תנועה מעגלית

קובץ הסבר • מהירות זוויתית, תאוצה רדיאלית, כבישים, מטוטלות ומעגל אנכי

אינסוף
פיזיקה • מכניקה

כיתה י״א | 5 יח״ל | מכינה קדם־אקדמית

מה תמצאו כאן?

עד עכשיו עסקנו בעיקר בכוחות שמאיצים גוף או מאטים אותו. כאן נפגוש כוח שקול שמשנה רק את **הכיוון** של המהירות. נתאר תנועה במעגל בעזרת זמן מחזור, תדירות ומהירות זוויתית, ונבין למה גוף שנע במעגל במהירות קבועה בגודלה הוא גוף מואץ. אחר כך נכתוב את החוק השני של ניוטון בכיוון מרכז המעגל, ונפעיל אותו בכבישים אופקיים ונטויים, במטוטלת קונית, במטוטלת פשוטה ובמעגל אנכי. שני עמודי ״מקרים״ מרכזים 36 מצבים: 18 של תנועה במעגל אופקי, ו־18 של מעגל אנכי ומטוטלות. אחרי הקובץ הזה מחכה לכם קובץ של 15 תרגילים באותו נושא.

מה כדאי לדעת קודם? חיסור וקטורים ופירוק לרכיבים (נושא 1), חוקי ניוטון, חיכוך ותרשים כוחות (נושא 2), ושימור אנרגיה (נושא 3). בכמה שאלות משולבות נשתמש גם בשימור תנע (נושא 4).

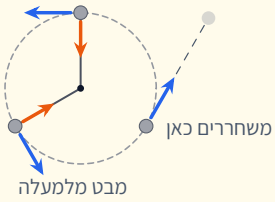
צבעי החצים: מהירות בכחול →, תאוצה באדום →, כוחות בכתום →, משקל בסגול →.

סימון: בנושא הזה T הוא זמן המחזור, ולכן את המתיחות בחוט נסמן ב־F_T.

1 הרעיון הגדול: למה צריך כוח כדי לנוע במעגל?

בגובה העיניים

סובבו צרור מפתחות על שרוך, במעגל אופקי מעל הראש. היד שלכם מושכת את השרוך כל הזמן **פנימה**, לכיוון מרכז המעגל, ובכל זאת המפתחות לא מתקרבים אליכם. אם תשחררו את השרוך, המפתחות לא יעופו ״החוצה״ מהמרכז: במבט מלמעלה הם ימשיכו בקו ישר, **במשיק למעגל**, מהנקודה שבה שחררתם (וכמובן גם ייפלו). זה החוק הראשון של ניוטון: כשאין כוח שקול במישור התנועה, הגוף לא סוטה הצידה. כדי לכופף את המסלול למעגל צריך כוח שמושך כל הזמן לצד הקעור של המסלול, כלומר אל המרכז.



תנועה במעגל במהירות שגודלה קבוע נקראת **תנועה מעגלית קצובה**. גודל המהירות לא משתנה, אבל הכיוון שלה משתנה בכל רגע. לכן יש לגוף תאוצה, ולפי החוק השני פועל עליו כוח שקול. בפרקים הבאים נמצא לאן התאוצה פונה ומה גודלה, ונראה מי מפעיל את הכוח הזה במצבים שונים.

2 זמן מחזור, תדירות ומהירות זוויתית

תנועה במעגל חוזרת על עצמה, ולכן מתארים אותה בגדלים של תנועה מחזורית.

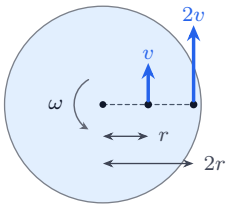
גדלים של תנועה במעגל

$$v = \omega r \qquad \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{2\pi r}{v}$$

זמן המחזור T הוא הזמן של סיבוב שלם, בשניות. **התדירות** f היא מספר הסיבובים בשנייה, ביחידות הרץ ($1\,\text{Hz} = 1\,\text{s}^{-1}$).
המהירות הזוויתית ω היא הזווית שהרדיוס סורק בכל שנייה, ברדיאנים לשנייה (rad/s).

רדיאנים. זווית מרכזית של רדיאן אחד היא זווית שהקשת שמולה ארוכה בדיוק כמו הרדיוס. לכן אורך הקשת הוא $s = r\theta$, כש־θ ברדיאנים, וסיבוב שלם הוא $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ רדיאנים, כלומר 360°. מכאן גם הקשר $v = \omega r$: בזמן Δt הגוף עובר קשת שאורכה $r\,\Delta\theta$, ולכן $v = \frac{r\,\Delta\theta}{\Delta t} = \omega r$. מכשירים ומנועים רבים מציינים את קצב הסיבוב ב**סל״ד**, סיבובים לדקה. מחלקים ב־60 ומקבלים הרץ.

© אור בן שטרית · אינסוף



בגוף קשיח שמסתובב, לכל הנקודות אותה מהירות זוויתית ואותו זמן מחזור. המהירות v, שנקראת גם **מהירות קווית**, גדלה עם המרחק מהציר: נקודה שרחוקה מהציר פי 2 עוברת באותו זמן מעגל ארוך פי 2, ולכן מהירותה כפולה.

דוגמה פתורה

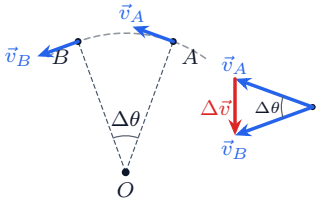
גלגל ענק שרדיוסו $20\,\text{m}$ משלים סיבוב ב־$40\,\text{s}$.

- התדירות: $f = \frac{1}{40} = 0.025\,\text{Hz}$.
- המהירות הזוויתית: $\omega = \frac{2\pi}{40} \approx 0.157\,\text{rad/s}$.
- מהירות הנוסעים: $v = \omega r \approx 0.157 \cdot 20 \approx 3.14\,\text{m/s}$. אותה תוצאה מתקבלת גם מהנוסחה $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 20}{40}$.

בדקו את עצמכם

תקליט מסתובב ב־45 סל״ד. מה התדירות שלו, מה זמן המחזור ומה המהירות הזוויתית? (התשובות לכל תיבות ״בדקו את עצמכם״ נמצאות בסוף הקובץ.)

3 התאוצה הרדיאלית



נסתכל על גוף בתנועה מעגלית קצובה בשני רגעים קרובים, בנקודות A ו־B. לשתי המהירויות אותו גודל v, אבל כל אחת מהן ניצבת לרדיוס שלה, ולכן הזווית ביניהן היא $\Delta\theta$, בדיוק כמו הזווית בין הרדיוסים. משרטטים את שתי המהירויות מאותה נקודה, והשינוי $\Delta\vec{v}$ (באדום, כי התאוצה בכיוון שלו) סוגר משולש שווה שוקיים **דומה** למשולש OAB. לכן

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\overline{AB}}{r} \approx \frac{v\,\Delta t}{r} \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

כשהרגעים קרובים מאוד, $\Delta\vec{v}$ ניצב למהירות ופונה **אל מרכז המעגל**.

התאוצה בתנועה מעגלית קצובה

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

התאוצה פונה תמיד **אל מרכז המעגל**, ולכן קוראים לה **תאוצה רדיאלית** (לאורך הרדיוס) או **צנטריפטלית** (״שואפת למרכז״). הגודל שלה קבוע, אבל הכיוון שלה מסתובב יחד עם הגוף. לכן זו לא תנועה בתאוצה קבועה, והנוסחאות של נושא 1 לא מתאימות לה.

מה נע במעגל?	רדיוס	מהירות	תאוצה רדיאלית
נקודה על קו המשווה, בסיבוב כדור הארץ	$6400\,\text{km}$	$465\,\text{m/s}$	$0.034\,\text{m/s}^2$
נוסע בגלגל הענק מהדוגמה	$20\,\text{m}$	$3.14\,\text{m/s}$	$0.49\,\text{m/s}^2$
מכונית בכיכר	$50\,\text{m}$	$15\,\text{m/s}$	$4.5\,\text{m/s}^2$
מבחנה בצנטריפוגה, 3000 סל״ד	$10\,\text{cm}$	$31.4\,\text{m/s}$	$\approx 9870\,\text{m/s}^2$, פי ≈ 1000 מ־g

טעות נפוצה

״המהירות קבועה, ולכן אין תאוצה.״ **לא:** רק הגודל של המהירות קבוע. הכיוון שלה משתנה, ולכן יש תאוצה ויש כוח שקול. גוף שלא פועל עליו כוח שקול נע בקו ישר, ולא במעגל.

בדקו את עצמכם

מכונית עוברת באותה כיכר בחצי מהמהירות. פי כמה קטנה התאוצה הרדיאלית שלה? ומה אם היא נוסעת במהירות המקורית בכיכר שהרדיוס שלה כפול?

© אור בן שטרית · אינסוף

4 החוק השני בכיוון המרכז

החוק השני בתנועה מעגלית

$$\Sigma F_R = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$$

ΣF_R הוא סכום הרכיבים של כל הכוחות **בכיוון המרכז**: רכיב שפונה אל המרכז נכנס בסימן חיובי, ורכיב שפונה החוצה, בסימן שלילי. בתנועה קצובה זה כל הכוח השקול, ובכיוון שניצב למישור המעגל הכוחות מתאזנים.

"כוח צנטריפטלי" הוא שם של תפקיד, ולא סוג של כוח. הכוח הצנטריפטלי, או בשמו האחר **הכוח המרכזי**, הוא השקול של הכוחות בכיוון המרכז, ולא כוח נוסף שמצטרף לתרשים. בתרשים מופיעים רק הכוחות המוכרים מנושא 2: מתיחות, כוח נורמלי, חיכוך, כוח קפיץ ומשקל. אחד מהם, או השקול של כמה מהם, ממלא את התפקיד הזה. בעמוד ה"מקרים" הראשון יש 18 דוגמאות.

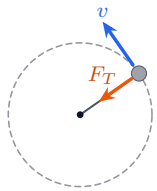
השיטה בארבעה צעדים:

1. משרטטים את הכוחות האמיתיים בלבד, ומסמנים את מרכז המעגל.
2. בוחרים ציר אחד אל המרכז, וציר שני שניצב למישור המעגל (בדרך כלל, האנך).
3. כותבים $\Sigma F_R = m\frac{v^2}{r}$ בציר הרדיאלי, ו־$\Sigma F = 0$ בציר הניצב.
4. מקשרים בין v, ω, T ו־r לפי הצורך, ופותרים.

דוגמה פתורה

אבן שמסתה $0.2\,\text{kg}$ קשורה לחוט שאורכו $0.5\,\text{m}$. הקצה השני של החוט קשור למסמר, והאבן מסתובבת סביבו על שולחן אופקי חלק, 2 סיבובים בשנייה.

- $\omega = 2\pi f = 4\pi \approx 12.57\,\text{rad/s}$, ו־$v = \omega r \approx 6.28\,\text{m/s}$.
- בכיוון האנכי המשקל והכוח הנורמלי מתאזנים. בכיוון המרכז פועלת רק המתיחות, ולכן $F_T = m\omega^2 r \approx 0.2 \cdot 12.57^2 \cdot 0.5 \approx 15.8\,\text{N}$.



מבט מלמעלה

"הכוח הצנטריפוגלי זורק אותי החוצה"

במכונית שנכנסת לסיבוב, הנוסע מרגיש שמשהו דוחף אותו אל הדלת. **אבל** ביחס לקרקע אין כוח כזה: הנוסע ממשיך ישר לפי החוק הראשון, והמכונית פונה מתחתיו, עד שהדלת לוחצת עליו פנימה ומספקת לו כוח מרכזי. מי שפותר במערכת הייחוס של המכונית יכול להוסיף "כוח מדומה" שגודלו $m\frac{v^2}{r}$, החוצה מהמרכז, כמו הכובד המדומה של נושא 2. בבגרות עדיף לפתור ביחס לקרקע, ואסור לערבב בין שתי השיטות באותו תרשים.

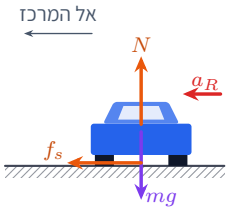
בדקו את עצמכם

בדוגמה, מה תהיה המתיחות בחוט אם האבן תשלים 4 סיבובים בשנייה?

5 סיבוב בכביש: אופקי ונטוי

מכונית שנכנסת לסיבוב צריכה כוח שקול אל מרכז הסיבוב. מי מפעיל אותו?

כביש אופקי: החיכוך הסטטי



בכביש אופקי, הכוח היחיד שיכול לפעול על המכונית בכיוון המרכז הוא **החיכוך בין הצמיגים לכביש**. זה חיכוך סטטי, כי הצמיג המתגלגל לא מחליק הצידה. לכן $f_s = m\frac{v^2}{r}$, והחיכוך הזה לא יכול לעבור את $\mu_s N = \mu_s mg$:

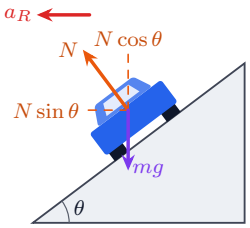
$$m\frac{v^2}{r} \le \mu_s mg \quad\Longrightarrow\quad v_{\max} = \sqrt{\mu_s g r}$$

המסה מצטמצמת. משאית ואופנוע מתחילים להחליק באותה מהירות, אם מקדם החיכוך שלהם זהה.

© אור בן שטרית · אינסוף

דוגמה. בסיבוב שרדיוסו $50\,\text{m}$, כשמקדם החיכוך הסטטי 0.8: $v_{\max}=\sqrt{0.8\cdot 10\cdot 50}=20\,\text{m/s}$, כלומר $72\,\text{km/h}$. בכביש רטוב, כש־$\mu_s=0.4$, המהירות המרבית יורדת ל־$\sqrt{200}\approx 14.1\,\text{m/s}$, כ־$51\,\text{km/h}$. מכונית שנכנסת לסיבוב מהר יותר מחליקה החוצה: החיכוך כבר לא מספיק כדי לכופף את המסלול שלה, והיא ממשיכה במסלול ישר יותר.

כביש נטוי: הכוח הנורמלי עוזר



בכביש נטוי (משופע) בזווית θ, הכוח הנורמלי ניצב לכביש, ולכן הוא נוטה לכיוון מרכז הסיבוב. הרכיב האופקי שלו, $N\sin\theta$, יכול לספק את כל הכוח המרכזי, גם בלי חיכוך:

$$N\cos\theta=mg,\qquad N\sin\theta=m\frac{v^2}{r}\qquad\Longrightarrow\qquad \tan\theta=\frac{v^2}{gr}$$

המהירות שמקיימת את המשוואה הזאת נקראת **מהירות התכנון** של הסיבוב.

דוגמה פתורה

בקטע המעוקל של מסלול אופניים (ולודרום), המסלול נטוי ב־$37°$, ורדיוס הסיבוב $30\,\text{m}$.

- מהירות התכנון: $v=\sqrt{gr\tan\theta}=\sqrt{10\cdot 30\cdot 0.75}=15\,\text{m/s}$, כלומר $54\,\text{km/h}$.
- הכוח הנורמלי: $N=\frac{mg}{\cos 37°}=1.25\,mg$. הרוכב "כבד" ב־$25\%$ בזמן הסיבוב.

טעות נפוצה

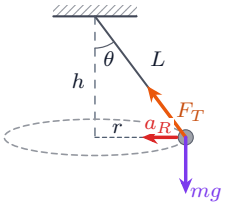
"במדרון $N=mg\cos\theta$, אז גם בכביש נטוי." **לא:** $N=mg\cos\theta$ נכון כשהתאוצה לאורך המדרון, או כשאין תאוצה, כמו בנושא 2. בכביש נטוי התאוצה אופקית, אל המרכז. כשאין חיכוך, משוואת הכוחות בכיוון האנכי נותנת $N=\frac{mg}{\cos\theta}$, יותר מהמשקל.

ואם יש גם חיכוך? כשנוסעים מהר יותר ממהירות התכנון, בלי חיכוך המכונית הייתה גולשת החוצה ולמעלה. לכן החיכוך פועל **במורד** הכביש ומוסיף כוח מרכזי. כשנוסעים לאט יותר ממהירות התכנון, בלי חיכוך היא הייתה גולשת פנימה ולמטה, ולכן החיכוך פועל **במעלה** הכביש. כך מתקבל תחום של מהירויות שבהן אפשר לעבור את הסיבוב בלי להחליק. בכל מקרה מפרקים את N ואת f_s לרכיב אופקי, אל המרכז, ולרכיב אנכי, וכותבים שתי משוואות: $\Sigma F=0$ באנך, ו־$\Sigma F_R=m\frac{v^2}{r}$ (מקרים 5 ו־6 בעמוד ה"מקרים" הראשון).

בדקו את עצמכם

באיזו זווית צריך להטות את הכביש בסיבוב שרדיוסו $100\,\text{m}$, כדי שמכוניות יעברו בו ב־$20\,\text{m/s}$ גם בלי חיכוך?

6 מטוטלת קונית



כדור תלוי בחוט שאורכו L ומסתובב במעגל אופקי, כך שהחוט יוצר זווית קבועה θ עם האנך. החוט "מצייר" חרוט, ומכאן השם. על הכדור פועלים רק שני כוחות: המשקל והמתיחות. הרכיב האנכי של המתיחות מאזן את המשקל, והרכיב האופקי שלה הוא הכוח המרכזי:

$$F_T\cos\theta=mg,\qquad F_T\sin\theta=m\frac{v^2}{r},\qquad r=L\sin\theta$$

מחלקים את המשוואות ומקבלים שוב $\tan\theta=\frac{v^2}{gr}$, בדיוק כמו בכביש נטוי. מציבים $v=\omega r$ ו־$r=L\sin\theta$, ומקבלים $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\omega^2 L\sin\theta}{g}$. הסינוס מצטמצם, ולכן $\omega^2=\frac{g}{L\cos\theta}$, וזמן המחזור הוא

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

כאשר $h=L\cos\theta$ הוא הגובה של נקודת התלייה מעל מישור המעגל.

© אור בן שטרית · אינסוף

התוצאה מפתיעה: זמן המחזור **לא תלוי במסה**, ולא תלוי בנפרד באורך החוט או בזווית, אלא רק בגובה h. ככל שמסובבים מהר יותר, הזווית גדלה והכדור עולה, אבל החוט אף פעם לא מגיע למצב אופקי. בזווית 90° הרכיב האנכי של המתיחות היה מתאפס, ושום כוח לא היה מאזן את המשקל.

דוגמה פתורה

מטוטלת קונית שאורכה $L = 1\,\text{m}$ מסתובבת כשהחוט יוצר זווית של 37° עם האנך.

- רדיוס המעגל: $r = L\sin 37^\circ = 0.6\,\text{m}$. הגובה: $h = L\cos 37^\circ = 0.8\,\text{m}$.
- $\omega = \sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{12.5} \approx 3.54\,\text{rad/s}$, וזמן המחזור $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 1.78\,\text{s}$.
- המתיחות: $F_T = \frac{mg}{\cos 37^\circ} = 1.25\,mg$. היא תלויה רק במסה ובזווית, ולא באורך החוט.

בדקו את עצמכם

אותה מטוטלת מסתובבת מהר יותר, כך שהחוט יוצר זווית של 53° עם האנך. מה זמן המחזור עכשיו?

7 תנועה מעגלית שאינה קצובה: מטוטלת פשוטה

כשגם הגודל של המהירות משתנה, לתאוצה יש שני רכיבים:

- **רכיב רדיאלי**, $a_R = \frac{v^2}{r}$, אל המרכז. הוא משנה את הכיוון של המהירות, ותלוי במהירות הרגעית.
- **רכיב משיקי**, a_t, לאורך המסלול. הוא משנה את הגודל של המהירות.

התאוצה הכוללת כבר לא פונה אל המרכז. גם כאן מגדירים **מהירות זוויתית רגעית**: $\omega = \frac{v}{r}$, לפי המהירות באותו רגע.

תנועה מעגלית שאינה קצובה

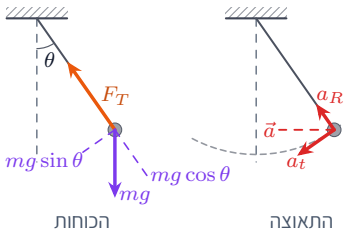
$$a = \sqrt{a_R^2 + a_t^2} \qquad \Sigma F_R = m\frac{v^2}{r} \qquad \Sigma F_t = m\,a_t$$

את החוק השני כותבים לכל רכיב בנפרד. המשוואה הרדיאלית נכונה בכל רגע, עם המהירות של אותו רגע.

מטוטלת פשוטה. על הכדור פועלים רק שני כוחות: המתיחות, שתמיד פונה אל נקודת התלייה, והמשקל. כשהחוט יוצר זווית θ עם האנך, מפרקים את המשקל לשני רכיבים: $mg\sin\theta$ לאורך המשיק, ו־$mg\cos\theta$ לאורך החוט, החוצה מהמרכז. לכן

$$a_t = g\sin\theta \qquad F_T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{L}$$

את המהירות בכל זווית נותן שימור האנרגיה (נושא 3), והמשוואה הרדיאלית נותנת את המתיחות.



מקרים כוח מרכזי: מי מספק אותו? – 18 מקרים

בכל כרטיס מופיעים רק כוחות אמיתיים, ובתחתיתו המשוואה המרכזית של המקרה.

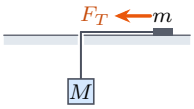
1 אבן בחוט על שולחן חלק



$$F_T = m\frac{v^2}{r}$$

מבט מלמעלה: המתיחות היא הכוח המרכזי

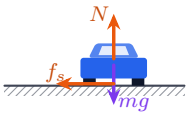
2 דיסקית וגוף תלוי



$$Mg = m\frac{v^2}{r}$$

שולחן חלק, והגוף התלוי במנוחה

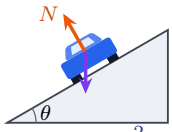
3 מכונית בכביש אופקי



$$f_s = m\frac{v^2}{r} \le \mu_s mg$$

$v_{\max} = \sqrt{\mu_s gr}$, בלי תלות במסה

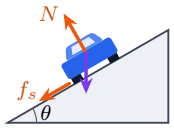
4 כביש נטוי, מהירות התכנון



$$\tan\theta = \frac{v^2}{gr}$$

בלי חיכוך: $N\sin\theta$ הוא הכוח המרכזי

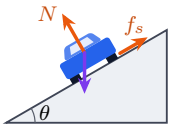
5 כביש נטוי, מהר מדי



$$N\sin\theta + f_s\cos\theta = m\frac{v^2}{r}$$

החיכוך במורד הכביש

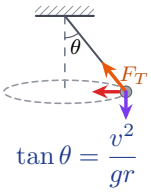
6 כביש נטוי, לאט מדי



$$N\sin\theta - f_s\cos\theta = m\frac{v^2}{r}$$

החיכוך במעלה הכביש

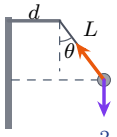
7 מטוטלת קונית



$$\tan\theta = \frac{v^2}{gr}$$

$r = L\sin\theta$, וזמן המחזור $2\pi\sqrt{h/g}$

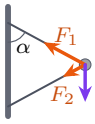
8 כיסא בקרוסלת שרשראות



$$\tan\theta = \frac{\omega^2 r}{g}$$

המרכז על התורן: $r = d + L\sin\theta$

9 כדור על שני חוטים ומוט מסתובב



$$(F_1 + F_2)\sin\alpha = m\omega^2 r$$

ובאנך: $(F_1 - F_2)\cos\alpha = mg$

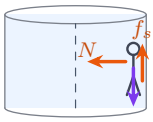
10 מטבע על פטיפון



$$f_s = m\omega^2 r \le \mu_s mg$$

החיכוך הסטטי פונה אל הציר

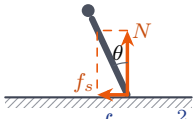
11 רוטור בלונה פארק



$$N = m\omega^2 r$$

החיכוך מחזיק, N מסובב: $f_s = mg$

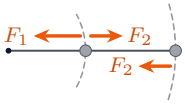
12 אופנוע נוטה בסיבוב



$$\tan\theta = \frac{f_s}{N} = \frac{v^2}{gr}$$

השקול של N ו־f_s לאורך האופנוע

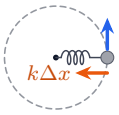
13 שני גופים על אותו חוט



$$F_1 - F_2 = m\omega^2 r_1$$

החוט הפנימי מתוח יותר: $F_2 = m\omega^2 r_2$

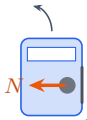
14 קפיץ במקום חוט



$$k(r - L_0) = m\omega^2 r$$

הקפיץ מתארך עד שהכוח שלו מספיק

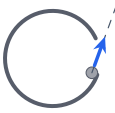
15 נוסע במכונית בסיבוב



$$N = m\frac{v^2}{r}$$

הדלת דוחפת את הנוסע פנימה

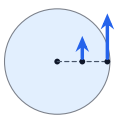
16 כדור יוצא מטבעת פתוחה



$$\Sigma\vec{F} = 0$$

מבט מלמעלה: ממשיך במשיק, ישר

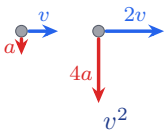
17 נקודות על גלגל מסתובב



$$v = \omega r, \quad a_R = \omega^2 r$$

אותה ω לכל הנקודות

18 מהירות כפולה



$$a_R = \frac{v^2}{r}$$

תאוצה וכוח שקול גדולים פי 4

© אור בן שטרית · אינסוף

דוגמה פתורה

כדור שמסתו $1\,\text{kg}$ תלוי בחוט שאורכו $L = 2\,\text{m}$. מחזיקים אותו כשהחוט אופקי, ומשחררים ממנוחה. כשהחוט יוצר זווית θ עם האנך, הכדור כבר ירד $L\cos\theta$, ולכן משימור האנרגיה $v^2 = 2gL\cos\theta$. מכאן $a_R = \frac{v^2}{L}$, $a_t = g\sin\theta$, והמתיחות $F_T = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{L} = 3mg\cos\theta$.

	ברגע השחרור	החוט ב־$53°$ לאנך	בנקודה התחתונה
$v^2\ (\text{m}^2/\text{s}^2)$	0	24	40
$a_R\ (\text{m}/\text{s}^2)$	0	12	20
$a_t\ (\text{m}/\text{s}^2)$	10	8	0
$a\ (\text{m}/\text{s}^2)$	10	$\sqrt{12^2+8^2} \approx 14.4$	20
$F_T\ (\text{N})$	0	18	30

ברגע השחרור התאוצה כולה משיקית, $a = g$, והחוט רפוי לרגע. בנקודה התחתונה התאוצה כולה רדיאלית, והמתיחות **גדולה** פי 3 מהמשקל.

טעות נפוצה

"בנקודה התחתונה $F_T = mg$, כי שם החוט אנכי." **לא:** בנקודה התחתונה הכדור נע במעגל, ולכן יש לו תאוצה רדיאלית כלפי מעלה. המתיחות גדולה מהמשקל: $F_T = mg + m\frac{v^2}{L}$. היא שווה למשקל רק כשהכדור תלוי במנוחה.

בדקו את עצמכם

מטוטלת שמסתה $0.2\,\text{kg}$ ואורכה $0.5\,\text{m}$ משוחררת ממנוחה, כשהחוט יוצר זווית של $37°$ עם האנך. מה המתיחות ברגע השחרור, ומה היא בנקודה התחתונה?

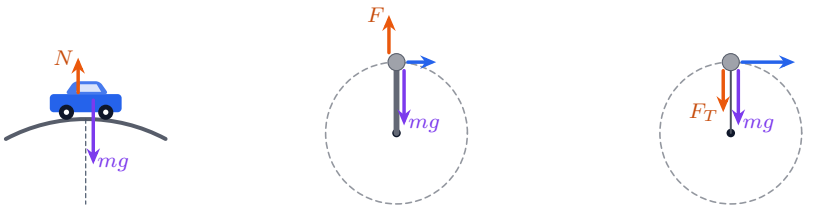
8 תנועה במעגל אנכי

כדור על חוט, קרון ברכבת הרים, רוכב בלולאה: כשרק הכובד עושה עבודה, בלי מנוע ובלי חיכוך, גוף שמסתובב במעגל אנכי מאט בדרך למעלה ומאיץ בדרך למטה. אפשר להבין את זה בשתי דרכים, והן מסכימות:

- **אנרגיה:** בעלייה האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית גדלה, ולכן האנרגיה הקינטית קטנה. בין הנקודה התחתונה לעליונה הגובה עולה ב־$2r$, ולכן $v_{\text{bottom}}^2 = v_{\text{top}}^2 + 4gr$.
- **דינמיקה:** בחצי העולה, הרכיב המשיקי של המשקל מנוגד למהירות, והוא מאט את הגוף. בחצי היורד הוא בכיוון המהירות.

גם זו תנועה מחזורית: כשאין חיכוך, הגוף חוזר לכל נקודה במעגל באותה מהירות.

הנקודה העליונה: המהירות הקריטית



מכונית בראש גבעה | מוט קשיח (או צינור) | חוט (או מסילה מבפנים)

בנקודה העליונה של מעגל אנכי, המשקל והמתיחות פונים שניהם כלפי מטה, אל המרכז:

$$F_T + mg = m\frac{v_{\text{top}}^2}{r}$$

חוט יכול רק למשוך, כלומר $F_T \geq 0$, ולכן $m\frac{v_{\text{top}}^2}{r} \geq mg$:

$$v_{\text{top}} \geq \sqrt{gr}$$

זו **המהירות הקריטית**. במהירות הזאת המשקל לבדו מספק את כל הכוח המרכזי, והחוט רפוי לרגע. כך גם במסילה שהגוף נע על הצד הפנימי שלה, כמו קרון בלולאה של רכבת הרים: המסילה יכולה רק לדחוף אותו כלפי המרכז.

- **מוט קשיח או צינור** יכולים גם לדחוף החוצה, כלומר לתמוך בגוף מלמטה, ולכן מספיק $v_{\text{top}} > 0$.
- **מכונית בראש גבעה** נמצאת על הצד החיצוני של המעגל. הכביש יכול רק לדחוף אותה כלפי מעלה, החוצה מהמרכז, ולכן $mg - N = m\frac{v^2}{r}$ ו־$v \le \sqrt{gr}$. במהירות גבוהה יותר המכונית מתנתקת מהכביש.

מעגל אנכי, חוט או מסילה מבפנים

בנקודה העליונה	בנקודה התחתונה	בין שתי הנקודות
$F_T + mg = m\frac{v_{\text{top}}^2}{r}$	$F_T - mg = m\frac{v_{\text{bottom}}^2}{r}$	$v_{\text{bottom}}^2 = v_{\text{top}}^2 + 4gr$

במסילה כותבים N במקום F_T. מכאן שתי תוצאות שימושיות: כדי להשלים סיבוב צריך $v_{\text{bottom}} \ge \sqrt{5gr}$, ובכל מהירות שבה הגוף משלים סיבוב, המתיחות בתחתית גדולה ב־$6mg$ מהמתיחות בראש.

דוגמה פתורה

קרון של רכבת הרים, שמסתו עם הנוסעים $400\,\text{kg}$, משוחרר ממנוחה מגובה h ונכנס ללולאה אנכית שרדיוסה $8\,\text{m}$. נזניח את החיכוך.

- בנקודה העליונה המסילה יכולה רק לדחוף את הקרון כלפי מטה ($N \ge 0$), ולכן $v_{\text{top}} \ge \sqrt{gr} = \sqrt{80} \approx 8.9\,\text{m/s}$.
- הגובה המינימלי: $mgh = mg(2r) + \frac{1}{2}m\,gr$, ולכן $h = 2.5r = 20\,\text{m}$.
- בתחתית הלולאה המהירות היא $v = \sqrt{2gh} = 20\,\text{m/s}$, ולכן $N = mg + m\frac{v^2}{r} = 24\,000\,\text{N}$, **פי 6 מהמשקל**.

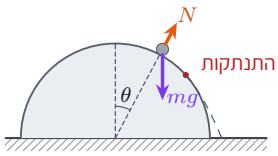
למה לולאות של רכבות הרים לא עגולות?

מי שעובר בראש של לולאה עגולה במהירות הקריטית נלחץ למושב בתחתית שלה בכוח שגדול פי 6 ממשקלו. כדי להקטין את העומס, בונים לולאות צרות למעלה ורחבות למטה. בתחתית, שבה המהירות גבוהה, הרדיוס גדול והכוח המרכזי קטן יותר. בראש, שבו המהירות נמוכה, הרדיוס קטן, ולכן גם מהירות נמוכה מספיקה כדי לעבור בו בלי להתנתק.

התנתקות: כשהכוח הנורמלי מתאפס

גוף שנע על מסילה עוזב אותה ברגע שהכוח הנורמלי מתאפס, וגוף על חוט, ברגע שהמתיחות מתאפסת. מאותו רגע פועל עליו רק המשקל, והוא נע כגוף שנזרק (נושא 1). לכן **גם כשיש לגוף מספיק אנרגיה כדי להגיע לגובה של הנקודה העליונה, הוא עלול לא להגיע אליה**: הוא מתנתק לפני כן, כשהמהירות שלו עדיין לא אפס. גוף על מוט או בתוך צינור לא מתנתק, כי המוט והצינור דוחפים לשני הכיוונים.

דוגמה. גוף קטן מתחיל להחליק מראש של כיפה חלקה שרדיוסה R, במהירות התחלתית זניחה. איפה הוא יעזוב את הכיפה?



- כשהרדיוס אל הגוף יוצר זווית θ עם האנך, הרכיב של המשקל אל המרכז הוא $mg\cos\theta$, והכוח הנורמלי פונה החוצה: $mg\cos\theta - N = m\frac{v^2}{R}$.
- משימור אנרגיה: $v^2 = 2gR(1-\cos\theta)$.
- בהתנתקות $N = 0$: $g\cos\theta = 2g(1-\cos\theta)$, ולכן $\cos\theta = \frac{2}{3}$, כלומר $\theta \approx 48°$. הגוף עוזב את הכיפה בגובה $\frac{2}{3}R$ מעל המרכז, והזווית הזאת לא תלויה ברדיוס ולא במסה.

בדקו את עצמכם

כדור קשור לחוט שאורכו $0.9\,\text{m}$ ומסתובב במעגל אנכי. מה המהירות המינימלית שלו בנקודה העליונה? ומה המהירות שלו אז בנקודה התחתונה?

מקרים מעגל אנכי ומטוטלות – 18 מקרים

הכוחות בכתום ובסגול, והתאוצה באדום. בנקודה העליונה "אל המרכז" הוא כלפי מטה, ובנקודה התחתונה, כלפי מעלה.

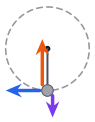
1 חוט, בנקודה העליונה



$$F_T + mg = m\frac{v^2}{r}$$

$v_{\min} = \sqrt{gr}$, כש־$F_T = 0$

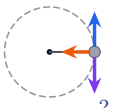
2 חוט, בנקודה התחתונה



$$F_T - mg = m\frac{v^2}{r}$$

המתיחות גדולה מהמשקל

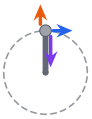
3 חוט, בגובה המרכז



$$F_T = m\frac{v^2}{r}$$

המשקל כולו משיקי, ולכן $a_t = g$

4 מוט, בנקודה העליונה



$$mg - F = m\frac{v^2}{r}$$

מוט יכול גם לדחוף: מספיק $v_{\text{top}} > 0$

5 כדור בתוך צינור



$$v_{\text{top}} > 0$$

הצינור דוחף מבפנים או מבחוץ

6 לולאה במסלול



$$h_{\min} = 2.5r$$

משחררים ממנוחה, בלי חיכוך

7 קרון בראש הלולאה



$$N + mg = m\frac{v^2}{r}$$

בראש הלולאה המסילה דוחפת כלפי מטה

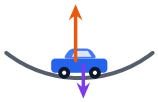
8 מכונית בראש גבעה



$$mg - N = m\frac{v^2}{r}$$

$v_{\max} = \sqrt{gr}$, אחרת המכונית "ממריאה"

9 מכונית בשקע



$$N - mg = m\frac{v^2}{r}$$

הנוסעים מרגישים "כבדים"

10 דלי מים מעל הראש



$$v_{\text{top}} \geq \sqrt{gr}$$

והמים לא נשפכים

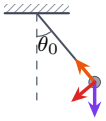
11 גלגל ענק: למעלה ולמטה



$$N = mg \mp m\frac{v^2}{r}$$

למעלה "קלים", למטה "כבדים"

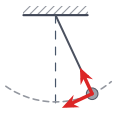
12 מטוטלת ברגע השחרור



$$F_T = mg\cos\theta_0$$

$a = g\sin\theta_0$,$a_R = 0$:$v = 0$

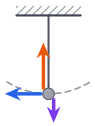
13 מטוטלת בדרך למטה



$$a_t = g\sin\theta, \quad a_R = \frac{v^2}{L}$$

התאוצה כבר לא פונה אל המרכז

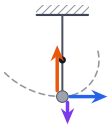
14 מטוטלת בנקודה התחתונה



$$F_T = mg + m\frac{v^2}{L}$$

$a_t = 0$: התאוצה כולה רדיאלית

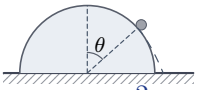
15 חוט נתפס במסמר



$$F_T = mg + m\frac{v^2}{r'}$$

אותה מהירות ברדיוס קטן: המתיחות קופצת

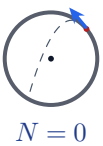
16 גוף מחליק מראש כיפה



$$\cos\theta = \frac{2}{3}$$

מתנתק כש־$N = 0$, בלי תלות ב־R

17 התנתקות בתוך לולאה



$$N = 0$$

מאותו רגע: תנועה של גוף שנזרק

18 ההפרש הקבוע: $6mg$



$$F_{T,\text{bottom}} - F_{T,\text{top}} = 6mg$$

בחוט, בכל מהירות שבה הגוף משלים סיבוב

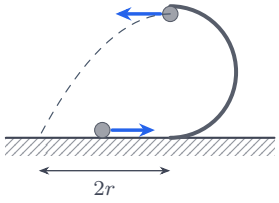
9 שאלות משולבות: תנע, אנרגיה וזריקה

שאלות בגרות רבות בנויות כשרשרת של שלבים, ולכל שלב חוק משלו. העבודה העיקרית היא לזהות איפה נגמר שלב אחד ומתחיל הבא.

1. התנגשות קצרה	←	2. תנועה במעגל	←	3. התנתקות או חוט שנקרע
שימור תנע (נושא 4)		אנרגיה, וגם $\Sigma F_R = m\frac{v^2}{r}$		זריקה (נושא 1)

- **בהתנגשות** לא משמרים אנרגיה קינטית, אלא אם נאמר שההתנגשות אלסטית. ההתנגשות קצרה מאוד, ולכן התנע נשמר בה. כשגוף תלוי בחוט אנכי, נשמר התנע האופקי, כי המתיחות והמשקל אנכיים.
- **לאורך הסיבוב** לא משמרים תנע, כי המתיחות והמשקל משנים אותו כל הזמן. כאן משמרים אנרגיה מכנית, אם אין חיכוך, ובנקודות המיוחדות כותבים את המשוואה הרדיאלית.
- **אחרי ההתנתקות** הגוף נע בתאוצה g כלפי מטה. המהירות ההתחלתית שלו היא המהירות ברגע ההתנתקות, במשיק למעגל.

דוגמה פתורה



מסילה חלקה בצורת חצי מעגל אנכי, שרדיוסו $r = 0.4\,\text{m}$, עומדת על רצפה אופקית. כדור קטן נכנס אליה בנקודה התחתונה, עולה לאורכה, ויוצא ממנה אופקית בנקודה העליונה.

- בנקודה העליונה צריך $v_{\text{top}} \geq \sqrt{gr} = 2\,\text{m/s}$, אחרת הכדור יתנתק לפני היציאה.
- משימור האנרגיה, בכניסה צריך $v \geq \sqrt{5gr} \approx 4.5\,\text{m/s}$.
- מהנקודה העליונה הכדור נזרק אופקית מגובה $2r = 0.8\,\text{m}$, וזמן הנפילה שלו $t = \sqrt{\frac{2\cdot 0.8}{10}} = 0.4\,\text{s}$.
- במהירות המינימלית הכדור נוחת במרחק $2 \cdot 0.4 = 0.8\,\text{m}$, כלומר בדיוק $2r$ מנקודת הכניסה. במהירות גדולה יותר הוא נוחת רחוק יותר.

10 תנועה מעגלית בשפת הנגזרות

מכינה גוף שנע סביב הראשית במעגל שרדיוסו r, במהירות זוויתית קבועה, נמצא בכל רגע בזווית $\theta = \omega t$:

$$\vec{r}(t) = \big(r\cos\omega t,\ r\sin\omega t\big)$$

גוזרים פעמיים לפי הזמן:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \big(-\omega r\sin\omega t,\ \omega r\cos\omega t\big) \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \big(-\omega^2 r\cos\omega t,\ -\omega^2 r\sin\omega t\big) = -\omega^2\,\vec{r}$$

המהירות ניצבת לווקטור המקום, וגודלה ωr. התאוצה בכיוון הפוך לווקטור המקום, כלומר פונה אל המרכז, וגודלה $\omega^2 r$. זו אותה תוצאה שקיבלנו בפרק 3 בעזרת משולשים דומים.

תאוצה זוויתית. כשהמהירות הזוויתית משתנה, מגדירים **תאוצה זוויתית** $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, ביחידות rad/s^2. הרכיב המשיקי של התאוצה הוא $a_t = \alpha r$, והרכיב הרדיאלי עדיין $a_R = \omega^2 r$. בתאוצה זוויתית קבועה מתקבלות נוסחאות שדומות לנוסחאות של נושא 1:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

© אור בן שטרית · אינסוף

11 עשרה טיפים שחוסכים נקודות

1. קודם מסמנים את המרכז. כל משוואה רדיאלית נכתבת כש"אל המרכז" הוא הכיוון החיובי.

2. רק כוחות אמיתיים. "כוח מרכזי" הוא תפקיד שממלאים מתיחות, כוח נורמלי, חיכוך, כוח קפיץ או משקל, ולא כוח נוסף בתרשים.

3. אותה ω, לא אותה v. לכל הנקודות על גוף שמסתובב יש אותה מהירות זוויתית, והמהירות של כל אחת מהן היא $v = \omega r$.

4. יחידות. מסל"ד להרץ מחלקים ב־60. בכל נוסחה עם ω הזוויות ברדיאנים.

5. ריבוע המהירות. מהירות כפולה באותו רדיוס דורשת כוח מרכזי גדול פי 4.

6. אותה משוואה בשלוש תחפושות. בכביש נטוי בלי חיכוך, במטוטלת קונית ובאופנוע נוטה: $\tan\theta = \frac{v^2}{gr}$. בכביש הנטוי $N = \frac{mg}{\cos\theta}$, ובמטוטלת הקונית $F_T = \frac{mg}{\cos\theta}$, יותר מהמשקל.

7. אנרגיה בין נקודות, כוחות בנקודה. במעגל אנכי, כשאין חיכוך, מוצאים את המהירות משימור האנרגיה, ואת הכוח מהחוק השני.

8. חוט או מוט? בחוט ובמסילה מבפנים $v_{\text{top}} \geq \sqrt{gr}$. במוט ובצינור מספיק $v_{\text{top}} > 0$.

9. בהתנתקות הכוח מתאפס. מציבים $N = 0$, או $F_T = 0$, במשוואה הרדיאלית. מאותו רגע הגוף נע כמו גוף שנזרק.

10. גם כשהמהירות משתנה. $\Sigma F_R = m\frac{v^2}{r}$ נכון בכל רגע, עם המהירות של אותו רגע.

12 טעויות נפוצות

שמונה טעויות שחוזרות בכל מבחן

1. מוסיפים לתרשים הכוחות, ביחס לקרקע, "כוח צנטריפטלי" אל המרכז, או "כוח צנטריפוגלי" החוצה.
2. חושבים שבמהירות קבועה בגודלה אין תאוצה.
3. כותבים $N = mg\cos\theta$ בכביש נטוי. שם התאוצה אופקית, ובלי חיכוך $N = \frac{mg}{\cos\theta}$.
4. משתמשים באורך החוט כרדיוס של מטוטלת קונית. הרדיוס הוא $L\sin\theta$.
5. מציבים סל"ד או מעלות במקום הרץ ורדיאנים.
6. דורשים $v_{\text{top}} = 0$ כדי שגוף על חוט או בלולאה ישלים סיבוב. הגוף מתנתק לפני כן.
7. משתמשים בנוסחאות של תאוצה קבועה מנושא 1, אף שבתנועה מעגלית כיוון התאוצה משתנה.
8. "כשהחוט נקרע, הכדור עף החוצה, לאורך הרדיוס." **לא:** הוא ממשיך במשיק.

13 תשובות לתיבות "בדקו את עצמכם"

- **פרק 2:** $f = \frac{45}{60} = 0.75\,\text{Hz}$, $T = \frac{1}{0.75} \approx 1.33\,\text{s}$ ו־$\omega = 2\pi \cdot 0.75 \approx 4.71\,\text{rad/s}$.
- **פרק 3:** קטנה פי 4, כי $a_R = \frac{v^2}{r}$. ברדיוס כפול, במהירות המקורית, התאוצה קטנה פי 2.
- **פרק 4:** המהירות הזוויתית גדלה פי 2, ולכן המתיחות גדלה פי 4: $F_T \approx 63\,\text{N}$.
- **פרק 5:** $\tan\theta = \frac{20^2}{10\cdot 100} = 0.4$, ולכן $\theta \approx 21.8°$.
- **פרק 6:** $h = L\cos 53° = 0.6\,\text{m}$, ולכן $T = 2\pi\sqrt{0.06} \approx 1.54\,\text{s}$.
- **פרק 7:** ברגע השחרור $F_T = mg\cos 37° = 1.6\,\text{N}$. בנקודה התחתונה $v^2 = 2\,\text{m}^2/\text{s}^2$, ולכן $F_T = 2 + 0.8 = 2.8\,\text{N}$.
- **פרק 8:** $v_{\text{top}} = \sqrt{gL} = 3\,\text{m/s}$, ובנקודה התחתונה $v = \sqrt{5gL} = \sqrt{45} \approx 6.7\,\text{m/s}$.

ומה עכשיו? עברו לקובץ התרגילים של הנושא: 15 שאלות, מהבסיס ועד שאלות אתגר, עם תשובות סופיות בסוף. הנושא הבא בסדרה הוא כבידה.

14 דף הנוסחאות של הנושא

תנועה מעגלית בעמוד אחד

תיאור התנועה $T=\frac{2\pi r}{v}$ $f=\frac{1}{T}$ $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$ $v=\omega r$ $s=r\theta$

תאוצה רדיאלית $a_R=\frac{v^2}{r}=\omega^2 r=\frac{4\pi^2 r}{T^2}$ תמיד אל המרכז

החוק השני $\Sigma F_R=m\frac{v^2}{r}$ בציר שניצב למישור של מעגל אופקי: $\Sigma F=0$

כביש אופקי $f_s=m\frac{v^2}{r}\le\mu_s mg$ $v_{\max}=\sqrt{\mu_s g r}$

כביש נטוי בלי חיכוך $\tan\theta=\frac{v^2}{gr}$ $N=\frac{mg}{\cos\theta}$

מטוטלת קונית $\tan\theta=\frac{v^2}{gr}$ $r=L\sin\theta$ $F_T=\frac{mg}{\cos\theta}$ $T=2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$

תנועה שאינה קצובה $a=\sqrt{a_R^2+a_t^2}$ $\Sigma F_R=m\frac{v^2}{r}$ $\Sigma F_t=ma_t$

מטוטלת פשוטה $a_t=g\sin\theta$ $F_T-mg\cos\theta=m\frac{v^2}{L}$

מעגל אנכי (חוט) למעלה: $F_T+mg=m\frac{v^2}{r}$ למטה: $F_T-mg=m\frac{v^2}{r}$

במסילה: N במקום F_T $v_{\text{top}}^2=v_{\text{bottom}}^2+4gr$ $v_{\text{top}}\ge\sqrt{gr}$ $v_{\text{bottom}}\ge\sqrt{5gr}$

לולאה, מוט וצינור לולאה, ממנוחה ובלי חיכוך: $h\ge 2.5r$ מוט או צינור: $v_{\text{top}}>0$

התנתקות $N=0$ או $F_T=0$ מראש כיפה חלקה: $\cos\theta=\frac{2}{3}$

תאוצה זוויתית (מכינה) $\alpha=\frac{d\omega}{dt}$ $a_t=\alpha r$ $\omega=\omega_0+\alpha t$ $\theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$

ערכים בקובץ $g=10\,\text{m/s}^2$ $\sin 37^\circ=0.6$ $\cos 37^\circ=0.8$

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.
מותר להדפיס ולהפיץ את הקובץ בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אסור להעתיק ממנו תרגילים או איורים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות בלי אישור בכתב.
הקובץ נכתב בידי אינסוף ואינו פרסום רשמי של משרד החינוך או של גוף אחר.