (ראו את הטבלה בפרק 6). הם, התחנה וכל מה שבתוכה נופלים יחד אל כדור הארץ באותה תאוצה, $a=g(r)$. הרצפה לא צריכה לדחוף אותם, $N=0$, ולכן הוריית המאזניים היא אפס: זה מה שנקרא "חוסר משקל". זה בדיוק המצב במעלית שנופלת חופשית (נושא 2), עם הבדל אחד: לתחנה יש גם מהירות אופקית גדולה מספיק, כך שהיא "מחטיאה" את כדור הארץ כל הזמן.

טעות נפוצה

"אסטרונאוטים מרחפים כי בחלל אין כבידה." **לא:** בלי כבידה התחנה הייתה ממשיכה בקו ישר ומתרחקת. הכבידה היא בדיוק הכוח שמכופף את המסלול שלה ושל האסטרונאוטים למעגל.

מה קורה כשהמהירות של לוויין משתנה?



נניח שהמנוע של לוויין דוחף אותו לרגע קצר בכיוון התנועה ומגדיל את מהירותו. במהירות החדשה הכבידה כבר לא מספיקה כדי לכופף את המסלול למעגל באותו רדיוס ($m\frac{v^2}{r}>\frac{GMm}{r^2}$), והלוויין מתרחק. הוא לא עובר למעגל גדול יותר: המסלול החדש הוא **אליפסה**, שהנקודה הקרובה ביותר בה היא הנקודה שבה פעל המנוע, והוא חוזר אליה בכל הקפה. (זה נכון כל עוד המהירות החדשה קטנה מ־$\sqrt{2}$ כפול המהירות המעגלית. במהירות גדולה יותר הלוויין בורח, ראו פרק 10.) אם המנוע מקטין את המהירות, מתקבלת אליפסה שהנקודה הרחוקה ביותר בה היא נקודת ההאטה. מסלול מעגלי הוא מקרה מיוחד: המהירות שווה בדיוק ל־$\sqrt{\frac{GM}{r}}$, והיא ניצבת לרדיוס.

גם הכוכב זז. לפי החוק השלישי של ניוטון גם הלוויין מושך את הכוכב. לכן שני הגופים נעים סביב נקודה משותפת שנמצאת על הקו שביניהם, **מרכז המסה** שלהם: הנקודה שהמרחקים שלה מהגופים, d_M ו־d_m, מקיימים $M\,d_M=m\,d_m$. היא קרובה יותר לגוף הכבד. כשמסה אחת גדולה בהרבה מהשנייה, כמו השמש מול כדור הארץ, מרכז המסה נמצא כמעט במרכז הגוף הכבד, והגוף הכבד כמעט לא זז. בכוכבים כפולים, שהמסות שלהם דומות, שני הכוכבים נעים בבירור סביב נקודה שביניהם.

בדקו את עצמכם

שני לוויינים מקיפים את אותו כוכב, ורדיוס המסלול של לוויין B גדול פי 4 מזה של לוויין A. פי כמה קטנה המהירות של B, ופי כמה ארוך זמן המחזור שלו?

8 אנרגיה בשדה הכבידה

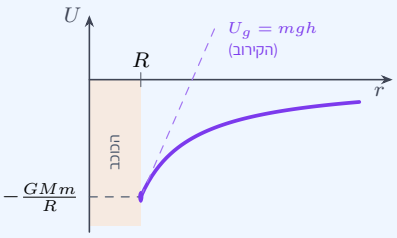
שדה הכבידה הוא **שדה משמר**: העבודה שהכבידה עושה על גוף שעובר מנקודה לנקודה תלויה רק בנקודת ההתחלה ובנקודת הסוף, ולא במסלול. הסיבה: הכוח פונה תמיד אל המרכז, ולכן תנועה "הצידה", במרחק קבוע מהמרכז, לא דורשת עבודה, ורק השינוי במרחק קובע. לכן אפשר להגדיר לו אנרגיה פוטנציאלית (נושא 3). ליד פני הארץ השתמשנו ב־$U_g=mgh$, אבל הנוסחה הזו מניחה ש־g קבוע. בגבהים גדולים צריך את הנוסחה הכללית.

© אור בן שטרית · אינסוף

אנרגיה פוטנציאלית כובדית

$$U=-\frac{GMm}{r}$$

r הוא המרחק ממרכז הכוכב, מחוץ לכוכב ($r\geq R$), ורמת האפס היא "באינסוף", רחוק מאוד מהכוכב. האנרגיה הפוטנציאלית **שלילית** בכל מקום, ועולה, כלומר מתקרבת לאפס, ככל שמתרחקים. הכוכב יוצר **בור פוטנציאל**: כדי לצאת ממנו צריך להשקיע אנרגיה.



מאיפה זה בא? העבודה של כוח משתנה היא השטח מתחת לגרף של הכוח (נושא 3). השטח מתחת לגרף של $\frac{GMm}{r^2}$, מ־r ועד אינסוף, הוא $\frac{GMm}{r}$. זו העבודה שצריך להשקיע כדי להרחיק את הגוף לאט מ־r עד אינסוף, ולכן $U(\infty)-U(r)=\frac{GMm}{r}$.

מכינה בשפת האינטגרלים: $\int_r^\infty \frac{GMm}{x^2}\,dx=\frac{GMm}{r}$.

והקשר ל־mgh: ההפרש בין גובה h לבין פני הכוכב הוא $\Delta U=\frac{GMm}{R}-\frac{GMm}{R+h}=\frac{GMmh}{R(R+h)}$. כש־$h$ קטן בהרבה מ־R, אפשר להחליף את $R(R+h)$ ב־R^2, ומקבלים $\Delta U\approx m\frac{GM}{R^2}h=mg_0h$. כלומר mgh הוא קירוב טוב לגבהים קטנים. בגרף הוא הקו המשיק לעקומה בנקודה R, והוא מתרחק מהעקומה ככל שעולים.

שימור אנרגיה בשדה הכבידה

כשרק הכבידה עושה עבודה:

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2-\frac{GMm}{r_1}=\tfrac{1}{2}mv_2^2-\frac{GMm}{r_2}$$

דוגמה פתורה

גוף נופל ממנוחה מגובה $1000\,\text{km}$ מעל פני הארץ (נניח שאין אוויר). באיזו מהירות יפגע בקרקע?

- משימור האנרגיה: $\frac{1}{2}v^2=GM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)=4.0\times10^{14}\left(\frac{1}{6.4\times10^6}-\frac{1}{7.4\times10^6}\right)$, ולכן $v\approx4.1\,\text{km/s}$.
- עם mgh היינו מקבלים $\sqrt{2g_0h}\approx4.4\,\text{km/s}$. זה יותר מדי, כי בדרך למטה g קטן מ־g_0.

בדקו את עצמכם

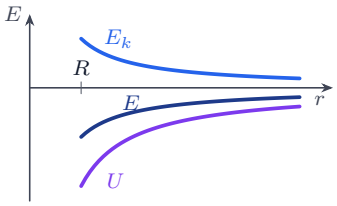
גוף נופל ממנוחה מגובה $3R$ מעל פני הארץ, כלומר מ־$r=4R$. באיזו מהירות יפגע בקרקע? (בלי אוויר.)

9 האנרגיה של לוויין ואנרגיית קשר

ללוויין במסלול מעגלי $mv^2=\frac{GMm}{r}$ (מהמשוואה של פרק 7), ולכן כל שלוש האנרגיות שלו נקבעות לפי הרדיוס:

$$E=E_k+U=-\frac{GMm}{2r}\qquad U=-\frac{GMm}{r}\qquad E_k=\frac{GMm}{2r}$$

האנרגיה הכוללת **שלילית**, ושווה למינוס האנרגיה הקינטית: $E=-E_k=\frac{U}{2}$.
בגרף: שלוש העקומות כפונקציה של r.



- **מסלול גבוה יותר:** E גדלה (פחות שלילית), אבל E_k קטנה. כדי להעלות לוויין למסלול גבוה צריך להשקיע אנרגיה, ובכל זאת הוא יגיע לשם איטי יותר: העלייה באנרגיה הפוטנציאלית גדולה פי 2 מהירידה באנרגיה הקינטית.
- **חיכוך עם שאריות האוויר** בגובה נמוך גורע אנרגיה מהלוויין. E קטנה, ולכן הרדיוס קטן ו־E_k גדלה: הלוויין יורד ומאיץ, עד שהוא נכנס לאטמוספרה הצפופה ונשרף. איך החיכוך "מאיץ" אותו? בזמן שהלוויין יורד, הכבידה עושה עליו עבודה חיובית, גדולה פי 2 מהאנרגיה שהחיכוך גורע.

אנרגיית קשר

אנרגיית הקשר של גוף היא האנרגיה המזערית שצריך לתת לו כדי לשחרר אותו מהכוכב, כלומר להביא אותו לאינסוף במהירות אפס (שם $E=0$):

לוויין במסלול מעגלי: $E_{\text{bind}}=\dfrac{GMm}{2r}$ לגוף שנח על פני הכוכב: $E_{\text{bind}}=\dfrac{GMm}{R}$

(בגוף שנח על פני הכוכב לא התחשבנו בסיבוב הכוכב סביב צירו.) הגוף "כלוא" בבור הפוטנציאל, ואנרגיית הקשר היא העומק שלו בבור, מתחת לאפס.

דוגמה פתורה

לוויין שמסתו $1000\,\text{kg}$ נע בגובה של $540\,\text{km}$, כמו האבל.

- $E_k=\frac{GMm}{2r}=\frac{4.0\times10^{14}\cdot1000}{2\cdot6.94\times10^{6}}\approx 2.9\times10^{10}\,\text{J}$, $U\approx -5.8\times10^{10}\,\text{J}$ ו־$E\approx -2.9\times10^{10}\,\text{J}$. אנרגיית הקשר שלו $2.9\times10^{10}\,\text{J}$.
- על פני הארץ, לפני השיגור, הייתה לו $U=-\frac{GMm}{R}\approx -6.25\times10^{10}\,\text{J}$. לכן כדי להעלות אותו למסלול צריך לפחות $E-U(R)\approx 3.4\times10^{10}\,\text{J}$ (בלי אוויר, ובלי להתחשב בסיבוב של כדור הארץ).

בדקו את עצמכם

לוויין עובר ממסלול מעגלי שהרדיוס שלו r למסלול מעגלי שהרדיוס שלו $2r$. מה קורה לאנרגיה הקינטית שלו, לאנרגיה הפוטנציאלית ולאנרגיה הכוללת?

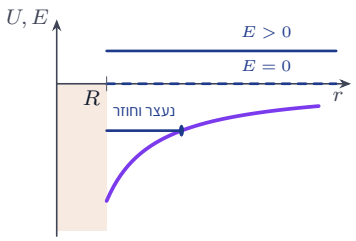
10 מהירות מילוט

מהירות מילוט

מהירות המילוט היא המהירות המזערית שבה צריך לזרוק גוף מפני כוכב כדי שיתרחק ממנו לאינסוף ולא יחזור (בלי אוויר ובלי גופים אחרים). כשזורקים במהירות הזו, $E=0$:

$$\tfrac{1}{2}mv_e^2-\frac{GMm}{R}=0 \quad\Longrightarrow\quad v_e=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

מפני כדור הארץ: $v_e=\sqrt{\frac{2\cdot4.0\times10^{14}}{6.4\times10^{6}}}\approx 11.2\,\text{km/s}$. המהירות לא תלויה במסת הגוף, וגם לא בכיוון הזריקה (כל עוד המסלול לא פוגע בכוכב), כי אנרגיה היא גודל סקלרי.



שלושה מקרים. בגרף של U מסמנים את האנרגיה הכוללת E כקו אופקי. ההפרש בין הקו לעקומה הוא האנרגיה הקינטית.

- $E<0$: הגוף **קשור**, ולא יכול להתרחק מעבר לנקודה שבה הקו פוגש את העקומה. בזריקה אנכית הוא נעצר שם וחוזר.
- $E=0$: הגוף בורח, והמהירות שלו שואפת לאפס.
- $E>0$: הגוף בורח, ונשארת לו מהירות v_∞, שמקיימת $v_\infty^2=v^2-v_e^2$.

מילוט ממסלול. ללוויין במסלול מעגלי ברדיוס r, מהירות המילוט היא $\sqrt{\frac{2GM}{r}}=\sqrt{2}\,v$. כדי להימלט ממסלול מעגלי צריך להגדיל את המהירות בכ־41%.

ממה בורחים?	פני הירח	פני הארץ	השמש, מהמסלול של כדור הארץ	פני השמש
v_e	$2.4\,\text{km/s}$	$11.2\,\text{km/s}$	$42\,\text{km/s}$	$620\,\text{km/s}$

כדור הארץ עצמו נע סביב השמש ב־$29.8\,\text{km/s}$. לכן גשושית ששוגרה ממנו בכיוון התנועה של כדור הארץ כבר "מקבלת במתנה" חלק גדול מהמהירות שנדרשת כדי לצאת ממערכת השמש.

דוגמה פתורה

גשושית משוגרת מפני הארץ במהירות $12\,\mathrm{km/s}$ (בלי אוויר). באיזו מהירות היא תנוע רחוק מאוד מכדור הארץ?

$$v_\infty = \sqrt{v^2 - v_e^2} = \sqrt{12^2 - 11.2^2} \approx 4.3\,\mathrm{km/s}$$

מהירות גדולה רק ב־7% ממהירות המילוט משאירה לגשושית מהירות לא קטנה, כי ההפרש בין ריבועי המהירויות הוא שקובע.

להעשרה: חור שחור

ככל שגוף דחוס יותר, מהירות המילוט מפני השטח שלו גדולה יותר. אם היא עולה על מהירות האור, אפילו אור לא יכול לברוח: זה **חור שחור**. כדי שהשמש תהפוך לחור שחור, כל המסה שלה צריכה להידחס לכדור שהרדיוס שלו קטן מ־$\frac{2GM}{c^2} \approx 3\,\mathrm{km}$. (החישוב המדויק דורש את תורת היחסות הכללית, אבל במקרה הוא נותן את אותה נוסחה.)

בדקו את עצמכם

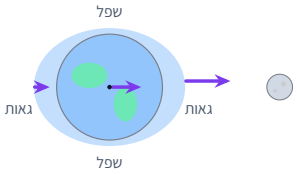
מה מהירות המילוט מכוכב לכת שהמסה שלו גדולה פי 4 ממסת כדור הארץ, והרדיוס שלו גדול פי 2?

11 הצלחות התאוריה, וגם גבול אחד

נפטון: כוכב לכת שהתגלה על הנייר

ב־1781 התגלה כוכב הלכת אורנוס. אחרי כמה עשרות שנים התברר שהוא סוטה מעט מהמסלול שחושב לפי חוק הכבידה, גם אחרי שהתחשבו במשיכה של צדק ושל שבתאי. האסטרונום הצרפתי אורבן להֶ־וריֶה (ובנפרד ממנו האנגלי ג׳ון אדמס) הניח שכוכב לכת לא ידוע מושך את אורנוס, וחישב איפה הוא אמור להיות. ב־1846 כיוונו טלסקופ למקום שחושב, ומצאו את נפטון קרוב מאוד אליו. זה היה אחד הניצחונות הגדולים של חוק הכבידה: הוא לא רק הסביר את מה שכבר היה ידוע, אלא גם ניבא דבר חדש.

גאות ושפל



המשיכה של הירח: חזקה בצד הקרוב, חלשה בצד הרחוק (בליטות מוגזמות)

בחופי האוקיינוס פני הים עולים ויורדים פעמיים ביממה, בערך כל 12 שעות ו־25 דקות. ההסבר: הירח מושך את המים בצד הקרוב אליו חזק יותר מאשר את מרכז כדור הארץ, ואת מרכז כדור הארץ חזק יותר מאשר את המים בצד הרחוק. ההפרשים "מותחים" את האוקיינוסים לאורך הקו שמחבר את כדור הארץ לירח, ונוצרות שתי בליטות של מים: אחת מול הירח, ואחת בצד הנגדי. כדור הארץ מסתובב מתחתן, וכל מקום עובר בשתיהן. מכיוון שהירח עצמו מתקדם במסלולו, המחזור ארוך מעט מחצי יממה. גם לשמש יש השפעה כזו. היא מושכת את כדור הארץ חזק פי 180 בערך מהירח, אבל היא רחוקה מאוד, ולכן ההפרש בין המשיכה שלה בצד הקרוב לבין המשיכה בצד הרחוק קטן: ההשפעה שלה על הגאות היא כמחצית מזו של הירח. במולד ובירח מלא, כשהשמש והירח באותו קו, הגאות גבוהה במיוחד, וכשהירח ברבע, היא חלשה.

מה חוק הכבידה לא הסביר

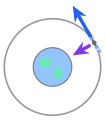
המסלול האליפטי של חמה, כוכב הלכת הקרוב ביותר לשמש, מסתובב לאט סביב השמש. רוב הסיבוב הזה נובע מהמשיכה של כוכבי הלכת האחרים, אבל נשאר הפרש קטן שחוק הכבידה של ניוטון לא מסביר. את ההפרש הסבירה רק **תורת היחסות הכללית** של איינשטיין, ב־1915. כך מתקדם המדע: תאוריה מצליחה נשארת מצוינת בתחום שלה, ותאוריה רחבה יותר מסבירה גם את מה שהתאוריה הקודמת לא הצליחה להסביר.

עובדות שהיו ידועות לפני ניוטון	מה תאוריית הכבידה הסבירה	מה היא ניבאה
שלושת החוקים של קפלר; גופים נופלים באותה תאוצה (גלילאו); זמן המחזור והמרחק של הירח; גאות ושפל	את חוקי קפלר מתוך חוק אחד; את היחס $\frac{1}{3600}$ בין תאוצת הירח ל־g_0; את הגאות והשפל	את נפטון; את חזרת השביטים; את האפשרות של לוויינים מלאכותיים

מקרים לוויינים, מסלולים ואנרגיה — 18 מקרים

M — מסת הכוכב, m — מסת הגוף שנע סביבו, r — המרחק ממרכז הכוכב, R — רדיוס הכוכב.

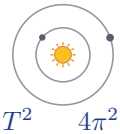
1 לוויין במסלול מעגלי



$$\frac{GMm}{r^2}=m\frac{v^2}{r}$$

$v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$, בלי תלות ב־m

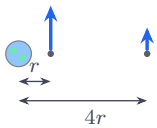
2 החוק השלישי של קפלר



$$\frac{T^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{GM}$$

הקבוע תלוי רק במסה המרכזית

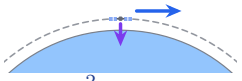
3 רדיוס גדול פי 4



$$v\propto\frac{1}{\sqrt{r}},\qquad T\propto r^{3/2}$$

מהירות קטנה פי 2, זמן מחזור ארוך פי 8

4 מסלול נמוך, ממש מעל הקרקע



$$mg=m\frac{v^2}{R}\ \Rightarrow\ v=\sqrt{gR}$$

בכדור הארץ $7.9\,\mathrm{km/s}$, כ־85 דקות

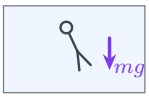
5 לוויין גאוסטציונרי



$$T=24\,\mathrm{h}$$

מעל קו המשווה, בכיוון הסיבוב, $r\approx 6.6R$

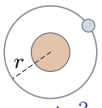
6 "חוסר משקל" בתחנת חלל



$$N=0,\qquad a=g(r)$$

האסטרונאוט והתחנה נופלים יחד

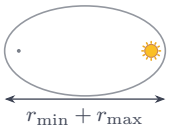
7 מסה של כוכב מנתוני ירח



$$M=\frac{4\pi^2r^3}{GT^2}$$

מודדים r ו־T של הירח

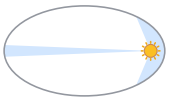
8 החוק הראשון: אליפסה



$$r=\frac{r_{\min}+r_{\max}}{2}$$

השמש במוקד; את r מציבים בחוק השלישי

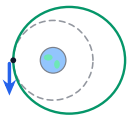
9 החוק השני: שטחים שווים



$$r_1v_1=r_2v_2$$

בנקודה הקרובה ובנקודה הרחוקה

10 מאיצים לרגע



$$\sqrt{GM/r}<v<\sqrt{2GM/r}$$

אליפסה; כאן הנקודה הקרובה ביותר

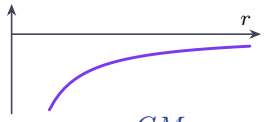
11 מאטים לרגע



$$v<\sqrt{GM/r}$$

אליפסה; כאן הנקודה הרחוקה ביותר

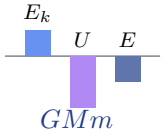
12 אנרגיה פוטנציאלית



$$U=-\frac{GMm}{r}$$

אפס באינסוף, שלילית בכל מקום

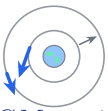
13 שלוש האנרגיות של לוויין



$$E=-\frac{GMm}{2r}=-E_k$$

$U=-\frac{GMm}{r}=2E$, $E_k=\frac{GMm}{2r}$

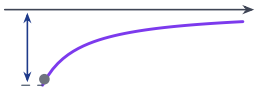
14 עלייה למסלול גבוה



$$\Delta E=\frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

משקיעים אנרגיה, והלוויין איטי יותר

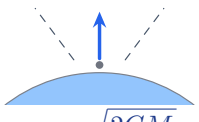
15 אנרגיית קשר



$$E_{\text{bind}}=-E$$

לוויין: $\frac{GMm}{2r}$; גוף שנח על פני הכוכב: $\frac{GMm}{R}$

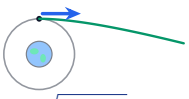
16 מהירות מילוט



$$v_e=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

בכדור הארץ $11.2\,\mathrm{km/s}$, בכל כיוון

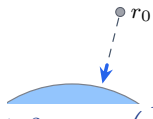
17 בורחים ממסלול מעגלי



$$v_e=\sqrt{\frac{2GM}{r}}=\sqrt{2}\,v$$

תוספת של כ־41% למהירות

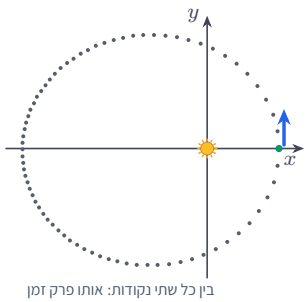
18 נפילה ממנוחה מגובה רב



$$\tfrac{1}{2}v^2=GM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_0}\right)$$

לא $\sqrt{2gh}$: g משתנה בדרך

12 הדמיה של מסלול בגיליון אלקטרוני



בין כל שתי נקודות: אותו פרק זמן

מכינה את החוק השני של ניוטון ואת חוק הכבידה אפשר "להריץ" צעד אחר צעד, כמו בשיטת אוילר מנושא 2, גם כשהתנועה מסובכת. שמים את הכוכב בראשית, ובכל צעד זמן Δt:

$$a_x = -\frac{GM\,x}{r^3}, \qquad a_y = -\frac{GM\,y}{r^3}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$v_x \leftarrow v_x + a_x \Delta t, \qquad v_y \leftarrow v_y + a_y \Delta t$$

$$x \leftarrow x + v_x \Delta t, \qquad y \leftarrow y + v_y \Delta t$$

את המקום מעדכנים עם המהירות החדשה, וכך המסלול נסגר יפה. בשרטוט $GM = 1$, והגוף מתחיל בנקודה $(1, 0)$ במהירות 1.2 (מהירות 1 הייתה נותנת מעגל), עם $\Delta t = 0.02$. בשרטוט מסומנת נקודה כל 10 צעדים. מתקבלת אליפסה, והנקודות צפופות דווקא רחוק מהכוכב: שם הגוף איטי, כפי שקובע חוק השטחים. בגיליון אפשר לבדוק במספרים את שלושת החוקים של קפלר.

13 עשרה טיפים שחוסכים נקודות

1. מודדים מהמרכז. בכל נוסחה של כבידה r הוא המרחק ממרכז הכוכב: $r = R + h$, ולא הגובה h.

2. לוויין? כבידה = כוח מרכזי. $\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$, ומסת הלוויין מצטמצמת.

3. יחסים במקום מספרים. F ו־g הפוכים ל־r^2, v הפוכה ל־$\sqrt{r}$, ו־T פרופורציוני ל־$r^{3/2}$. בשאלות של "פי כמה" אין צורך ב־G.

4. $GM = gR^2$. כשנתונה תאוצת הנפילה על פני כוכב ולא נתונה המסה שלו, מחליפים את GM ב־gR^2.

5. קפלר השלישי: אותו גוף מרכזי. משווים רק בין גופים שמקיפים אותו כוכב. ירח של צדק ולוויין של כדור הארץ מקיפים גופים שונים, ולכן היחס $\frac{T^2}{r^3}$ שלהם שונה.

6. יחידות. ממירים ימים ושעות לשניות, וקילומטרים למטרים. ביחסים מותר להשאיר יחידות זהות בשני הצדדים, למשל שנים ויחידות אסטרונומיות.

7. mgh **רק ליד הקרקע.** כשהגובה אינו קטן בהרבה מ־R, משתמשים ב־$U = -\frac{GMm}{r}$ ובשימור אנרגיה, ולא בנוסחאות של תאוצה קבועה.

8. שומרים על המינוס. U שלילית, וגם האנרגיה הכוללת של לוויין: $E = -E_k$. אנרגיית קשר היא $-E$, ולכן חיובית.

9. פי $\sqrt{2}$. מהירות המילוט מנקודה מסוימת גדולה פי $\sqrt{2}$ מהמהירות של לוויין במסלול מעגלי באותו מרחק.

10. שינוי מהירות = אליפסה. לוויין שהאיץ או האט לרגע נכנס למסלול אליפטי שעובר דרך הנקודה שבה זה קרה, ולא למעגל חדש (אלא אם האיץ עד מהירות המילוט).

14 טעויות נפוצות

שמונה טעויות שחוזרות בכל מבחן

1. מציבים בחוק הכבידה את הגובה מעל הקרקע במקום המרחק מהמרכז.
2. "בחלל אין כבידה, ולכן האסטרונאוטים מרחפים." הם מרחפים כי הם נופלים יחד עם התחנה.
3. חושבים שכדור הארץ מושך את התפוח חזק יותר ממה שהתפוח מושך אותו. הכוחות שווים, התאוצות שונות.
4. משתמשים ב־mgh ובתאוצה קבועה גם בגבהים של אלפי קילומטרים.
5. משווים בחוק השלישי של קפלר בין גופים שמקיפים כוכבים שונים.
6. "הוספנו ללוויין אנרגיה, ולכן הוא יהיה מהיר יותר." במסלול מעגלי גבוה יותר הוא איטי יותר.
7. שוכחים את המינוס ב־U, ומקבלים אנרגיית קשר שלילית או מהירות מילוט מוזרה.
8. "לוויין שהאיץ עובר למעגל גדול יותר." הוא עובר לאליפסה, או בורח אם הגיע למהירות המילוט.

15 תשובות לתיבות "בדקו את עצמכם"

- **פרק 3:** $T^2 = 4^3 = 64$, ולכן זמן המחזור הוא 8 שנים.
- **פרק 4:** פי 8: פי 2 בגלל המסה, ופי 4 בגלל המרחק.
- **פרק 5:** $M = \frac{gR^2}{G} = \frac{8.9\cdot(6.05\times10^6)^2}{6.67\times10^{-11}} \approx 4.9\times10^{24}\,\text{kg}$.
- **פרק 6:** $\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = \frac{1}{9}$, ולכן $R+h = 3R$ ו־$h = 2R = 12\,800\,\text{km}$.
- **פרק 7:** המהירות קטנה פי $\sqrt{4} = 2$, וזמן המחזור ארוך פי $4^{3/2} = 8$.
- **פרק 8:** $\frac{1}{2}v^2 = GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{4R}\right) = \frac{3GM}{4R}$, ולכן $v = \sqrt{\frac{1.5\,GM}{R}} \approx 9.7\,\text{km/s}$.
- **פרק 9:** E_k קטנה פי 2. האנרגיה הפוטנציאלית עולה: $-\frac{GMm}{r} \to -\frac{GMm}{2r}$: U.
  גם האנרגיה הכוללת עולה: $-\frac{GMm}{2r} \to -\frac{GMm}{4r}$: E, כלומר היא גדלה ב־$\frac{GMm}{4r}$.
- **פרק 10:** $v_e = \sqrt{\frac{2G\cdot4M}{2R}} = \sqrt{2}\cdot11.2 \approx 15.8\,\text{km/s}$.

ומה עכשיו? עברו לקובץ התרגילים של הנושא: 15 שאלות, מהבסיס ועד שאלות אתגר, עם תשובות סופיות בסוף. הנושא הבא בסדרה הוא תנועה הרמונית פשוטה.

16 דף הנוסחאות של הנושא

כבידה בעמוד אחד

חוק הכבידה $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ r בין המרכזים

חוק התקופות $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$ (לגופים שמקיפים אותו גוף) באליפסה: $r = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$

חוק השטחים $r_1 v_1 = r_2 v_2$ בנקודה הקרובה ביותר ובנקודה הרחוקה ביותר

שדה הכבידה $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$ $g = \frac{GM}{r^2}$ $g(h) = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$

מסה של כוכב לפי g על פניו: $M = \frac{gR^2}{G}$ לפי לוויין: $M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$

לוויין במסלול מעגלי $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

לוויין גאוסטציונרי $T = 24\,\text{h}$, מעל קו המשווה, בכיוון הסיבוב $r \approx 4.23 \times 10^7\,\text{m} \approx 6.6R$

אנרגיה פוטנציאלית $U = -\frac{GMm}{r}$ (אפס באינסוף) ליד הקרקע: $\Delta U \approx mg_0 h$

שימור אנרגיה $\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$ כשרק הכבידה עושה עבודה

אנרגיה של לוויין $E_k = \frac{GMm}{2r}$ $U = -\frac{GMm}{r}$ $E = -\frac{GMm}{2r} = -E_k$

אנרגיית קשר לוויין: $\frac{GMm}{2r}$ גוף שנח על פני הכוכב: $\frac{GMm}{R}$

מהירות מילוט $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ ממסלול מעגלי: $\sqrt{2}\,v$ $v_\infty^2 = v^2 - v_e^2$

ערכים בקובץ $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$ $g_0 = 9.8\,\text{m/s}^2$ $v_e \approx 11.2\,\text{km/s}$

כדור הארץ $M_E = 6.0 \times 10^{24}\,\text{kg}$ $R_E = 6.4 \times 10^6\,\text{m}$ $GM_E \approx 4.0 \times 10^{14}\,\text{m}^3/\text{s}^2$

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את הקובץ בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אסור להעתיק ממנו תרגילים או איורים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות בלי אישור בכתב.
הקובץ נכתב בידי אינסוף ואינו פרסום רשמי של משרד החינוך או של גוף אחר.