

מספרים מרוכבים

במישור גאוס נתונים שני מקומות גאומטריים:

$$I: z \cdot \bar{z} = 4(z + \bar{z}) - 3i(z - \bar{z}) \quad II: |z - 7 - 7i| = |z - 1 + i|$$

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי I, וציינו איזו עקומה הוא מתאר. הראו כי ראשית הצירים נמצאת על מקום גאומטרי זה.

ב. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי II, וציינו איזו עקומה הוא מתאר.

נסמן ב-A וב-B את שתי נקודות החיתוך של שני המקומות הגאומטריים, כאשר A נמצאת על הציר הממשי.

ג. מצאו את המספרים המרוכבים המתאימים לנקודות A ו-B, וחשבו את אורך הקטע AB.

ד. (1) הוכיחו כי לכל מספר מרוכב $z = x + yi$ מתקיים:

$$25|z|^2 - 7\operatorname{Re}(z^2) + 24\operatorname{Im}(z^2) = 2(3x + 4y)^2$$

(2) הוכיחו כי אם z נמצא על המקום הגאומטרי II, אז הנקודה המייצגת את

$w = z^2$ נמצאת במרחקים שווים מראשית הצירים ומהישר $7x - 24y + 1152 = 0$.

הדרכה: היעזרו בסעיף (1) ובמשוואת המקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף ב.

(3) על איזו עקומה נמצאות כל הנקודות $w = z^2$ כאשר z נע על II? מצאו את נקודות החיתוך שלה עם הציר הממשי.

תשובות סופיות:

א. $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ - מעגל שמרכזו $(4,3)$ ורדיוסו 5; ראשית הצירים נמצאת עליו.

ב. $3x + 4y = 24$ - ישר.

ג. $AB = 10$, $B = 6i$, $A = 8$.

ד. (1) הוכחה. (2) הוכחה.

(3) פרבולה שמוקדה ראשית הצירים ומדריכה הישר $7x - 24y + 1152 = 0$.

נקודות החיתוך שלה עם הציר הממשי: $w = 64$ ו- $w = -36$.