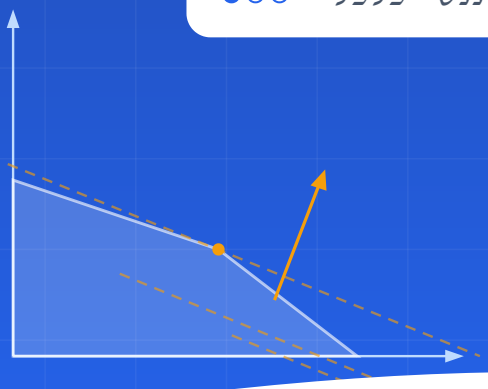
אינסוף
מתמטיקה

תכנון לינארי

מהבסיס ועד שאלות אתגר

הסברים • שיטות פתרון וטריקים • פתרון מלא לכל תרגיל

3 יח"ל כיתה י"ב · שאלון 35372 · אשכול פיננסי־כלכלי ●○○



מה מחכה לכם בקובץ?

לתלמידים: הרעיון והאינטואיציה · ישרים ואי־שוויונות · תחום אפשרי וקודקודים · המתכון לבגרות · מקרים מיוחדים · מסיפור לאילוצים · שלוש דרכים למצוא מקסימום

למורים: תיבות "למורה" בכל פרק · מהלך שיעורים מוצע · טעויות נפוצות ומה עושים איתן

7 פרקי הסבר | 25 תרגילים בארבעה שלבים, מהקל אל הקשה | פתרון מלא לכל תרגיל | דף סיכום

אינסוף תרגילים. חינם.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.

מותר להדפיס ולהפיץ את הקובץ בשלמותו ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנו תרגילים לחומרים אחרים, לשנות אותו או להשתמש בו למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.

הקובץ נכתב בידי אינסוף ואינו פרסום רשמי של משרד החינוך או של גוף אחר.

לפני שמתחילים

מה יש בקובץ, ואיך כדאי ללמוד ממנו

תלמידים יקרים, מורות ומורים יקרים,

חברות תעופה, מפעלים, אפליקציות משלוחים ובתי חולים פוגשים כל יום אותה שאלה: המשאבים מוגבלים (שעות עבודה, חומרי גלם, תקציב, מקום במחסן), ואפשר לחלק אותם בהרבה דרכים. איזו חלוקה הכי משתלמת? תכנון לינארי הוא הכלי המתמטי שעונה על השאלה הזאת, והוא אחד הנושאים השימושיים ביותר שלומדים בתיכון.

ב־3 יח״ל לומדים את הנושא בכיתה י״ב, באשכול הפיננסי־כלכלי, והוא נבחן בשאלון 35372. בבחינה שאלה בתכנון לינארי בנויה כמעט תמיד מאותם שלבים: מתרגמים סיפור לאי־שוויונות, מסרטטים את התחום, מוצאים את הקודקודים ומחשבים בהם רווח, זמן או עלות. מי שמבין את ההיגיון ומתרגל את השלבים לפי הסדר מגיע לבחינה בביטחון.

0.1 איך הקובץ בנוי

- **שבעה פרקי הסבר**, מהרעיון הפשוט ועד המתכון לשאלת בגרות. בכל פרק תמצאו אינטואיציה, שיטות עבודה מסודרות, דוגמאות פתורות שלב אחר שלב, טריקים וטעויות נפוצות.
- **25 תרגילים בארבעה שלבים**: בסיס, מיומנויות, שאלות בסגנון בגרות ואתגר. הקושי עולה בהדרגה, והתרגילים האחרונים קשים במיוחד.
- **פתרון מלא לכל תרגיל** בפרק הפתרונות. מתחת לכל תרגיל מופיע מספר העמוד של הפתרון (בקובץ הדיגיטלי אפשר ללחוץ עליו).
- **פינת המורה** עם מהלך שיעורים מוצע, טעויות נפוצות ומה עושים איתן, ובסוף **דף סיכום** של עמוד אחד.

0.2 מקרא: מה מסמנת כל תיבה

תיבה	מה יש בה
אינטואיציה	תמונה בראש או סיפור קצר שמסבירים למה השיטה עובדת.
שיטה	דרך עבודה מסודרת, צעד אחר צעד.
טריק	קיצור דרך או בדיקה מהירה שחוסכים זמן ומונעים טעויות.
טעות נפוצה	מלכודת שהרבה תלמידים נופלים בה, ואיך להימנע ממנה.
למורה	הסבר מעמיק, דגשים מתוכנית הלימודים והצעות להוראה בכיתה.
כך כותבים בבחינה	דוגמה לתשובה מלאה ומסודרת, כמו שהבודקים מצפים לראות.

תגיות ליד שיטות וסעיפים: **לבחינה** שיטה שכותבים בבחינה; **להבנה ולבדיקה** שיטה להבנה ולבדיקת התשובה; **העשרה** מעבר לנדרש; **חשיבה** סעיף של הסבר במילים; **אתגר ⋆** סעיף קשה במיוחד.

איך ללמוד מהקובץ

קראו פרק עם עיפרון ביד ופתרו את הדוגמאות הפתורות בעצמכם לפני שאתם קוראים את הפתרון. אחר כך עברו לתרגילים של השלב המתאים. נסו לפתור כל תרגיל עד הסוף, ורק אז השוו לפתרון המלא. סמנו את התרגילים שבהם טעיתם, וחזרו אליהם אחרי כמה ימים.

© אור בן שטרית · אינסוף

תוכן העניינים

לפני שמתחילים 2
פרק 1 מה זה תכנון לינארי? הרעיון, לפני הנוסחאות 4
פרק 2 ארגז הכלים: ישרים ואי־שוויונות 6
פרק 3 מערכת אילוצים, תחום אפשרי וקודקודים 9
פרק 4 פונקציית המטרה: שלוש דרכים למצוא את הנקודה הטובה ביותר 12
פרק 5 מסיפור לאילוצים: בונים את הבעיה בעצמנו 15
פרק 6 מקרים מיוחדים 18
פרק 7 המתכון לשאלת בגרות 22
תרגילים 24
שלב א · בסיס 24
שלב ב · מיומנויות 25
שלב ג · שאלות בסגנון בגרות 27
שלב ד · אתגר 31
פתרונות מלאים 33
פינת המורה 51
דף סיכום 53

בדיקה עצמית: מה כדאי לזכור מהשנים הקודמות

תכנון לינארי נשען על כמה כלים מכיתות קודמות. נסו לענות על חמש השאלות האלה בלי לחפש בספר:

1. מהו השיפוע של הישר $y = -2x + 6$, ובאיזו נקודה הוא חותך את ציר ה־y?
2. באילו נקודות הישר $2x + 5y = 20$ חותך את הצירים?
3. האם הנקודה $(3,\ 4)$ מקיימת את אי־השוויון $2x + y \le 10$?
4. פתרו את מערכת המשוואות: $x + y = 10$, $x - y = 2$.
5. מה קורה לסימן של אי־שוויון כשכופלים את שני האגפים במספר שלילי?

תשובות

1. השיפוע הוא -2, והישר חותך את ציר ה־y בנקודה $(0,\ 6)$. **2.** בנקודות $(10,\ 0)$ ו־$(0,\ 4)$. **3.** כן: $2 \cdot 3 + 4 = 10$, והנקודה נמצאת בדיוק על הישר $2x + y = 10$. **4.** $x = 6$, $y = 4$. **5.** הסימן מתהפך: $\le$ הופך ל־$\ge$, ו־$\ge$ הופך ל־$\le$.

התקשיתם באחת השאלות? אין בעיה: פרק 2 מסביר מחדש את כל הכלים האלה.

© אור בן שטרית · אינסוף

פרק 1 — מה זה תכנון לינארי?

הרעיון, לפני הנוסחאות

1.1 סיפור אחד שילווה אותנו

נועה ואיתי פתחו סטודיו קטן שמדפיס עיצובים על בגדים. הם מוכרים שני מוצרים: **חולצות טריקו** ו**סווטשירטים**. כל בגד עובר שני שלבים:

- **הדפסה:** הדפסה של חולצה נמשכת 6 דקות, ושל סווטשירט 8 דקות. מכונת ההדפסה עובדת לכל היותר 4 שעות ביום, כלומר 240 דקות.
- **קיפול ואריזה:** חולצה דורשת 2 דקות, וסווטשירט 6 דקות. העובד שאורז זמין לכל היותר שעתיים ביום, כלומר 120 דקות.

על כל חולצה הם מרוויחים 20 ש״ח, ועל כל סווטשירט 50 ש״ח.

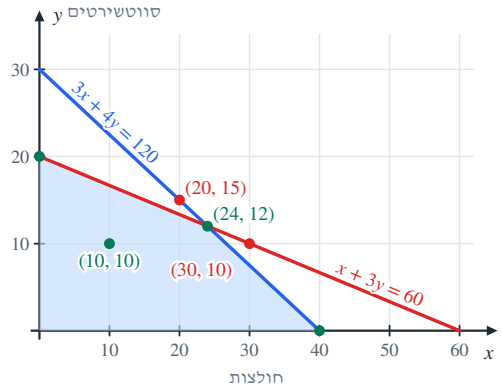
השאלה

כמה חולצות וכמה סווטשירטים כדאי להם להכין ביום, כדי שהרווח יהיה גדול ככל האפשר?

1.2 נסה לנחש

נבדוק כמה תוכניות עבודה. בכל תוכנית נחשב כמה דקות היא דורשת מכל שלב, ונבדוק שהיא לא עוברת את הזמן שיש.

תוכנית	חולצות	סווטשירטים	הדפסה (מתוך 240)	אריזה (מתוך 120)	אפשרית?	רווח
א	10	10	$6\cdot 10+8\cdot 10=140$	$2\cdot 10+6\cdot 10=80$	כן	700 ש״ח
ב	40	0	$6\cdot 40+8\cdot 0=240$	$2\cdot 40+6\cdot 0=80$	כן	800 ש״ח
ג	0	20	$6\cdot 0+8\cdot 20=160$	$2\cdot 0+6\cdot 20=120$	כן	1,000 ש״ח
ד	30	10	$6\cdot 30+8\cdot 10=260$	$2\cdot 30+6\cdot 10=120$	לא, חסר זמן הדפסה	--
ה	20	15	$6\cdot 20+8\cdot 15=240$	$2\cdot 20+6\cdot 15=130$	לא, חסר זמן אריזה	--
ו	**24**	**12**	$\mathbf{6\cdot 24+8\cdot 12=240}$	$\mathbf{2\cdot 24+6\cdot 12=120}$	**כן**	**1,080 ש״ח**



שלוש הבחנות מהטבלה:

- סווטשירט מכניס יותר מפי 2 מחולצה. ובכל זאת, אם מכינים רק סווטשירטים (תוכנית ג׳) מרוויחים 1,000 ש״ח, ותוכנית מעורבת (תוכנית ו׳) מכניסה יותר: 1,080 ש״ח.
- בתוכנית ו׳ המכונה עובדת בדיוק 240 דקות, והאורז עובד בדיוק 120 דקות. אף דקה לא מתבזבזת.
- בסרטוט כל תוכנית היא נקודה (x, y). התוכניות האפשריות (ירוק) נמצאות בתוך אזור כחול אחד, והתוכניות שאי אפשר לבצע (אדום) נמצאות מחוצה לו.

אבל האם 1,080 ש״ח הוא באמת הרווח הגדול ביותר? יש מאות תוכניות אפשריות, ואי אפשר לבדוק את כולן. צריך שיטה.

© אור בן שטרית · אינסוף

1.3 ארבעת המרכיבים של כל בעיה

כל שאלה בתכנון לינארי בנויה מאותם ארבעה חלקים. נכיר אותם דרך הסיפור:

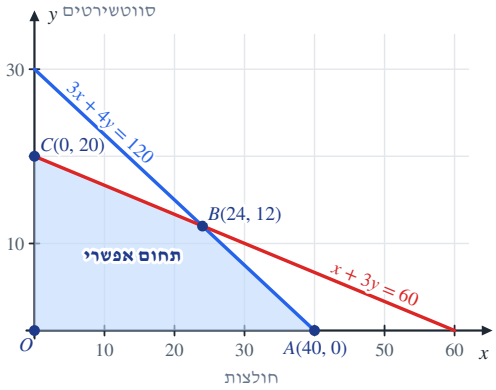
1. **משתנים.** מה מחליטים? כאן: x = מספר החולצות שמכינים ביום, y = מספר הסווטשירטים שמכינים ביום.
2. **אילוצים.** המגבלות, שכתובות כאי־שוויונות: הדפסה: $6x + 8y \le 240$; אריזה: $2x + 6y \le 120$; וגם $x \ge 0$, $y \ge 0$.
   אפשר לחלק כל אי־שוויון במספר חיובי בלי לשנות אותו. אחרי חלוקה ב־2 מקבלים אילוצים נוחים יותר: $3x + 4y \le 120$ ו־$x + 3y \le 60$. האילוצים $x \ge 0$, $y \ge 0$ אומרים שאי אפשר להכין מספר שלילי של בגדים.
3. **תחום אפשרי.** כל הנקודות (x, y) שמקיימות את כל האילוצים. אלה כל התוכניות שאפשר לבצע. בסרטוט זה מצולע צבוע.
4. **פונקציית מטרה.** מה רוצים להגדיל (רווח) או להקטין (עלות, זמן). כאן: $f(x, y) = 20x + 50y$.

למה "לינארי"? כל האילוצים ופונקציית המטרה הם ביטויים מהצורה $ax + by$, והגרפים שלהם הם קווים ישרים.

> **התחום האפשרי הוא תפריט**
>
> כל נקודה בתחום היא תוכנית עבודה שאפשר לבצע. נקודה מחוץ לתחום היא תוכנית שדורשת יותר זמן ממה שיש. אפשר לחשוב על כל אילוץ כעל גדר שחוסמת צד אחד של המישור. התחום האפשרי הוא החצר שנשארת בין כל הגדרות, ופונקציית המטרה היא תג המחיר של כל תוכנית בתפריט.

1.4 העובדה שעליה בנוי כל הנושא

את התחום האפשרי של הסטודיו רואים בסרטוט. הפינות שלו נקראות **קודקודים**: $O(0, 0)$, $A(40, 0)$, $B(24, 12)$, $C(0, 20)$.



> **העובדה המרכזית**
>
> הערך הגדול ביותר של פונקציית המטרה, וגם הערך הקטן ביותר, מתקבלים באחד הקודקודים של התחום האפשרי.

לכן לא צריך לבדוק מאות תוכניות. מספיק לבדוק ארבעה קודקודים:

קודקוד	O	A	B	C
הרווח (ש"ח)	0	800	**1,080**	1,000

הרווח הגדול ביותר מתקבל ב־B. תוכנית ו׳ מהטבלה הייתה באמת התוכנית הטובה ביותר. בפרק 4 נבין למה התשובה תמיד בקודקוד.

> **למורה** **איך לפתוח את הנושא בכיתה**
>
> מומלץ להתחיל בבעיה ולא בהגדרות. חלקו את הכיתה לזוגות ובקשו מכל זוג להציע בתוך חמש דקות תוכנית שנותנת רווח גבוה. רשמו את ההצעות על הלוח בטבלה כמו זו שלמעלה, וסמנו כל הצעה כנקודה במערכת צירים: ירוק אם אפשר לבצע אותה ואדום אם לא. אחרי כמה הצעות הנקודות הירוקות "מציירות" מצולע, והתחום האפשרי מופיע מעצמו. אחר כך שאלו: "מי הרוויח הכי הרבה? האם יש תוכנית טובה יותר? איך אפשר להיות בטוחים?" השאלה האחרונה יוצרת את הצורך בשיטה, ומשם ממשיכים לפרקים 2 עד 4.

© אור בן שטרית · אינסוף

פרק 2 ארגז הכלים: ישרים ואי־שוויונות

מסרטטים ישר בחצי דקה, ויודעים לאיזה צד לצבוע

2.1 ישר במישור: שתי צורות כתיבה

בתכנון לינארי פוגשים ישרים בשתי צורות:

הצורה המפורשת: $y = mx + b$	הצורה הכללית: $ax + by = c$
m הוא השיפוע, ו־b הוא נקודת החיתוך עם ציר ה־y, למשל $y = -\frac{3}{4}x + 30$.	כך כותבים בדרך כלל אילוצים, למשל $3x + 4y = 120$.

עוברים מצורה לצורה בעזרת "בידוד y":

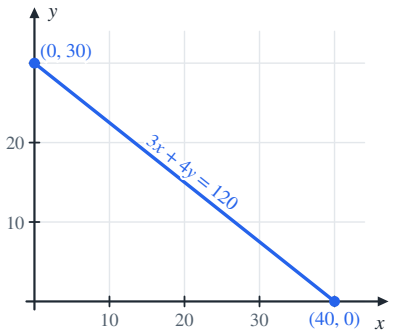
$$3x + 4y = 120 \Rightarrow 4y = -3x + 120 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 30$$

2.2 מסרטטים ישר בחצי דקה

שיטה **שיטת החיתוכים עם הצירים**

לישר מהצורה $ax + by = c$:

1. מציבים $x = 0$ ומוצאים את y. זו נקודת החיתוך עם ציר ה־y.
2. מציבים $y = 0$ ומוצאים את x. זו נקודת החיתוך עם ציר ה־x.
3. מסמנים את שתי הנקודות ומעבירים ישר דרכן.



דוגמה: $3x + 4y = 120$.

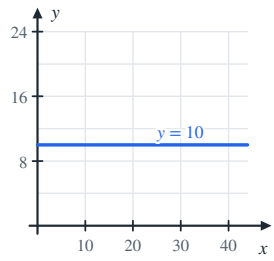
$x = 0 \Rightarrow 4y = 120 \Rightarrow y = 30$, הנקודה $(0, 30)$.

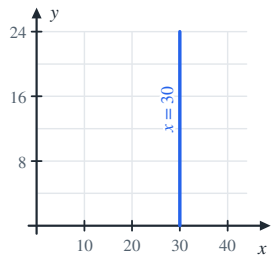
$y = 0 \Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = 40$, הנקודה $(40, 0)$.

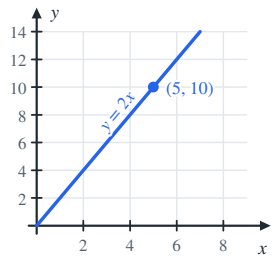
טריק: כשהמספרים לא נוחים

לפעמים החיתוכים יוצאים שברים, למשל בישר $3x + 7y = 50$. אז מחפשים שתי נקודות אחרות עם מספרים שלמים: מציבים כמה ערכים של x ובודקים מתי $50 - 3x$ מתחלק ב־7. $x = 5$ נותן $7y = 35$, כלומר הנקודה $(5, 5)$, ו־$x = 12$ נותן $7y = 14$, כלומר הנקודה $(12, 2)$. מעבירים ישר דרך שתי הנקודות "הנקיות".

שלושה ישרים מיוחדים





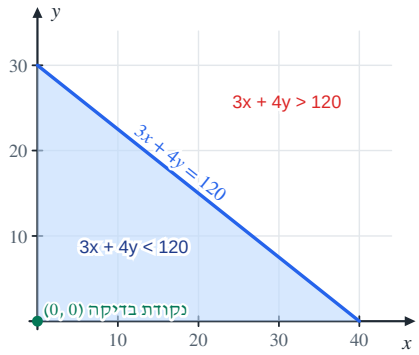


- **ישר שעובר בראשית**, כמו $y = 2x$: שיטת החיתוכים נותנת פעמיים את אותה נקודה $(0, 0)$. לכן בוחרים נקודה נוספת, למשל $x = 5 \Rightarrow y = 10$.
- **ישר אנכי** $x = 30$: בכל הנקודות שלו $x = 30$. הוא מקביל לציר ה־y.
- **ישר אופקי** $y = 10$: בכל הנקודות שלו $y = 10$. הוא מקביל לציר ה־x.

© אור בן שטרית · אינסוף

2.3 אי־שוויון הוא חצי מישור

הישר $3x + 4y = 120$ מחלק את המישור לשני חצאי מישור. בצד אחד של הישר מתקיים $3x + 4y < 120$, ובצד השני $3x + 4y > 120$. על הישר עצמו מתקיים שוויון.



לכן לאי־השוויון $3x + 4y \le 120$ יש תמונה פשוטה: הישר ועוד צד אחד שלו. השאלה היחידה היא איזה צד.

בתכנון לינארי האילוצים כמעט תמיד כוללים את הסימן $\le$ או $\ge$. לכן הישר עצמו שייך לתחום, ומסרטטים אותו בקו מלא.

שיטה **נקודת בדיקה**

1. מסרטטים את הישר.
2. בוחרים נקודה שלא נמצאת על הישר. הכי נוח: הראשית $(0, 0)$.
3. מציבים אותה באי־השוויון. אם מתקבל משפט נכון, צובעים את הצד של הנקודה. אם לא נכון, צובעים את הצד השני.

אי־שוויון	הצבה של נקודת בדיקה	הצד שצובעים
$3x + 4y \le 120$	$(0, 0)$: $0 \le 120$, נכון	הצד שבו נמצאת הראשית
$x + y \ge 4$	$(0, 0)$: $0 \ge 4$, לא נכון	הצד שבו לא נמצאת הראשית
$y \ge 2x$	הישר עובר בראשית! בוחרים $(1, 0)$: $0 \ge 2$, לא נכון	הצד שבו לא נמצאת $(1, 0)$, כלומר מעל הישר

טריק: "מעל" ו"מתחת" בלי נקודת בדיקה

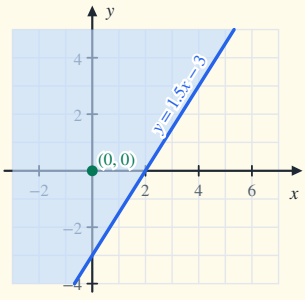
מבודדים את y. אם התקבל $y \ge \dots$, צובעים מעל הישר. אם התקבל $y \le \dots$, צובעים מתחת לישר. באילוצים עם x בלבד: $x \le a$ זה שמאלה מהישר האנכי, ו־$x \ge a$ זה ימינה ממנו.

טעות נפוצה: שוכחים להפוך את הסימן

כשכופלים או מחלקים אי־שוויון במספר שלילי, הסימן מתהפך. דוגמה:

$$3x - 2y \le 6 \Rightarrow -2y \le -3x + 6 \Rightarrow y \ge 1.5x - 3$$

חילקנו ב־(-2), ולכן $\le$ הפך ל־$\ge$: צובעים מעל הישר. מי ששוכח להפוך צובע את הצד הלא נכון.



בדיקה: הנקודה $(0, 0)$ מקיימת $0 \le 6$, ובאמת היא נמצאת מעל הישר $y = 1.5x - 3$ (שחותך את ציר ה־y ב־-3).

© אור בן שטרית · אינסוף

2.4 נקודת החיתוך של שני ישרים

את הקודקודים של התחום מוצאים כנקודות חיתוך של ישרים. יש שלוש דרכים לפתור מערכת של שתי משוואות, ובוחרים את הנוחה ביותר:

הדרך	מתי היא נוחה	דוגמה
השוואה	כששתי המשוואות כתובות בצורה $y = \dots$	$y = 2x + 1$ ו־$y = -x + 10$: $2x + 1 = -x + 10 \Rightarrow x = 3, y = 7$
הצבה	כשבאחת המשוואות קל לבודד משתנה	$x + y = 12$ ו־$y = 3x$: $x + 3x = 12 \Rightarrow x = 3, y = 9$
חיסור משוואות	כשיש מקדמים שווים, או שקל להשוות אותם	$3x + 2y = 34$ ו־$x + 2y = 18$: חיסור נותן $2x = 16 \Rightarrow x = 8, y = 5$

דוגמה פתורה

השאלה: מצאו את נקודת החיתוך של הישרים $3x + 4y = 120$ ו־$x + 3y = 60$.

1. **בהצבה.** מהמשוואה השנייה: $x = 60 - 3y$. מציבים בראשונה:

$$3(60 - 3y) + 4y = 120 \Rightarrow 180 - 9y + 4y = 120 \Rightarrow -5y = -60 \Rightarrow y = 12$$

2. **מציבים בחזרה.** $x = 60 - 3 \cdot 12 = 24$. נקודת החיתוך היא $B(24, 12)$.
3. **אותו דבר בחיסור משוואות.** כופלים את המשוואה השנייה ב־3: $3x + 9y = 180$. מחסרים ממנה את הראשונה: $5y = 60$, כלומר $y = 12$, ושוב $x = 24$.
4. **בדיקה.** $3 \cdot 24 + 4 \cdot 12 = 72 + 48 = 120$ וגם $24 + 3 \cdot 12 = 60$. שתי המשוואות מתקיימות.

טריק: עשר שניות שחוסכות נקודות

אחרי שמצאתם נקודת חיתוך, הציבו אותה בשתי המשוואות. טעות חישוב בקודקוד הורסת את כל המשך השאלה, ובדיקה כזאת תופסת אותה מיד.

2.5 ישר דרך שתי נקודות

כשהתחום נתון בסרטוט, צריך לפעמים למצוא את משוואת הישר בעצמנו:

1. מוצאים את השיפוע: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
2. מציבים בנוסחה $y - y_1 = m(x - x_1)$.

דוגמה: ישר שעובר דרך $(0, 3)$ ו־$(6, 6)$. השיפוע $m = \dfrac{6 - 3}{6 - 0} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. הנקודה $(0, 3)$ נמצאת על ציר ה־y, ולכן מיד: $y = \dfrac{1}{2}x + 3$.

למורה **"מעל ומתחת" מול נקודת בדיקה**

תלמידים רבים לומדים ש"$y \geq \dots$ זה מעל" ומפעילים את הכלל גם כשהוא לא נכון: כשהמקדם של y שלילי (כמו ב־$3x - 2y \leq 6$), או בישר אנכי. מומלץ ללמד את נקודת הבדיקה כשיטה הראשית, כי היא עובדת תמיד, ואת "מעל ומתחת" להציג כקיצור דרך שמותר להשתמש בו רק אחרי בידוד y. כדאי לתרגל במיוחד ישרים שעוברים בראשית: שם $(0, 0)$ לא עוזרת, ותלמידים נתקעים. בשיטת חיסור המשוואות רוב הטעויות הן בסימנים. לכן כדאי לדרוש בדיקה בשתי המשוואות כהרגל קבוע, כבר מהשיעור הראשון.

© אור בן שטרית · אינסוף

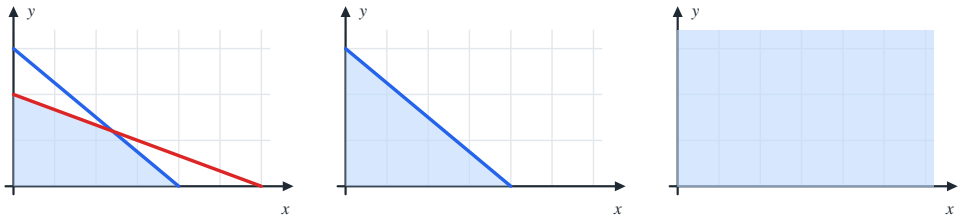
פרק 3 מערכת אילוצים, תחום אפשרי וקודקודים

מכמה חצאי מישור למצולע אחד

3.1 מכמה אי־שוויונות לתחום אחד

מערכת אילוצים היא כמה אי־שוויונות שצריכים להתקיים יחד. **התחום האפשרי** הוא אוסף הנקודות שמקיימות את כולם. בסרטוט זה התחום המשותף לכל חצאי המישור.

1. $x \geq 0,\ y \geq 0$
2. מוסיפים $3x + 4y \leq 120$
3. מוסיפים $x + 3y \leq 60$



שיטה **סרטוט התחום האפשרי**

1. מסרטטים את כל ישרי הגבול. ליד כל ישר כותבים את המשוואה שלו.
2. לכל ישר מחליטים בעזרת נקודת בדיקה איזה צד מותר, ומסמנים חץ קטן לכיוון הצד הזה.
3. התחום האפשרי הוא האזור שאליו מצביעים כל החצים. צובעים אותו.
4. בודקים נקודה אחת בתוך האזור הצבוע בכל האילוצים. אם היא מקיימת את כולם, הסרטוט נכון.

טריק: מסרטטים קודם את $x \geq 0$ ו־$y \geq 0$

כמעט בכל בעיה יש את האילוצים $x \geq 0$ ו־$y \geq 0$, כי אי אפשר לייצר כמות שלילית. הם אומרים שהתחום נמצא ברביע הראשון. לכן מספיק לסרטט את שאר הישרים רק ברביע הראשון, וחוסכים זמן ומקום.

3.2 קודקודים: הפינות של התחום

קודקוד הוא נקודה על גבול התחום שבה נפגשים שני ישרי גבול. כדי למצוא קודקוד:

1. מזהים בסרטוט אילו שני ישרים נפגשים בפינה.
2. פותרים את מערכת שתי המשוואות שלהם (פרק 2). פינה על ציר מוצאים בהצבה של $x = 0$ או $y = 0$.

דוגמה פתורה: הקודקודים של הסטודיו

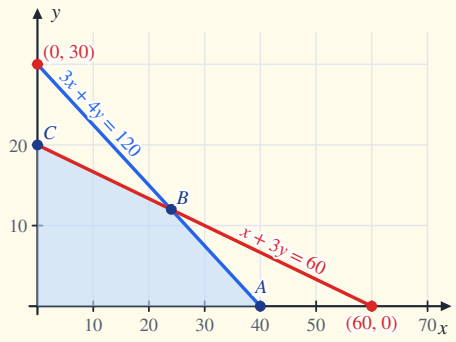
השאלה: מצאו את קודקודי התחום של הסטודיו: $x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3x + 4y \leq 120,\ x + 3y \leq 60$.

1. O: שני הצירים נפגשים בראשית, $O(0,\ 0)$.
2. A: ציר ה־x והישר $3x + 4y = 120$. מציבים $y = 0$: $3x = 120,\ x = 40$, $A(40,\ 0)$.
3. C: ציר ה־y והישר $x + 3y = 60$. מציבים $x = 0$: $3y = 60,\ y = 20$, $C(0,\ 20)$.
4. B: שני הישרים המשופעים. פתרנו בפרק 2: $B(24,\ 12)$.

© אור בן שטרית · אינסוף

טעות נפוצה: לא כל נקודת חיתוך היא קודקוד

הישר $3x + 4y = 120$ חותך את ציר ה־y בנקודה $(0, 30)$. אבל $(0, 30)$ לא שייכת לתחום: $3 \cdot 30 + 0 = 90 > 60$, ולכן היא מפרה את אילוץ האריזה. באותו אופן הישר $x + 3y = 60$ חותך את ציר ה־x בנקודה $(60, 0)$, אבל $3 \cdot 60 = 180 > 120$.



מי שמציב בפונקציית המטרה את כל נקודות החיתוך, ולא רק את הקודקודים, עלול לקבל "רווח מקסימלי" של תוכנית שאי אפשר לבצע.

הכלל: כל נקודה שנראית לכם כמו קודקוד, הציבו אותה בכל האילוצים.

3.3 האם נקודה נמצאת בתחום?

מציבים את הנקודה בכל האילוצים:

- **כל האילוצים מתקיימים:** הנקודה בתחום, והתוכנית אפשרית.
- **אילוץ אחד לפחות לא מתקיים:** הנקודה מחוץ לתחום. האילוץ שלא מתקיים אומר מה חסר.
- **באחד האילוצים מתקבל שוויון:** הנקודה על גבול התחום. במשמעות של הסיפור, המשאב הזה מנוצל עד הסוף.

דוגמה: התוכנית $(20, 15)$ בסטודיו. הדפסה: $4 \cdot 15 + 3 \cdot 20 = 120 \le 120$, מתקיים בשוויון (המכונה עובדת בדיוק עד הסוף). אריזה: $15 + 3 \cdot 20 = 65 > 60$, לא מתקיים. לכן אי אפשר לבצע את התוכנית: חסר זמן אריזה.

3.4 מהסרטוט אל מערכת האילוצים

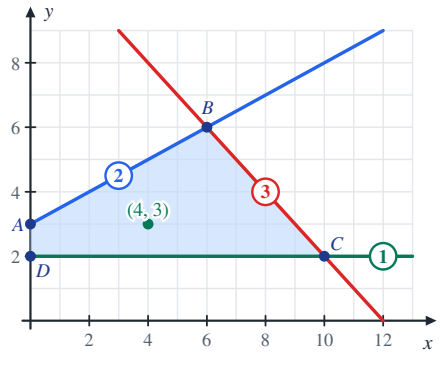
יש שאלות שבהן התחום נתון בסרטוט, וצריך לכתוב את מערכת האילוצים שמתאימה לו.

שיטה **מסרטוט לאילוצים**

1. לכל ישר גבול מוצאים משוואה: מנקודות החיתוך עם הצירים, או מהשיפוע ומנקודה (פרק 2).
2. בוחרים נקודה בתוך התחום, ומציבים אותה בכל משוואה. התוצאה מראה את כיוון אי־השוויון.

דוגמה פתורה

השאלה: כתבו את מערכת האילוצים של התחום בסרטוט, ומצאו את קודקודיו.



הישרים 1, 2 ו־3 תוחמים את התחום

1. ישר 1 אופקי, ועובר בגובה 2: $y = 2$.
2. ישר 2 עובר דרך $(0, 3)$ ו־$(6, 6)$. השיפוע $\frac{6-3}{6-0} = \frac{1}{2}$, ולכן $y = \frac{1}{2}x + 3$.
3. ישר 3 עובר דרך $(12, 0)$ ו־$(0, 12)$, ולכן $x + y = 12$.
4. הנקודה $(4, 3)$ נמצאת בתוך התחום. מציבים: $y \ge 2$, ולכן $3 \ge 2$. $\frac{1}{2} \cdot 4 + 3 = 5$, ו־$3 \le 5$, לכן $y \le \frac{1}{2}x + 3$. ולכן $4 + 3 = 7 \le 12$, ולכן $x + y \le 12$.

© אור בן שטרית · אינסוף

(5) מוסיפים את $x \geq 0$ (הצד השמאלי של התחום הוא ציר ה־y). המערכת:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 2 \\ y \leq \frac{1}{2}x + 3 \\ x + y \leq 12 \end{cases}$$

(6) הקודקודים. A: ציר ה־y וישר 2, $A(0, 3)$. B: ישר 2 וישר 3: $\frac{1}{2}x + 3 = 12 - x$, $1.5x = 9$, $x = 6$, $y = 6$, $B(6, 6)$. C: ישר 3 וישר 1: $x + 2 = 12$, $C(10, 2)$. D: ציר ה־y וישר 1, $D(0, 2)$.

הערה: כאן לא צריך את האילוץ $y \geq 0$, כי $y \geq 2$ חזק ממנו.

טריק: איזה ישר שייך לאיזה אילוץ?

כשנותנים כמה ישרים בסרטוט וצריך להתאים לכל אחד אילוץ, מחשבים לכל אילוץ את נקודות החיתוך שלו עם הצירים ומחפשים אותן בסרטוט. למשל, $3x + 4y = 120$ עובר דרך $(40, 0)$ ו־$(0, 30)$, ו־$x + 3y = 60$ עובר דרך $(60, 0)$ ו־$(0, 20)$. בדרך הזאת מזהים מיד כל ישר, בלי לחשב שיפועים.

3.5 עוד שני מושגים

- **תחום פתוח.** כשהאילוצים הם דרישות מינימום ("לפחות..."), התחום יכול להמשיך עד אינסוף. בתחום כזה יכול להיות ערך מינימלי בלי ערך מקסימלי. נראה זאת בפרק 6.
- **אילוץ מיותר.** אילוץ שלא משנה את התחום, כי האילוצים האחרים כבר "חזקים" ממנו. למשל, אם בסטודיו נוסיף "לכל היותר 50 חולצות ביום" ($x \leq 50$), התחום לא ישתנה, כי ממילא אי אפשר להכין יותר מ־40 חולצות. במשמעות של הסיפור, המשאב הזה אף פעם לא נגמר.

למורה **סרטוט מול חישוב**

הסרטוט נועד לזהות את התחום ולגלות אילו ישרים נפגשים בכל קודקוד. את שיעורי הקודקודים עצמם כדאי להרגיל את התלמידים לחשב, ולא לקרוא מהסרטוט, אלא אם השאלה מבקשת במפורש לקרוא אותם. סרטוט ביד אינו מדויק מספיק, וחישוב מראה את דרך הפתרון. טעות שחוזרת הרבה היא לחשב את כל נקודות החיתוך האפשריות (עם n ישרים יש עד $\frac{n(n-1)}{2}$ כאלה) ולהציב את כולן. לכן חשוב לבקש מהתלמידים לבדוק כל "קודקוד" בכל האילוצים, או לזהות אותו קודם בסרטוט. עוד תרגול מומלץ: לבקש מהתלמידים לתאר במילים מה אומרת נקודה על הגבול ("המשאב מנוצל עד הסוף") ומה אומרת נקודה בפנים ("נשאר זמן פנוי"). זה מכין את הקרקע לשאלות "הסבירו" בבחינה.

© אור בן שטרית · אינסוף

פרק 4 פונקציית המטרה

שלוש דרכים למצוא את הנקודה הטובה ביותר

4.1 פונקציית המטרה נותנת ציון לכל תוכנית

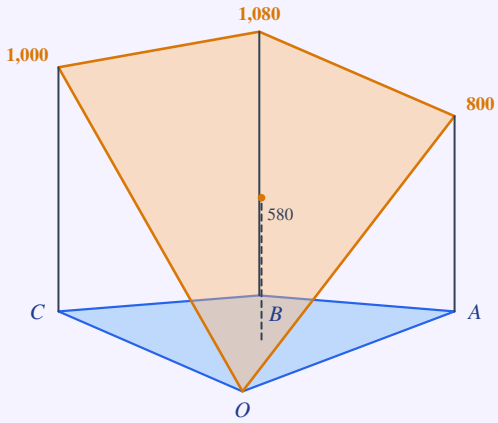
בסטודיו פונקציית המטרה היא הרווח היומי: $f(x, y) = 20x + 50y$. כל נקודה בתחום מקבלת ערך. למשל, התוכנית $(10, 10)$ מכניסה $f(10, 10) = 20 \cdot 10 + 50 \cdot 10 = 700$ ש״ח. המקדם של x הוא הרווח מחולצה אחת, והמקדם של y הוא הרווח מסווטשירט אחד.

בבעיות אחרות פונקציית המטרה היא **עלות** או **זמן**. אז מחפשים את הערך **הקטן** ביותר.

4.2 למה התשובה תמיד בקודקוד?

גג משופע מעל התחום

דמיינו שמעל כל נקודה בתחום עומד עמוד, והגובה שלו הוא הרווח בנקודה הזאת. הראשים של כל העמודים יוצרים משטח שטוח ומשופע, כמו גג ישר. בסרטוט רואים את העמודים בארבעת הקודקודים, ובקו מקווקו עמוד אחד מבפנים (הנקודה $(14, 6)$, עם רווח של 580).



הגובה הוא הרווח באותה נקודה

הגג עולה באופן אחיד לכיוון אחד. מי שהולך על הגג בכיוון העלייה עולה כל הזמן, עד שהוא נעצר בקצה התחום. משם אפשר להמשיך לעלות לאורך הקצה, עד פינה. לכן **הנקודה הגבוהה ביותר של גג שטוח היא תמיד פינה.** אם הגג משופע בדיוק לאורך אחת הצלעות, כל הצלע נמצאת באותו גובה, ואז יש הרבה נקודות טובות ביותר (פרק 6).

למורה הוכחה קצרה לכך שהמקסימום בקודקוד

לאורך קטע ישר, פונקציה לינארית משתנה באופן אחיד: כשמתקדמים צעדים שווים, הערך עולה (או יורד) בכמויות שוות. לכן על קטע הערך הגדול ביותר נמצא באחד הקצוות. עכשיו ניקח נקודה כלשהי P בתחום, ונזוז ממנה בקו ישר לכיוון שבו f לא קטנה, עד שנגיע לגבול התחום בנקודה Q. אז $f(Q) \geq f(P)$. הנקודה Q נמצאת על צלע, והצלע היא קטע. לכן באחד הקצוות שלה, קודקוד V, מתקיים $f(V) \geq f(Q) \geq f(P)$. מצאנו קודקוד שטוב לפחות כמו P, וזה נכון לכל נקודה P בתחום. לכן המקסימום מתקבל בקודקוד. אותו נימוק עובד למינימום. ההוכחה מניחה שהתחום סגור. בתחום פתוח ייתכן שאין מקסימום בכלל (פרק 6).

4.3 שיטה 1: הצבת הקודקודים

שיטה 1 הצבת הקודקודים

לבחינה

1. מוצאים את כל הקודקודים של התחום האפשרי (פרק 3).
2. מציבים כל קודקוד בפונקציית המטרה ורושמים את התוצאות בטבלה.
3. בוחרים את הערך הגדול ביותר (למקסימום) או הקטן ביותר (למינימום).
4. כותבים תשובה במילים, עם הכמויות והיחידות.

© אור בן שטרית · אינסוף

קודקוד	שיעורים	הצבה בפונקציית המטרה	הרווח היומי
O	$(0, 0)$	$20 \cdot 0 + 50 \cdot 0$	0
A	$(40, 0)$	$20 \cdot 40 + 50 \cdot 0$	800
B	$(24, 12)$	$20 \cdot 24 + 50 \cdot 12 = 480 + 600$	**1,080**
C	$(0, 20)$	$20 \cdot 0 + 50 \cdot 20$	1,000

תשובה הרווח המקסימלי הוא 1,080 ש״ח ביום, כשמכינים 24 חולצות ו־12 סווטשירטים. הרווח המינימלי הוא 0, כשלא מכינים כלום (ברור, אבל זה הקודקוד O).

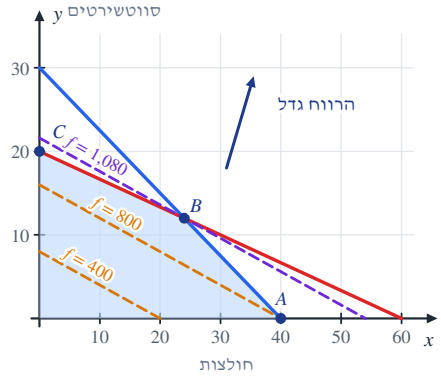
זו השיטה שכותבים בבחינה. היא תמיד עובדת כשהתחום סגור, והיא דורשת רק חישובים פשוטים. שתי השיטות הבאות עוזרות להבין את התשובה ולבדוק אותה.

4.4 שיטה 2: קווי רווח שווה (קווי גובה)

שיטה 2 **קווי רווח שווה**

להבנה ולבדיקה

הרעיון. כל התוכניות שמכניסות אותו רווח נמצאות על ישר אחד. למשל, כל התוכניות שמכניסות 800 ש״ח מקיימות $20x + 50y = 800$. זה ישר שעובר דרך $(40, 0)$ ו־$(0, 16)$.



לכל רווח יש ישר משלו: $20x + 50y = 400$, $20x + 50y = 800$ וכן הלאה. לכל הישרים האלה אותו שיפוע, $-\frac{20}{50} = -0.4$, ולכן הם מקבילים. ככל שהרווח גדול יותר, הישר רחוק יותר מהראשית.

השיטה. מסרטטים קו רווח אחד, ומזיזים אותו במקביל לכיוון שבו הרווח גדל, כל עוד הוא עדיין נוגע בתחום. הנקודה האחרונה שהקו נוגע בה לפני שהוא יוצא מהתחום היא נקודת המקסימום. כאן זו B, ו־$f(B) = 1,080$.

סרגל שמחליק על הדף

הניחו סרגל לאורך קו רווח, והחליקו אותו על הדף בלי לסובב אותו. כל עוד הסרגל חוצה את התחום, יש תוכניות עם הרווח הזה. הסרגל ״נפרד״ מהתחום תמיד בפינה, או לאורך צלע שלמה אם הוא מקביל לה. זה בדיוק ההסבר לעובדה שהתשובה נמצאת בקודקוד.

למורה **מה בתוכנית החדשה, ומה מעבר לה**

בחומרי ההדרכה הארציים לתוכנית החדשה (3 יח״ל, כיתה י״ב) מצוין שקווי גובה אינם חלק מהתוכנית, ושאת הערך המקסימלי או המינימלי מוצאים בהצבת הקודקודים. לכן בבחינה כותבים את שיטה 1. ובכל זאת כדאי להראות בכיתה את שיטה 2: היא נותנת לתלמידים תמונה למה ״הקודקוד מנצח״, והיא דרך מצוינת לבדוק תשובה. בדסמוס כותבים $20x + 50y = k$ עם סליידר ל־k, ומחפשים את ה־k הגדול ביותר שבו הקו עדיין נוגע בתחום. שיטה 3 היא העשרה לתלמידים חזקים. שאלות עם פרמטר אפשר לפתור גם בלעדיה, בהצבת הקודקודים (סעיף 6.7).

טריק: לסרטט קו רווח בלי שברים

בחרו רווח שמתחלק בשני המקדמים. ל־$20x + 50y$ מתאים הרווח 1,000: הישר $20x + 50y = 1,000$ עובר דרך $(50, 0)$ ו־$(0, 20)$. אחר כך מזיזים אותו במקביל.

© אור בן שטרית · אינסוף

4.5 שיטה 3: השוואת תלילות

שיטה 3 **השוואת תלילות**

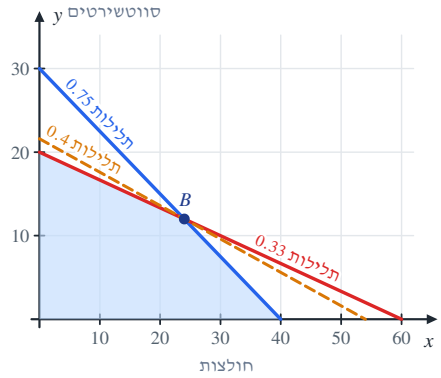
השיטה הזאת מנבאת איזה קודקוד ינצח, בלי להציב את כולם. היא מתאימה למקסימום כששני המקדמים בפונקציית המטרה חיוביים.

לכל ישר $ax + by = c$ נחשב את **התלילות** $a : b$, כלומר המקדם של x חלקי המקדם של y. זה הערך המוחלט של השיפוע.

- צלע ההדפסה $3x + 4y = 120$: $3 : 4 = 0.75$.
- צלע האריזה $x + 3y = 60$: $1 : 3 \approx 0.33$.
- פונקציית המטרה $20x + 50y$: $20 : 50 = 0.4$.

קו הרווח תלול יותר מצלע האריזה ופחות תלול מצלע ההדפסה. לכן הוא "נפרד" מהתחום בנקודה שבה שתי הצלעות האלה נפגשות: B.

העשרה



אפשר לסדר את זה על "סרגל תלילות". כל צלע של הגבול העליון היא סימן על הסרגל, והסימנים מחלקים אותו לתחומים, תחום לכל קודקוד:



- **קו רווח מתון מאוד** (תלילות קטנה מ־$\frac{1}{3}$): הסווטשירטים שווים הרבה יותר, והמקסימום ב־C, למעלה.
- **קו רווח תלול מאוד** (תלילות גדולה מ־$\frac{3}{4}$): החולצות שוות הרבה יותר, והמקסימום ב־A, ימינה.
- **תלילות ששווה בדיוק לתלילות של צלע:** כל הצלע הזאת טובה ביותר (פרק 6).

מתי השיטה הזאת שימושית?

לבדיקה מהירה של שיטה 1, ובעיקר בשאלות אתגר כמו "לאילו ערכים של הרווח מסווטשירט התוכנית B היא הטובה ביותר?". במקום לפתור הרבה אי־שוויונות, משווים תלילויות (תרגיל 20).

4.6 כך כותבים את זה בבחינה

כך נראית תשובה מלאה בבחינה

פונקציית המטרה: $f(x, y) = 20x + 50y$ (הרווח היומי בש"ח).

הקודקודים: $O(0, 0)$, $A(40, 0)$, $B(24, 12)$, $C(0, 20)$.

הצבה: $f(O) = 0$, $f(A) = 20 \cdot 40 = 800$, $f(B) = 20 \cdot 24 + 50 \cdot 12 = 1{,}080$, $f(C) = 50 \cdot 20 = 1{,}000$.

מסקנה: הערך הגדול ביותר, 1,080, מתקבל בקודקוד B.

תשובה: כדי שהרווח יהיה מקסימלי, הסטודיו צריך להכין 24 חולצות ו־12 סווטשירטים ביום. הרווח המקסימלי הוא 1,080 ש"ח ביום.

© אור בן שטרית · אינסוף

פרק 5 מסיפור לאילוצים

בונים את הבעיה בעצמנו, צעד אחר צעד

5.1 חמשת הצעדים של בניית בעיה

בבחינה הסיפור נתון במילים או בטבלה, ואת המתמטיקה צריך לכתוב לבד. זה החלק שבו תלמידים מאבדים הכי הרבה נקודות, ולכן כדאי לעבוד בו לפי סדר קבוע:

שיטה **מסיפור לאילוצים**

1. **מגדירים משתנים במדויק**, עם יחידות: "x = מספר מגשי הבשר שמכינים ביום", ולא רק "x = בשר".
2. **מסדרים את הנתונים בטבלה:** לכל משאב שורה, ולכל מוצר עמודה. בעמודה האחרונה כותבים כמה יש מהמשאב.
3. **כותבים אילוץ לכל משאב:** (כמה מהמשאב צורך מוצר אחד) × (הכמות שמייצרים), מסכמים לכל המוצרים, ודורשים שהסכום יהיה לכל היותר מה שיש.
4. **מוסיפים את האילוצים מהמילים:** דרישות מינימום, הגבלות מקסימום, יחסים בין הכמויות, וגם $x \geq 0$, $y \geq 0$.
5. **כותבים את פונקציית המטרה:** רווח, עלות או זמן.

5.2 מילון: ממילים לאי־שוויונות

בכל השורות: x = מספר החולצות, y = מספר הסווטשירטים.

המשפט	אי־השוויון	הערה
"הם מכינים לכל היותר 30 חולצות"	$x \leq 30$	גם "לא יותר מ־30", "עד 30"
"הם מכינים לפחות 10 סווטשירטים"	$y \geq 10$	גם "לא פחות מ־10"
"סך כל הבגדים לכל היותר 50"	$x + y \leq 50$	
"מספר הסווטשירטים אינו עולה על מספר החולצות"	$y \leq x$	
"מספר החולצות גדול לפחות פי 2 ממספר הסווטשירטים"	$x \geq 2y$	ראו את "טעות נפוצה" למטה
"יש לפחות 5 חולצות יותר מסווטשירטים"	$x \geq y + 5$	או $x - y \geq 5$
"לפחות 40% מהבגדים הם סווטשירטים" אתגר ⋆	$y \geq 0.4(x + y)$	אחרי סידור: $3y \geq 2x$
"הם מכינים בדיוק 12 סווטשירטים"	$y = 12$	זה ישר, לא חצי מישור

טעות נפוצה: "פי 2" בכיוון הלא נכון

המשפט "מספר החולצות גדול לפחות פי 2 ממספר הסווטשירטים" מתורגם הרבה פעמים ל־$2x \geq y$, וזה הפוך. בודקים עם מספר: אם מכינים $y = 10$ סווטשירטים, צריך לפחות 20 חולצות, כלומר $x \geq 20 = 2 \cdot 10$. לכן $x \geq 2y$. בכל אילוץ של "פי" הציבו מספר קטן ובדקו שהאי־שוויון אומר את מה שהמשפט אומר.

טעות נפוצה: שעות ודקות באותו אילוץ

אם חולצה דורשת 6 דקות הדפסה והמכונה עובדת 4 שעות, אי אפשר לכתוב $6x \leq 4$. קודם ממירים ליחידה אחת: 4 שעות הן 240 דקות, ולכן $6x + 8y \leq 240$.

© אור בן שטרית · אינסוף

טריק: טבלה בבגרות נקראת לפי עמודות

בשאלות בגרות הטבלה בנויה הרבה פעמים הפוך: המוצרים בשורות והמכונות בעמודות, ולמשל "זמן הפעלת מכונה א' (בשעות)" בראש עמודה. במקרה כזה כל עמודה של מכונה היא אילוץ אחד: עוברים על העמודה מלמעלה למטה, כופלים כל מספר במשתנה של השורה שלו, ומסכמים. לפני שכותבים אילוץ, שאלו את עצמכם: "על איזה משאב אני מדבר עכשיו?"

5.3 דוגמה מלאה: חברת קייטרינג

דוגמה פתורה

השאלה: חברת קייטרינג מכינה לאירועים מגשי בשר ומגשים צמחוניים. הכנה של מגש בשר נמשכת 20 דקות במטבח, והכנה של מגש צמחוני נמשכת 15 דקות. המטבח זמין לכל היותר 7 שעות ביום. בתנורים יש מקום ל־72 תבניות לכל היותר ביום: מגש בשר תופס שתי תבניות, ומגש צמחוני (לזניה גדולה) תופס שלוש תבניות. הלקוחות ביקשו שמספר המגשים הצמחוניים לא יהיה קטן ממספר מגשי הבשר. הרווח ממגש בשר הוא 60 ש"ח, וממגש צמחוני 50 ש"ח. כמה מגשים מכל סוג כדאי להכין ביום, כדי שהרווח יהיה מקסימלי?

1. **משתנים.** x = מספר מגשי הבשר ביום, y = מספר המגשים הצמחוניים ביום.

2. **טבלה.**

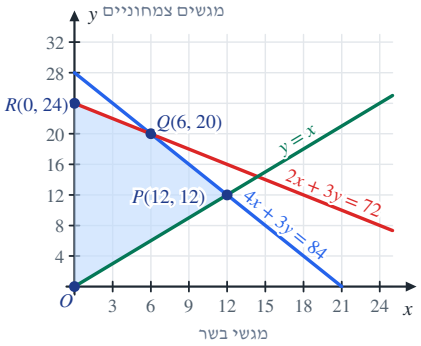
משאב	מגש בשר (x)	מגש צמחוני (y)	כמה יש
זמן במטבח (דקות)	20	15	420
מקומות בתנור	2	3	72

3. **אילוצי משאבים.** מטבח: $20x + 15y \le 420$, ואחרי חלוקה ב־5: $4x + 3y \le 84$. תנור: $2x + 3y \le 72$.

4. **אילוצים מהמילים.** "הצמחוניים לא פחות מהבשריים": $y \ge x$. ואי־שליליות: $x \ge 0$. (האילוץ $y \ge 0$ מתקיים ממילא, כי $y \ge x \ge 0$.)

5. **פונקציית המטרה.** $f(x, y) = 60x + 50y$.

6. **התחום והקודקודים.**



$O(0, 0)$: ציר ה־y והישר $y = x$.

P: $y = x$ והישר $4x + 3y = 84$: $4x + 3x = 84$, $x = 12$, $P(12, 12)$.

Q: שני ישרי המשאבים. חיסור: $(4x + 3y) - (2x + 3y) = 84 - 72$, $2x = 12$, $x = 6$, $y = 20$, $Q(6, 20)$.

R: ציר ה־y והישר $2x + 3y = 72$: $R(0, 24)$.

בדיקה של Q: $4 \cdot 6 + 3 \cdot 20 = 72$, $2 \cdot 6 + 3 \cdot 20 = 72$, $20 \ge 6$ מתקיים.

7. **הצבה בפונקציית המטרה.**

קודקוד	שיעורים	הצבה בפונקציית המטרה	הרווח
O	(0, 0)	0	0
P	(12, 12)	$60 \cdot 12 + 50 \cdot 12 = 720 + 600$	1,320
Q	**(6, 20)**	$\mathbf{60 \cdot 6 + 50 \cdot 20 = 360 + 1{,}000}$	**1,360**
R	(0, 24)	$50 \cdot 24$	1,200

תשובה כדאי להכין 6 מגשי בשר ו־20 מגשים צמחוניים ביום. הרווח המקסימלי הוא 1,360 ש"ח ביום.

בדיקה בשיטה 3: התלילות של פונקציית המטרה $60 : 50 = 1.2$ נמצאת בין $2 : 3 \approx 0.67$ (התנור) לבין $4 : 3 \approx 1.33$ (המטבח), ולכן הקודקוד הטוב ביותר הוא Q, שבו שתי הצלעות האלה נפגשות.

© אור בן שטרית · אינסוף

למה דווקא Q?

ב־Q שני המשאבים מנוצלים עד הסוף: המטבח עובד 420 דקות, וכל 72 המקומות בתנור מלאים. בקודקוד P התנור לא מלא (רק 60 מקומות תפוסים), וב־R המטבח לא עובד את כל הזמן. כשמשאב נשאר פנוי, אפשר בדרך כלל להזיז את התוכנית ולהרוויח יותר. לכן הרבה פעמים התשובה היא הקודקוד שבו "אף משאב לא מתבזבז". זו לא הוכחה, וחייבים להציב את כל הקודקודים, אבל זו דרך טובה לבדוק שהתשובה הגיונית.

למורה **קריאת סיפור, טבלאות ובדיקה במספרים**

רוב הטעויות בשאלות תכנון לינארי הן בשלב התרגום, ולא בחישוב. שלושה הרגלים שכדאי לבנות בכיתה: (1) הגדרת משתנים מלאה, עם "מספר ה..." ועם יחידת זמן ("ביום", "במחזור ייצור"); (2) טבלה לפני אילוצים, גם כשהשאלה לא מבקשת אותה. בבגרות הטבלה מופיעה בדרך כלל כשהמוצרים בשורות, ולכן כדאי לתרגל במפורש "עמודה אחת = אילוץ אחד"; (3) בדיקה במספר בכל אילוץ של יחס ("פי", "יותר מ...", "אחוז מ..."). תרגיל קצר שעובד טוב: לכתוב על הלוח חמישה אילוצים, ולבקש מהתלמידים לכתוב לכל אחד משפט מתאים בהקשר של סיפור. הכיוון ההפוך, מאי־שוויון לסיפור, מחדד מאוד את ההבנה.

© אור בן שטרית · אינסוף

פרק 6 מקרים מיוחדים

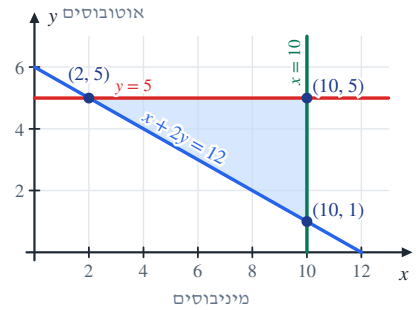
מינימום, תחום פתוח, הרבה פתרונות, מספרים שלמים, שאלות "האם אפשר?" ופרמטר

6.1 מינימום: עלות או זמן

כשפונקציית המטרה היא עלות או זמן, מחפשים את הערך הקטן ביותר. השיטה זהה: מוצאים את הקודקודים, מציבים, ובוחרים את הקטן. בבעיות כאלה האילוצים הם בדרך כלל דרישות מינימום ("לפחות..."), ולכן הראשית בדרך כלל לא נמצאת בתחום.

דוגמה פתורה

השאלה: בית ספר מזמין הסעות ל־300 תלמידים. מיניבוס מסיע 25 תלמידים, ואוטובוס מסיע 50. לחברת ההסעות יש לכל היותר 10 מיניבוסים ו־5 אוטובוסים פנויים. נסיעה במיניבוס עולה 700 ש"ח, ובאוטובוס 1,500 ש"ח. כמה כלי רכב מכל סוג כדאי להזמין, כדי שהעלות תהיה הקטנה ביותר?



1. x = מספר המיניבוסים, y = מספר האוטובוסים.
2. מקומות: $25x + 50y \geq 300$, כלומר $x + 2y \geq 12$. זמינות: $x \leq 10$, $y \leq 5$.
3. עלות: $f(x, y) = 700x + 1{,}500y$.
4. הקודקודים: $(10, 1)$, $(10, 5)$, $(2, 5)$. למשל $(2, 5)$: מציבים $y = 5$ ב־$x + 2y = 12$ ומקבלים $x = 2$.
5. הצבה: $f(10, 1) = 7{,}000 + 1{,}500 = 8{,}500$, $f(10, 5) = 7{,}000 + 7{,}500 = 14{,}500$, $f(2, 5) = 1{,}400 + 7{,}500 = 8{,}900$.

תשובה העלות הקטנה ביותר, 8,500 ש"ח, מתקבלת כשמזמינים 10 מיניבוסים ואוטובוס אחד.

מחיר למקום

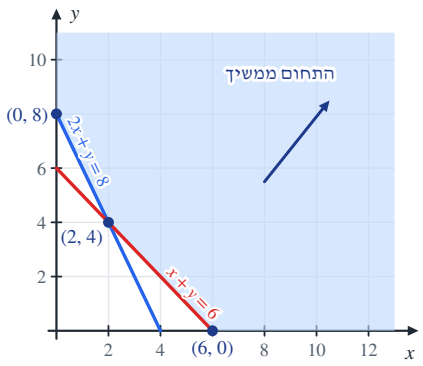
מקום במיניבוס עולה $700 : 25 = 28$ ש"ח, ומקום באוטובוס $1{,}500 : 50 = 30$ ש"ח. המיניבוסים זולים יותר לכל תלמיד, ולכן משתמשים בכל 10 המיניבוסים ומשלימים באוטובוס. האינטואיציה מסבירה את התשובה, אבל בבחינה כותבים את טבלת הקודקודים.

טעות נפוצה: "המינימום הוא 0 בראשית"

בבעיות מינימום תלמידים מציבים את $(0, 0)$ ומקבלים עלות 0. אבל $(0, 0)$ לא מקיימת $x + 2y \geq 12$: בלי כלי רכב אי אפשר להסיע אף תלמיד. מציבים רק קודקודים שבאמת שייכים לתחום.

6.2 תחום פתוח: מינימום כן, מקסימום לא

התחום של $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \geq 8$, $x + y \geq 6$ ממשיך ימינה ולמעלה עד אינסוף. לפונקציית המטרה $f(x, y) = 3x + 2y$:



$f(0, 8) = 16$, $f(2, 4) = 14$, $f(6, 0) = 18$.

- **מינימום:** 14, בנקודה $(2, 4)$.
- **מקסימום:** אין. אפשר לבחור נקודות רחוקות כמה שרוצים, למשל $(100, 100)$ עם $f = 500$, והערך ממשיך לגדול.

בתחום פתוח בודקים קודם לאיזה כיוון הוא "פתוח". כששני המקדמים בפונקציית המטרה חיוביים והתחום פתוח ימינה ולמעלה, יש מינימום ואין מקסימום.

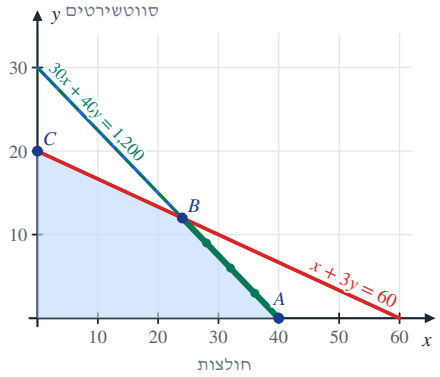
© אור בן שטרית · אינסוף

6.3 הרבה פתרונות טובים ביותר

נחזור לסטודיו, אבל עם רווחים אחרים: 30 ש״ח לחולצה ו־40 ש״ח לסווטשירט. עכשיו $f(x,y)=30x+40y$:

$f(O)=0$, $f(A)=1{,}200$, $f(B)=720+480=1{,}200$, $f(C)=800$.

המקסימום מתקבל בשני קודקודים, A ו־B, וגם בכל נקודה על הצלע AB שביניהם. הסיבה: קו הרווח $30x+40y=1{,}200$ מקביל לצלע ההדפסה $3x+4y=120$. למעשה $30x+40y=10(3x+4y)$.



כמה תוכניות בשלמים? על הישר $3x+4y=120$, בין $x=24$ לבין $x=40$, הערך של y שלם כש־x מתחלק ב־4: $(24,12)$, $(28,9)$, $(32,6)$, $(36,3)$, $(40,0)$. חמש תוכניות, וכולן מכניסות 1,200 ש״ח.

למה זה קורה?

דקה של מכונת ההדפסה מכניסה בדיוק אותו רווח, לא משנה מה מדפיסים: חולצה מכניסה 30 ש״ח ב־6 דקות, כלומר 5 ש״ח לדקה, וסווטשירט מכניס 40 ש״ח ב־8 דקות, גם 5 ש״ח לדקה. כשמכונת ההדפסה היא המשאב שנגמר, לא משנה איך מחלקים את הזמן שלה.

טריק: איך מזהים שיש הרבה פתרונות?

בטבלת הקודקודים שני קודקודים סמוכים מקבלים את אותו ערך מקסימלי. או, עוד לפני ההצבה: פונקציית המטרה היא כפולה של אחד האילוצים (כאן פי 10).

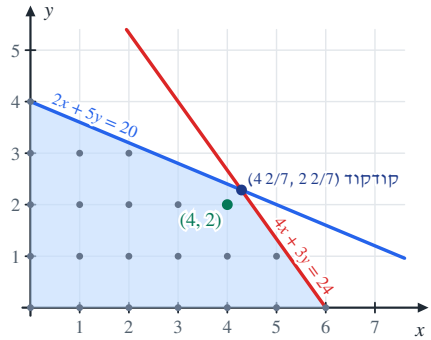
6.4 כשהתשובה חייבת להיות במספרים שלמים

כשסופרים פריטים (אופניים, אנשים, כלי רכב), התשובה חייבת להיות במספרים שלמים. אם הקודקוד הטוב ביותר שלם, סיימנו. אם לא, לא מעגלים בעיניים: עיגול יכול להוציא אותנו מהתחום, או לתת תוכנית שאינה הטובה ביותר. כשמודדים כמות שאפשר לחלק (טונות, קילוגרמים, דונמים), קודקוד לא שלם הוא תשובה תקינה, ואין מה לעגל.

דוגמה פתורה

השאלה: x ו־y הם מספרים שלמים. מצאו את הערך הגדול ביותר של $f(x,y)=3x+4y$ בתחום: $x\ge 0$, $y\ge 0$, $2x+5y\le 20$, $4x+3y\le 24$.

1. הקודקוד הטוב ביותר הוא $(4\frac{2}{7}, 2\frac{2}{7})$, ושם $f=22$. הוא לא שלם.
2. עיגול כלפי מעלה לא עובד: $(4,3)$ מחוץ לתחום: $2\cdot 4+5\cdot 3=23>20$. גם $(5,2)$ בחוץ: $4\cdot 5+3\cdot 2=26>24$.
3. שיטה מסודרת: לכל x שלם מוצאים את ה־y השלם הגדול ביותר שמותר, ומחשבים את f.



x	0	1	2	3	4	5	6
y הגדול ביותר	4	3	3	2	2	1	0
$f=3x+4y$	16	15	18	17	**20**	19	18

תשובה הערך הגדול ביותר בשלמים הוא 20, בנקודה $(4,2)$.

© אור בן שטרית · אינסוף

לא תמיד הנקודה השלמה הטובה ביותר צמודה לקודקוד

כאן הנקודה $(4, 2)$ קרובה לקודקוד. אבל יש בעיות שבהן הנקודה השלמה הטובה ביותר רחוקה ממנו (תרגיל 21 מראה מקרה כזה). לכן כשהקודקוד לא שלם, עוברים על הנקודות השלמות באופן מסודר, כמו בטבלה.

6.5 שאלות "האם אפשר...?" ו"כמה ייצרו?"

- **"האם אפשר להרוויח 1,100 ש"ח?"** בסטודיו הרווח המקסימלי הוא 1,080 ש"ח, ולכן לא.
- **"האם אפשר להרוויח 900 ש"ח?"** כן. כשמותרים גם מספרים לא שלמים, כל ערך בין המינימום (0) למקסימום (1,080) אפשרי. אבל "כן" לבד לא מספיק. צריך להראות תוכנית: מציבים $x = 0$, ואז $50y = 900$, כלומר $y = 18$. התוכנית $(0, 18)$ בתחום: $3 \cdot 0 + 4 \cdot 18 = 72 \le 120$ וגם $0 + 3 \cdot 18 = 54 \le 60$.
- **מלכודת של שלמים:** הרווח $20x + 50y$ תמיד מתחלק ב־10, ולכן רווח של 905 ש"ח בלתי אפשרי, אף שהוא קטן מהמקסימום.
- **"הסטודיו הרוויח 1,000 ש"ח והכין 10 חולצות. כמה סווטשירטים הכין?"** מציבים: $20 \cdot 10 + 50y = 1{,}000$, $50y = 800$, $y = 16$. ובודקים שהתוכנית $(10, 16)$ אפשרית: $30 + 64 = 94 \le 120$, $10 + 48 = 58 \le 60$. התשובה: 16 סווטשירטים.

6.6 מוסיפים אילוץ חדש

אילוץ נוסף יכול רק להקטין את התחום או להשאיר אותו כמו שהוא, ולכן הרווח המקסימלי יכול רק לרדת או להישאר כמו שהוא. דוגמה: לקוח קבוע מזמין מהסטודיו לפחות 15 סווטשירטים ביום ($y \ge 15$). התחום החדש הוא משולש שקודקודיו $(0, 15)$, $(15, 15)$ ו־$(0, 20)$. הרווחים: $f(0, 15) = 750$, $f(15, 15) = 300 + 750 = 1{,}050$, $f(0, 20) = 1{,}000$. הרווח המקסימלי ירד מ־1,080 ש"ח ל־1,050 ש"ח. כלומר, לקוח כזה "עולה" לסטודיו 30 ש"ח ביום. כדאי לקבל אותו רק אם הוא מביא תועלת נוספת (תרגיל 17).

6.7 פרמטר בפונקציית המטרה

בשאלה מסוג זה אחד המקדמים בפונקציית המטרה לא ידוע, ומסמנים אותו באות, למשל p. נתון מידע נוסף, ומוצאים ממנו את הפרמטר. זו דרישה של תוכנית הלימודים, ואין צורך בשום כלי חדש: מציבים את הקודקודים כרגיל, והתוצאה היא ביטוי עם p.

שיטה **מציאת פרמטר** — לבחינה

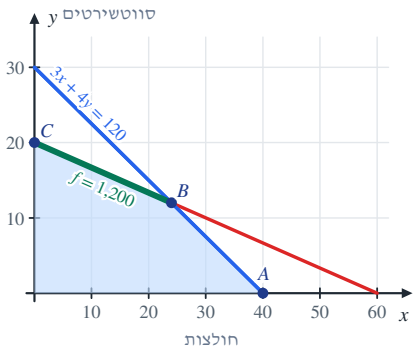
1. מוצאים את הקודקודים, כרגיל.
2. מציבים כל קודקוד בפונקציית המטרה, ומקבלים ביטוי עם הפרמטר.
3. כותבים משוואה לפי הנתון: ערך שווה בשני קודקודים, או ערך מקסימלי נתון.
4. פותרים, ובודקים בטבלה שהערך שמצאנו באמת מתאים לנתון.

© אור בן שטרית · אינסוף

דוגמה פתורה

השאלה: בסטודיו הרווח מחולצה נשאר 20 ש״ח, והרווח מסווטשירט השתנה ל־p ש״ח. האילוצים לא השתנו. מצאו את p בכל אחד מהמקרים:

א. הרווח ב־B שווה לרווח ב־C. **ב.** הרווח המקסימלי הוא 1,140 ש״ח.



הצבה. $f(x,y)=20x+py$, ולכן: $f(O)=0$, $f(A)=800$, $f(B)=480+12p$, $f(C)=20p$.

א. $p=60 \Rightarrow 8p=480 \Rightarrow 480+12p=20p$. אז $f(B)=f(C)=1{,}200$, וזה גם המקסימום, כי $f(A)=800$. פונקציית המטרה היא $20x+60y=20(x+3y)$, והיא מקבילה לצלע BC.

ב. הערך 1,140 לא יכול להתקבל ב־A, כי $f(A)=800$. נבדוק את שני המועמדים האחרים:

אם המקסימום ב־	משוואה	בדיקה: הערך בקודקוד האחר	המסקנה
B	$480+12p=1{,}140 \Rightarrow p=55$	$f(C)=20\cdot 55=1{,}100 \le 1{,}140$	**מתאים**
C	$20p=1{,}140 \Rightarrow p=57$	$f(B)=480+12\cdot 57=1{,}164 > 1{,}140$	לא מתאים

תשובה א. $p=60$. ב. $p=55$: הרווח המקסימלי 1,140 ש״ח מתקבל ב־$B(24,12)$.

טעות נפוצה: עוצרים אחרי המשוואה

בסעיף ב המשוואה $20p=1{,}140$ נותנת $p=57$, ומי שעוצר שם טועה: עם $p=57$ הרווח ב־B גדול מ־1,140, ולכן 1,140 כלל לא המקסימום. אחרי שמוצאים פרמטר, מציבים אותו בכל הקודקודים ובודקים.

למורה מה מופיע בבחינה, ומה מוסיף הבנה

בשש הבחינות של קיץ תשפ״ד עד קיץ תשפ״ו כל השאלות עסקו ברווח מקסימלי בתחום סגור, ונוספו אליהן שאלות כמו ״האם ייתכן...? נמקו״ ו״כמה ייצרו?״. מינימום ותחום פתוח הם חלק מתוכנית הלימודים (קבוצת דוגמאות 1.2), ולכן חשוב ללמד אותם גם אם לא הופיעו לאחרונה. הקודקודים לא תמיד שלמים: כשהכמויות נמדדות בטונות או בקילוגרמים, הקודקוד הטוב ביותר יכול לצאת שבר, ואין בכך בעיה. בשאלות ״האם אפשר״ חשוב לדרוש נימוק מלא: השוואה למקסימום, ואם התשובה חיובית, דוגמה של תוכנית שמראה זאת.

שאלה עם פרמטר לא הופיעה בבחינות האלה, אבל הנושא מופיע בתוכנית הלימודים כמטרה אופרטיבית וכקבוצת דוגמאות נפרדת (1.3), ולכן כדאי לתרגל אותו. לכל התלמידים מתאים תרגיל 19. תרגילים 20 ו־22 הם שאלות אתגר באותו רעיון: תחום של ערכים לפרמטר, ושני פרמטרים.

© אור בן שטרית · אינסוף

פרק 7 — המתכון לשאלת בגרות

שמונה צעדים קבועים, ורשימת בדיקה לפני שמגישים

7.1 שמונה הצעדים

כמעט כל שאלת תכנון לינארי בבגרות בנויה מאותם סעיפים, באותו סדר. מי שמכיר את הסדר יודע בכל רגע מה הצעד הבא.

שיטה המתכון — לבחינה

1. **משתנים.** כתבו במפורש מה מייצגים x ו־y, כולל "מספר ה…" ויחידת הזמן (ביום, במחזור ייצור). אם השאלה כבר הגדירה אותם, השתמשו בהגדרה שלה.
2. **טבלה.** סדרו את הנתונים. בטבלה של בגרות: כל עמודה של מכונה או משאב היא אילוץ.
3. **מערכת אילוצים.** אילוץ לכל משאב, אילוצים מהמילים, ו־$x \geq 0$, $y \geq 0$. בדקו כל אילוץ של "פי" עם מספר.
4. **סרטוט.** ישרים בעזרת החיתוכים עם הצירים, משוואה ליד כל ישר, נקודת בדיקה לכל אילוץ, ותחום צבוע.
5. **קודקודים.** זהו בסרטוט אילו ישרים נפגשים בכל קודקוד, ופתרו אלגברית. בדקו כל קודקוד בכל האילוצים.
6. **פונקציית המטרה.** רשמו אותה עם היחידות (רווח בש"ח, זמן בדקות).
7. **טבלת ערכים.** הציבו כל קודקוד, ובחרו את הגדול ביותר (או הקטן ביותר).
8. **תשובה במילים.** "כדי ש… יש לייצר … ו־…, והרווח המקסימלי יהיה … ש"ח".

7.2 ניסוחים שחוזרים בבחינה, ומה עושים בכל אחד

הניסוח	מה עושים
"רשמו (כתבו) את מערכת האילוצים של הבעיה"	צעדים 1 עד 3. לא לשכוח את $x \geq 0$, $y \geq 0$.
"סרטטו את התחום האפשרי"	צעד 4. ישרים, חיצים או נקודת בדיקה, וצביעה.
"מצאו את שיעורי הקודקודים"	צעד 5: פתרון אלגברי של זוגות ישרים.
"רשמו את פונקציית המטרה"	צעד 6. רק הביטוי, למשל $f(x, y) = 400x + 700y$.
"כמה … כדאי לייצר כדי שהרווח יהיה מקסימלי?"	צעדים 7 ו־8: טבלת קודקודים ותשובה במילים.
"מהו הרווח המקסימלי?"	הערך הגדול ביותר בטבלה, עם ש"ח.
"האם ייתכן ש…? נמקו"	מציבים באילוצים, או משווים למקסימום. אם כן, מראים תוכנית מתאימה.
"במחזור ייצור מסוים ייצרו רק …"	מציבים $x = 0$ או $y = 0$, ומוצאים את הכמות הגדולה ביותר שמותרת בכל האילוצים.
"הרווח היה … והמפעל ייצר …. כמה … ייצר?"	מציבים בפונקציית המטרה, פותרים משוואה, ובודקים שהנקודה בתחום.
"שני הגרפים מתארים את התחומים… קבעו איזה מתאים ל…"	לכל מערכת: איפה כל ישר חותך את הצירים, ובאיזה צד התחום. מחפשים פרט שמבדיל.
"הרווח בשני קודקודים שווה. מצאו את הפרמטר"	כותבים את הערכים עם הפרמטר, משווים, ובודקים בטבלה (סעיף 6.7).

© אור בן שטרית · אינסוף

7.3 רשימת בדיקה לפני שעוברים לשאלה הבאה

בדקתי ש...

- ☐ המשתנים מוגדרים עם "מספר ה..." ועם יחידת זמן.
- ☐ כל אילוץ של "פי" או "לפחות ... יותר מ..." נבדק עם מספר.
- ☐ כל קודקוד מקיים את כל האילוצים (הצבתי, לא רק הסתכלתי).
- ☐ בבעיית מינימום לא הצבתי $(0, 0)$ אם היא לא את בתחום.
- ☐ התשובה הסופית כתובה במילים, עם כמויות ויחידות.
- ☐ היחידות אחידות בכל אילוץ (דקות עם דקות, שעות עם שעות).
- ☐ ליד כל ישר בסרטוט כתובה המשוואה שלו, והתחום צבוע.
- ☐ הצבתי בפונקציית המטרה את כל הקודקודים, ולא רק את "המועמד".
- ☐ אם סופרים פריטים, התשובה במספרים שלמים.

טריק: בדיקת היגיון של שלוש שניות

הרווח המקסימלי חייב להיות לפחות כמו הרווח מכל תוכנית "פשוטה", למשל לייצר רק מוצר אחד. אם יצא לכם רווח מקסימלי קטן מהרווח של אחד הקודקודים על הצירים, יש טעות בחישוב.

למורה **מה מצפים לראות בתשובה מלאה**

תשובה מלאה בשאלת תכנון לינארי כוללת: הגדרת משתנים, מערכת אילוצים, סרטוט שבו הישרים מסומנים והתחום מסומן, חישוב שיעורי הקודקודים, פונקציית מטרה, הצבה של כל הקודקודים, ומסקנה מנומקת במילים. בשאלון מופיעה ההוראה "חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה", ולכן כדאי להרגיל את התלמידים לכתוב את כל השלבים גם כשהתשובה "ברורה" להם מהסרטוט. מומלץ לתלות בכיתה את שמונת הצעדים כפוסטר, ולבקש בכל תרגיל לסמן ליד כל שלב את מספר הצעד.

7.4 מפת השאלות בבחינות האחרונות

בשאלון שני פרקים ושש שאלות, ועונים על ארבע. שאלת התכנון הלינארי היא אחת משתי השאלות של הפרק הראשון, לצד שאלה בגאומטרייה אנליטית. הטבלה מסכמת את השאלות של קיץ תשפ"ד עד קיץ תשפ"ו.

מה רואים בטבלה: בכל השאלות מחפשים רווח מקסימלי בתחום סגור. בחמש מתוך שש צריך לכתוב בעצמנו את מערכת האילוצים, ובשלוש יש טבלה. בשלוש מסרטטים את התחום, בשתיים הוא נתון בסרטוט, ובאחת בוחרים אותו מבין כמה סרטוטים. הסעיף האחרון הוא בדרך כלל שאלה על מקרה מסוים, ולכן כדאי לתרגל הרבה סוגים שלו (תרגילים 11 עד 18).

בחינה	שאלה	הסיפור	מה נשאלו, מעבר לאילוצים ולרווח המקסימלי
קיץ תשפ"ד, א	2	מארזי מתנה של סבונים וקרמים, עם טבלה	זיהוי התחום מבין שלושה סרטוטים; אילוץ שמשתנה ל"לפחות", וזיהוי התחום החדש.
קיץ תשפ"ד, ב	2	שני סוגי אבקת כביסה ושתי מכונות, עם טבלה	סרטוט התחום; קודקוד לא שלם (בטונות); נתון הרווח והכמות מסוג אחד, ומוצאים את הכמות מהסוג השני.
קיץ תשפ"ה, א	1	מארזי שי של שוקולד וחטיפים	התחום נתון בסרטוט, ומוצאים את שיעורי הקודקודים; "האם ייתכן...?" עם נימוק.
קיץ תשפ"ה, ב	1	שני סוגי סלט ושתי מכונות, עם טבלה	סרטוט התחום; קודקוד לא שלם (בקילוגרמים).
קיץ תשפ"ו, א	1	שני סוגי מנות במסעדה	מערכת האילוצים נתונה, ומסרטטים; שינוי באחוזים ברווח ממנה, ובכמה גדל הרווח המקסימלי.
קיץ תשפ"ו, ב	1	שני סוגי סוכריות בשקית	התחום נתון בסרטוט, ומוצאים את שיעורי הקודקודים; השוואה בין שקית מסוג אחד לשקית של התוכנית הטובה ביותר.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגילים

ארבעה שלבים, מהקל אל הקשה. פתרון מלא לכל תרגיל מופיע בפרק הפתרונות

שלב א · בסיס

רמת קושי

ישרים, חצאי מישור, נקודות חיתוך ותרגום מילים. מתאים אחרי פרקים 2 ו־3.

1 נתון אי־השוויון $2x + 5y \le 20$.

א. סרטטו את הישר $2x + 5y = 20$ בשיטת החיתוכים עם הצירים.

ב. בעזרת נקודת בדיקה, קבעו איזה צד של הישר מקיים את אי־השוויון, וצבעו אותו.

ג. בדקו אילו מהנקודות מקיימות את אי־השוויון: $P(5, 2)$, $Q(3, 3)$, $R(10, 0)$, $S(1, 3)$, $T(8, 1)$. אילו מהן נמצאות בדיוק על הישר?

ד. בודדו את y באי־השוויון. האם התחום שצבעתם נמצא מעל הישר או מתחתיו? האם זה מתאים לתשובה שלכם בסעיף ב?

פתרון מלא: עמ׳ 33

2 לכל אחד מאי־השוויונות סרטטו את ישר הגבול, וצבעו את חצי המישור שמקיים אותו. נמקו בעזרת נקודת בדיקה.

א. $y \ge 2x$ **ב.** $x \le 6$ **ג.** $x + y \ge 4$ **ד.** $3x - 2y \le 6$

פתרון מלא: עמ׳ 33

3 מצאו את נקודת החיתוך של כל זוג ישרים. בכל סעיף בחרו את הדרך הנוחה ביותר (השוואה, הצבה או חיסור משוואות), ובדקו את התשובה בשתי המשוואות.

א. $y = 3x - 4$ ו־$y = -x + 8$

ב. $x + y = 15$ ו־$y = 2x$

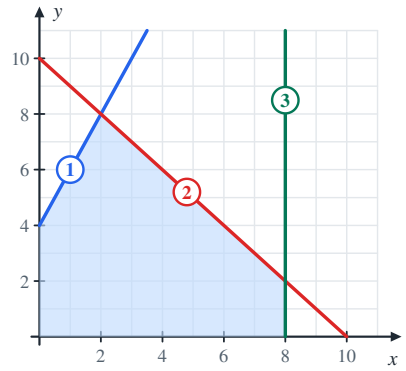
ג. $2x + 3y = 24$ ו־$2x + y = 16$

ד. $2x + 3y = 30$ ו־$5x + 2y = 42$

ה. $y = \frac{1}{2}x + 2$ ו־$3x + 2y = 36$

פתרון מלא: עמ׳ 34

4 בסרטוט תחום אפשרי. גבולות התחום הם הצירים ושלושה ישרים.



א. מצאו את המשוואה של כל אחד מהישרים 1, 2 ו־3.

ב. כתבו את מערכת האילוצים שמתארת את התחום.

ג. מצאו את שיעורי הקודקודים של התחום.

ד. האם הנקודות $(5, 5)$, $(1, 7)$ ו־$(8, 3)$ נמצאות בתחום? נמקו.

פתרון מלא: עמ׳ 34

© אור בן שטרית · אינסוף

5 נתונה מערכת האילוצים: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 2y \leq 16$, $3x + y \leq 18$.

א. סרטטו את התחום האפשרי.

ב. מצאו את שיעורי הקודקודים.

ג. חשבו את הערך של $f(x, y) = 4x + 5y$ בכל קודקוד.

ד. מהו הערך המקסימלי של f בתחום, ומהו הערך המינימלי?

ה. האם הנקודה $(5, 4)$ נמצאת בתחום? נמקו.

פתרון מלא: עמ׳ 35

6 משאית מובילה ארגזים קטנים וארגזים גדולים. נסמן: x = מספר הארגזים הקטנים, y = מספר הארגזים הגדולים. כתבו כל משפט כאי־שוויון.

א. סך כל הארגזים במשאית הוא לכל היותר 50.

ב. במשאית יש לפחות 10 ארגזים גדולים.

ג. מספר הארגזים הקטנים גדול לפחות פי 2 ממספר הארגזים הגדולים.

ד. ארגז קטן שוקל 4 ק״ג, וארגז גדול שוקל 10 ק״ג. המשאית יכולה להוביל עד 300 ק״ג.

ה. מספר הארגזים הגדולים אינו עולה על מספר הארגזים הקטנים.

ו. מספר הארגזים הקטנים גדול לפחות ב־5 ממספר הארגזים הגדולים.

ז. הטעינה של ארגז קטן נמשכת 3 דקות, והטעינה של ארגז גדול 5 דקות. לטעינה יש לכל היותר שעה.

ח. **חשיבה** הנהג טוען: ״אם האילוץ של סעיף ג מתקיים, אז בטוח מתקיים גם האילוץ של סעיף ה״. האם הוא צודק? נמקו.

פתרון מלא: עמ׳ 35

שלב ב · מיומנויות

רמת קושי

בעיה שלמה מהתחלה ועד הסוף, מינימום, קווי רווח ושאלות ״האם אפשר?״. מתאים אחרי פרקים 4 עד 6.

7 חקלאי מגדל בחממות עגבניות שרי ופלפלים, ויש לו לכל היותר 10 דונם. כל דונם של עגבניות צורך 300 מ״ק מים בעונה, וכל דונם של פלפלים צורך 500 מ״ק. לרשות החקלאי עומדים לכל היותר 4,000 מ״ק מים. הרווח מדונם עגבניות הוא 4,000 ש״ח, ומדונם פלפלים 6,000 ש״ח. נסמן: x = מספר הדונמים של עגבניות, y = מספר הדונמים של פלפלים.

א. כתבו את מערכת האילוצים.

ב. סרטטו את התחום האפשרי, ומצאו את שיעורי הקודקודים.

ג. רשמו את פונקציית המטרה.

ד. כמה דונם מכל גידול כדאי לגדל, כדי שהרווח יהיה מקסימלי? מהו הרווח המקסימלי?

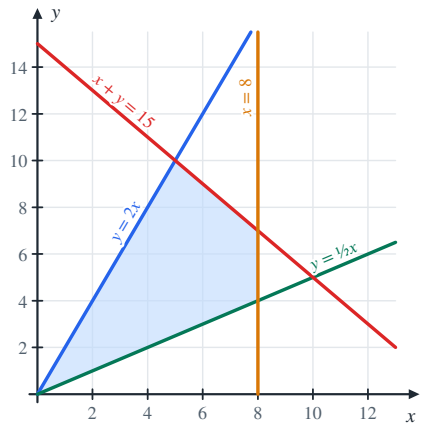
ה. האם החקלאי יכול לגדל 6 דונם עגבניות ו־4 דונם פלפלים? אם כן, כמה ירוויח?

ו. **חשיבה** בתוכנית של סעיף ד, האם החקלאי מנצל את כל האדמה ואת כל המים? מה זה אומר על הקודקוד שמצאתם?

פתרון מלא: עמ׳ 36

© אור בן שטרית · אינסוף

8 בסרטוט תחום אפשרי שחסום על ידי הישרים $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x$, $x + y = 15$ ו־$x = 8$.



א. כתבו את מערכת האילוצים של התחום.

ב. מצאו את שיעורי הקודקודים.

ג. מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של $f(x, y) = x + 2y$ בתחום.

ד. מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של $g(x, y) = 3x - y$ בתחום.

ה. **חשיבה** הציעו פונקציית מטרה מהצורה $h(x, y) = ax + by$, שהערך המקסימלי שלה מתקבל רק בקודקוד שבו נפגשים הישרים $x = 8$ ו־$x + y = 15$. בדקו את ההצעה שלכם.

פתרון מלא: עמ׳ 36

9 בפנסיון לכלבים מערבבים שני סוגים של מזון יבש. בכל ק״ג ממזון א׳ יש 2 יחידות חלבון ויחידת סיבים אחת. בכל ק״ג ממזון ב׳ יש יחידת חלבון אחת ו־3 יחידות סיבים. התערובת היומית צריכה לכלול לפחות 12 יחידות חלבון ולפחות 21 יחידות סיבים. ק״ג ממזון א׳ עולה 6 ש״ח, וק״ג ממזון ב׳ עולה 4 ש״ח. נסמן: x = מספר הק״ג ממזון א׳, y = מספר הק״ג ממזון ב׳ בתערובת היומית.

א. כתבו את מערכת האילוצים.

ב. סרטטו את התחום האפשרי. האם הוא סגור או פתוח?

ג. מצאו את שיעורי הקודקודים.

ד. רשמו את פונקציית המטרה (העלות היומית).

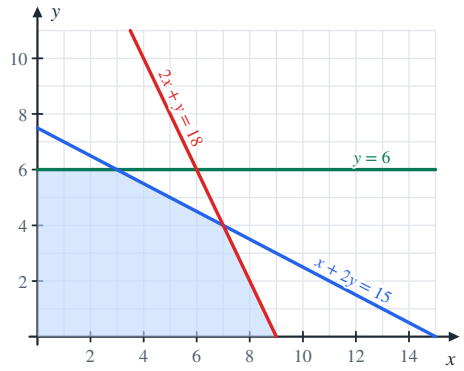
ה. כמה ק״ג מכל סוג כדאי לקנות כדי שהעלות תהיה הקטנה ביותר? מהי העלות הזאת?

ו. האם יש לתערובת עלות מקסימלית? הסבירו.

ז. **חשיבה** המחיר של מזון א׳ עלה ל־10 ש״ח לק״ג. האם התערובת הזולה ביותר משתנה? אם כן, מהי עכשיו?

פתרון מלא: עמ׳ 37

10 בסרטוט התחום האפשרי של המערכת $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq 6$, $x + 2y \leq 15$, $2x + y \leq 18$. נתונה פונקציית המטרה $f(x, y) = 2x + 3y$.



א. מצאו את שיעורי הקודקודים של התחום.

ב. סרטטו על הסרטוט את הישר $2x + 3y = 12$. מה הערך של f בכל נקודה על הישר הזה?

ג. סרטטו גם את הישרים $2x + 3y = 18$ ו־$2x + 3y = 24$. מה משותף לשלושת הישרים?

ד. לאיזה כיוון ״זז״ הישר כשהערך של f גדל?

ה. הזיזו את הישר במקביל, עד שהוא נוגע בתחום בפעם האחרונה. באיזו נקודה זה קורה? מהו הערך המקסימלי של f?

ו. בדקו את התשובה של סעיף ה בשיטת הקודקודים.

ז. **חשיבה** עכשיו פונקציית המטרה היא $g(x, y) = x + 2y$. מצאו את הערך המקסימלי של g. בכמה נקודות בתחום הוא מתקבל? בכמה מהן שני השיעורים הם מספרים שלמים?

פתרון מלא: עמ׳ 38

© אור בן שטרית · אינסוף

11 מאפייה קטנה מכינה פיצות משפחתיות ומגשי לחמניות. לכל פיצה צריך ק״ג אחד של בצק, ולכל מגש לחמניות גם ק״ג אחד. בכל יום יש לכל היותר 30 ק״ג בצק. אפייה של פיצה נמשכת 4 דקות בתנור, ושל מגש לחמניות 12 דקות. התנור פנוי לכל היותר 4 שעות ביום. המאפייה מוכרת לכל היותר 25 פיצות ביום. הרווח מפיצה הוא 40 ש״ח, וממגש לחמניות 60 ש״ח. נסמן: x = מספר הפיצות, y = מספר מגשי הלחמניות שמכינים ביום.

א. כתבו את מערכת האילוצים.

ב. סרטטו את התחום האפשרי, ומצאו את שיעורי הקודקודים.

ג. האם אפשר להכין ביום אחד 20 פיצות ו־12 מגשי לחמניות? ומה לגבי 18 פיצות ו־12 מגשים?

ד. מהו הרווח המקסימלי, ובאיזו תוכנית הוא מתקבל?

ה. האם המאפייה יכולה להרוויח 1,600 ש״ח ביום? נמקו.

ו. ביום מסוים הרוויחה המאפייה 1,400 ש״ח, והכינה 20 פיצות. כמה מגשי לחמניות הכינה?

ז. **אתגר ⋆** מצאו את כל התוכניות, במספרים שלמים, שבהן הרווח היומי הוא בדיוק 1,400 ש״ח.

פתרון מלא: עמ׳ 38

שלב ג · שאלות בסגנון בגרות

רמת קושי ▂▃▅▁

שאלות מלאות כמו בשאלון 35372: טבלאות, דרישות מינימום, כמה פתרונות, השוואה בין מפעלים, אילוץ חדש ופרמטר.

12 מפעל מייצר אופני עיר ואופני הרים. כל זוג אופניים עובר שתי מחלקות: הרכבה וצביעה. בטבלה מוצג מספר השעות שכל סוג צריך בכל מחלקה.

	זמן הרכבה (בשעות)	זמן צביעה (בשעות)
אופני עיר	3	1
אופני הרים	2	2

במחזור ייצור אחד מחלקת ההרכבה יכולה לעבוד לכל היותר 36 שעות, ומחלקת הצביעה לכל היותר 20 שעות. נסמן: x = מספר אופני העיר, y = מספר אופני ההרים שמייצרים במחזור ייצור אחד.

א. כתבו את מערכת האילוצים של הבעיה.

ב. סרטטו את התחום האפשרי, ומצאו את שיעורי הקודקודים.

הרווח מזוג אופני עיר הוא 300 ש״ח, ומזוג אופני הרים 500 ש״ח.

ג. (1) רשמו את פונקציית המטרה. (2) כמה זוגות מכל סוג כדאי לייצר במחזור אחד, כדי שהרווח יהיה מקסימלי? מהו הרווח המקסימלי?

ד. במחזור ייצור מסוים ייצר המפעל רק אופני הרים. כמה זוגות של אופני הרים לכל היותר אפשר לייצר במחזור כזה, ומה יהיה הרווח?

ה. במחזור אחר הרוויח המפעל 4,600 ש״ח, ובמחזור הזה יוצרו 2 זוגות של אופני עיר. כמה זוגות של אופני הרים יוצרו?

פתרון מלא: עמ׳ 39

© אור בן שטרית · אינסוף

13 חנות פרחים מכינה לקראת החג זרים קטנים וזרים גדולים. בזר קטן יש 5 פרחים, ובזר גדול 10 פרחים. בחנות יש 300 פרחים. הכנה של זר קטן נמשכת 6 דקות, והכנה של זר גדול 24 דקות, ולכל ההכנות יחד יש לכל היותר 10 שעות. כבר הוזמנו מהחנות לפחות 10 זרים גדולים. בחדר הקירור יש מקום לכל היותר ל־30 זרים קטנים. נסמן: x = מספר הזרים הקטנים, y = מספר הזרים הגדולים.

א. רשמו מערכת אי־שוויונות מתאימה, וסרטטו את התחום האפשרי.

ב. מצאו את שיעורי הקודקודים.

ג. הרווח מזר קטן הוא 30 ש״ח, ומזר גדול 80 ש״ח. רשמו את פונקציית המטרה. כמה זרים מכל סוג כדאי להכין, כדי שהרווח יהיה מקסימלי?

ד. לקוח ביקש שהחנות תכין בדיוק 22 זרים גדולים. כמה זרים קטנים לכל היותר אפשר להכין יחד איתם, ומה יהיה הרווח?

ה. **חשיבה** הראו שבתוכנית של סעיף ג החנות משתמשת בכל הפרחים וגם בכל 10 השעות. האם יש עוד תוכנית שבה זה קורה? הסבירו.

פתרון מלא: עמ׳ 40

14 מוסך אופניים מתקן אופניים רגילים ואופניים חשמליים. תיקון של אופניים רגילים לוקח לטכנאי שעה אחת, ותיקון של אופניים חשמליים שעתיים. הטכנאי עובד לכל היותר 16 שעות בשבוע. החלקים לתיקון של אופניים רגילים עולים 100 ש״ח, ולתיקון של אופניים חשמליים 400 ש״ח, ותקציב החלקים לשבוע הוא לכל היותר 2,800 ש״ח. בגלל המקום במוסך, אפשר לקבל לכל היותר 12 אופניים בשבוע. נסמן: x = מספר האופניים הרגילים, y = מספר האופניים החשמליים שמתקנים בשבוע.

א. כתבו את מערכת האילוצים.

ב. סרטטו את התחום האפשרי, ומצאו את שיעורי הקודקודים.

ג. הרווח מתיקון של אופניים רגילים הוא 80 ש״ח, ומתיקון של אופניים חשמליים 160 ש״ח. רשמו את פונקציית המטרה, ומצאו את הרווח המקסימלי.

ד. כמה תוכניות עבודה שונות, במספרים שלמים, נותנות את הרווח המקסימלי? כתבו את כולן.

ה. **חשיבה** הסבירו בעזרת ״רווח לכל שעה של הטכנאי״ למה יש כמה תוכניות שנותנות את אותו רווח.

ו. בעל המוסך העלה את המחיר של תיקון אופניים חשמליים, ועכשיו הרווח מכל תיקון כזה הוא 170 ש״ח. האם יש עכשיו תוכנית אחת שהיא הטובה ביותר? אם כן, מהי?

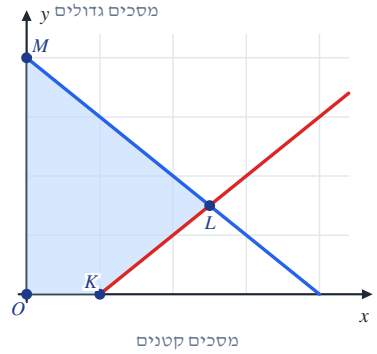
פתרון מלא: עמ׳ 41

© אור בן שטרית · אינסוף

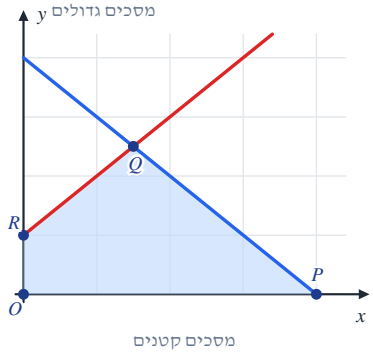
15 שני מפעלים, מפעל א׳ ומפעל ב׳, מייצרים מסכים קטנים ומסכים גדולים. נסמן: x = מספר המסכים הקטנים, y = מספר המסכים הגדולים שמייצרים ביום.

מערכת האילוצים של מפעל א׳: $x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq x + 10,\ x + y \leq 40$.

מערכת האילוצים של מפעל ב׳: $x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \geq x - 10,\ x + y \leq 40$.



גרף 1



גרף 2

א. לפניכם שני גרפים, 1 ו־2, שמתארים את התחומים האפשריים של שני המפעלים. קבעו איזה גרף מתאים למפעל א׳ ואיזה למפעל ב׳. נמקו.

ב. הסבירו במילים, בהקשר של המפעל, מה אומר האילוץ $y \leq x + 10$.

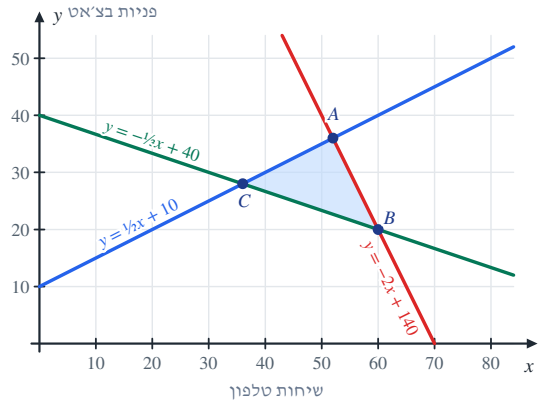
ג. מצאו את שיעורי הקודקודים של כל אחד מהתחומים.

ד. הרווח של כל אחד מהמפעלים ממסך קטן הוא 60 ש״ח, וממסך גדול 40 ש״ח. (1) רשמו את פונקציית המטרה. (2) באיזה מפעל הרווח המקסימלי גבוה יותר? מהו הרווח המקסימלי של המפעל הזה?

ה. בכמה גדול הרווח המקסימלי של מפעל אחד מהרווח המקסימלי של המפעל השני?

פתרון מלא: עמ׳ 42

16 מוקד שירות של חברת אינטרנט מטפל בשיחות טלפון ובפניות בצ׳אט. התחום המסורטט מתאר את מספר השיחות (x) ומספר הפניות בצ׳אט (y) שאפשר לטפל בהן במשמרת אחת, לפי הנהלים של המוקד.



א. כתבו את מערכת האילוצים שמתארת את התחום.

ב. מצאו את שיעורי הקודקודים A, B ו־C.

ג. טיפול בשיחת טלפון נמשך 4 דקות, וטיפול בפנייה בצ׳אט 3 דקות. רשמו פונקציית מטרה לזמן הטיפול הכולל במשמרת.

ד. באיזה קודקוד זמן הטיפול הכולל הוא הקטן ביותר? מהו הזמן הזה, בשעות ובדקות?

ה. הנהלת המוקד החליטה שבכל משמרת יטופלו לפחות 30 פניות בצ׳אט. מהו עכשיו זמן הטיפול הקטן ביותר, ובכמה שיחות ופניות הוא מתקבל?

פתרון מלא: עמ׳ 42

© אור בן שטרית · אינסוף

17 מחלבה גדולה מייצרת גבינה ויוגורט. לכל טונה של גבינה צריך 4 אלף ליטר חלב, ולכל טונה של יוגורט 2 אלף ליטר. בכל יום מגיעים למחלבה לכל היותר 40 אלף ליטר חלב. כל טונה של גבינה צריכה שעה אחת בקו האריזה, וכל טונה של יוגורט שעתיים, וקו האריזה עובד לכל היותר 16 שעות ביום. הרווח מטונה של גבינה הוא 5 אלף ש"ח, ומטונה של יוגורט 4 אלף ש"ח. נסמן: x = מספר הטונות של גבינה, y = מספר הטונות של יוגורט שמייצרים ביום.

א. כתבו את מערכת האילוצים, סרטטו את התחום האפשרי, ומצאו את הקודקודים שלו.

ב. מהו הרווח המקסימלי, ובאיזו תוכנית הוא מתקבל?

ג. רשת שיווק מציעה למחלבה חוזה: לייצר בכל יום לפחות 6 טונות יוגורט. הוסיפו את האילוץ, ומצאו את התחום החדש ואת הקודקודים שלו.

ד. מהו הרווח המקסימלי עם החוזה? בכמה הוא קטן מהרווח המקסימלי בלי החוזה?

ה. **חשיבה** רשת השיווק מציעה למחלבה בונוס של 10 אלף ש"ח ביום, אם תחתום על החוזה. האם כדאי למחלבה לחתום? נמקו.

פתרון מלא: עמ' 43

18 מפעל צעצועים מייצר רכבות עץ ובובות. כל צעצוע עובר שלוש מחלקות: ניסור, הרכבה וצביעה. בטבלה מוצגות שעות העבודה שכל צעצוע צריך בכל מחלקה, וגם מספר השעות שכל מחלקה זמינה במחזור ייצור.

	ניסור (בשעות)	הרכבה (בשעות)	צביעה (בשעות)
רכבת עץ	1	1	2
בובה	3	1	1
שעות זמינות במחזור	30	14	24

נסמן: x = מספר רכבות העץ, y = מספר הבובות שמייצרים במחזור ייצור.

א. כתבו את מערכת האילוצים.

ב. סרטטו את התחום האפשרי, ומצאו את שיעורי כל הקודקודים.

ג. הרווח מרכבת עץ הוא 100 ש"ח, ומבובה 150 ש"ח. כמה צעצועים מכל סוג כדאי לייצר במחזור, כדי שהרווח יהיה מקסימלי? מהו הרווח הזה?

ד. בתוכנית של סעיף ג, באיזו מחלקה נשארות שעות פנויות? כמה שעות?

ה. **חשיבה** מנהל המפעל רוצה להוסיף שעות עבודה לאחת המחלקות. לאיזו מחלקה בטוח לא כדאי להוסיף שעות? נמקו.

פתרון מלא: עמ' 44

19 בית מלאכה מייצר תיקי גב וארנקים מעור. בגלל כמות העור, אפשר לייצר בכל שבוע לכל היותר 30 פריטים. תפירה של תיק גב נמשכת שעתיים, ותפירה של ארנק שעה אחת, והתופרת עובדת לכל היותר 44 שעות בשבוע. בגלל המלאי של רוכסנים, אפשר לייצר לכל היותר 20 ארנקים בשבוע. הרווח מתיק גב הוא 60 ש"ח, והרווח מארנק הוא p ש"ח. נסמן: x = מספר תיקי הגב, y = מספר הארנקים שמייצרים בשבוע.

א. כתבו את מערכת האילוצים.

ב. סרטטו את התחום האפשרי, ומצאו את שיעורי הקודקודים.

ג. בטאו באמצעות p את הרווח בכל קודקוד.

ד. ידוע שהרווח בקודקוד $(14, 16)$ שווה לרווח בקודקוד $(10, 20)$. מצאו את p ואת הרווח המקסימלי.

ה. בתקופה אחרת הרווח מארנק השתנה, וידוע שהרווח המקסימלי הוא 2,000 ש"ח. מצאו את p, ואת התוכנית שנותנת את הרווח הזה.

פתרון מלא: עמ' 45

© אור בן שטרית · אינסוף

שלב ד · אתגר

רמת קושי

תחום ערכים לפרמטר, פתרונות בשלמים, בעיות הפוכות, ערך של שעת עבודה ואילוץ מיותר. כאן צריך לחשוב, לא רק להפעיל שיטה.

20 סדנה מייצרת סקייטבורדים וקורקינטים. נסמן: x = מספר הסקייטבורדים, y = מספר הקורקינטים שמייצרים בשבוע. מערכת האילוצים היא: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \leq 30$ (שעות הרכבה), $x + 2y \leq 24$ (שעות צביעה), $y \leq 10$ (חלקים במלאי).

א. סרטטו את התחום האפשרי, ומצאו את שיעורי הקודקודים.

ב. הרווח מסקייטבורד הוא 40 ש״ח, ומקורקינט 50 ש״ח. מצאו את התוכנית שנותנת את הרווח המקסימלי.

ג. הסדנה שוקלת לשנות את המחיר של הקורקינטים, כך שהרווח מקורקינט יהיה p ש״ח ($p > 0$). הרווח מסקייטבורד נשאר 40 ש״ח. בטאו באמצעות p את הרווח בכל קודקוד.

ד. אתגר ⋆ לאילו ערכים של p התוכנית שמצאתם בסעיף ב נשארת הטובה ביותר?

ה. לאילו ערכים של p יש יותר מתוכנית אחת טובה ביותר? מהן התוכניות האלה בכל מקרה?

ו. חשיבה הראו שהקודקוד $(0, 10)$ אף פעם לא נותן את הרווח הגדול ביותר, לא משנה מהו p.

פתרון מלא: עמ׳ 46

21 חדר כושר קונה אופני כושר והליכונים. מחיר של אופני כושר הוא 5,000 ש״ח, ומחיר של הליכון 9,000 ש״ח. התקציב הוא לכל היותר 45,000 ש״ח, ובחדר יש מקום לכל היותר ל־6 מכשירים. כל אופני כושר משמשים בממוצע 5 שעות אימון ביום, וכל הליכון 8 שעות. חדר הכושר רוצה שמספר שעות האימון ביום יהיה גדול ככל האפשר. נסמן: x = מספר אופני הכושר, y = מספר ההליכונים.

א. כתבו את מערכת האילוצים ואת פונקציית המטרה.

ב. סרטטו את התחום האפשרי, ומצאו את שיעורי הקודקודים.

ג. באיזה קודקוד פונקציית המטרה מקבלת את הערך הגדול ביותר? האם חדר הכושר יכול לבצע את התוכנית הזאת? הסבירו.

ד. רון מציע לעגל את שני השיעורים של הקודקוד למספרים השלמים הקרובים ביותר. בדקו את ההצעה שלו.

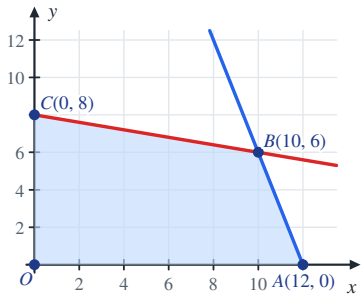
ה. דנה מציעה לעגל את שני השיעורים כלפי מטה. כמה שעות אימון ביום תיתן ההצעה שלה?

ו. אתגר ⋆ מצאו את התוכנית הטובה ביותר במספרים שלמים.

ז. חשיבה הסבירו למה התוכנית הטובה ביותר במספרים שלמים רחוקה מהקודקוד.

פתרון מלא: עמ׳ 47

22 בסרטוט תחום אפשרי שהקודקודים שלו הם $O(0, 0)$, $A(12, 0)$, $B(10, 6)$ ו־$C(0, 8)$.



א. מצאו את המשוואות של הישרים AB ו־BC, וכתבו את מערכת האילוצים של התחום.

ב. פונקציית המטרה היא $f(x, y) = ax + by$. ידוע ש־$f(A) = 600$ ו־$f(C) = 560$. מצאו את a ואת b.

ג. מצאו את הערך המקסימלי של f בתחום.

ד. נניח שהמקדם b לא משתנה, ורק a משתנה. מהו הערך הקטן ביותר של a שבשבילו הקודקוד A הוא נקודת מקסימום?

ה. אתגר ⋆ מצאו ערכים חיוביים של a ו־b, כך שהערך המקסימלי של f יתקבל בכל הנקודות של הצלע BC, והערך הזה יהיה 400.

פתרון מלא: עמ׳ 47

© אור בן שטרית · אינסוף

23 סדנת תכשיטים מייצרת שרשראות וצמידים. נסמן: x = מספר השרשראות, y = מספר הצמידים בשבוע.
שרשרת צריכה 2 שעות הלחמה ושעה אחת של ליטוש, וצמיד צריך שעה אחת של הלחמה ושעתיים של ליטוש.
בשבוע יש לכל היותר 40 שעות הלחמה ולכל היותר 50 שעות ליטוש. הרווח משרשרת הוא 50 ש״ח, ומצמיד 40 ש״ח.

א. כתבו את מערכת האילוצים, ומצאו את הרווח המקסימלי.

ב. חבר מציע להשכיר לסדנה עמדת הלחמה נוספת ל־3 שעות בשבוע, ב־15 ש״ח לשעה. מצאו את הרווח המקסימלי כשיש 43 שעות הלחמה. האם כדאי לשכור את העמדה?

ג. חבר אחר מציע 3 שעות ליטוש נוספות בשבוע, גם הן ב־15 ש״ח לשעה. האם כדאי לקבל את ההצעה הזאת?

ד. אתגר ⋆ בכמה גדל הרווח המקסימלי בעקבות כל שעת הלחמה נוספת? ובעקבות כל שעת ליטוש נוספת? מהו המחיר הגבוה ביותר שכדאי לשלם על שעת הלחמה נוספת?

פתרון מלא: עמ׳ 48

24 סדנת קרמיקה מייצרת ספלים וקערות. לספל צריך חצי ק״ג חימר, ולקערה ק״ג אחד. בשבוע יש לכל היותר 40 ק״ג חימר. הזיגוג של ספל נמשך 10 דקות, והזיגוג של קערה 15 דקות, ועמדת הזיגוג פנויה לכל היותר 15 שעות בשבוע. החנות של הסדנה יכולה למכור לכל היותר 60 ספלים בשבוע. נסמן: x = מספר הספלים, y = מספר הקערות שמייצרים בשבוע.

א. כתבו את מערכת האילוצים.

ב. סרטטו את התחום האפשרי. הראו שאחד האילוצים לא משפיע על התחום. איזה אילוץ?

ג. הרווח מספל הוא 40 ש״ח, ומקערה 60 ש״ח. מצאו את הרווח המקסימלי.

ד. חשיבה כמה דקות זיגוג צריך בכל אחד מהקודקודים? מהו הזמן הארוך ביותר שעמדת הזיגוג עובדת בשבוע, בתוכנית אפשרית כלשהי?

ה. אתגר ⋆ בעלת הסדנה רוצה לצמצם את השעות של עמדת הזיגוג, בלי שהרווח המקסימלי יקטן. לכמה שעות בשבוע אפשר לצמצם אותן? הסבירו.

פתרון מלא: עמ׳ 49

25 דנה קיבלה 100 אלף ש״ח, והחליטה להשקיע אותם, כולם או חלקם, בשתי קרנות. קרן א׳ סולידית ומניבה 4% בשנה, וקרן ב׳ מסוכנת יותר ומניבה 7% בשנה. היועץ שלה ביקש להשקיע בקרן א׳ לפחות 20 אלף ש״ח, ולהשקיע בקרן ב׳ לכל היותר פי 1.5 מהסכום שבקרן א׳. נסמן: x = הסכום בקרן א׳, y = הסכום בקרן ב׳ (באלפי ש״ח).

א. כתבו את מערכת האילוצים, ופונקציית מטרה לרווח השנתי (באלפי ש״ח).

ב. סרטטו את התחום האפשרי, ומצאו את שיעורי הקודקודים.

ג. כמה כדאי להשקיע בכל קרן, כדי שהרווח השנתי יהיה מקסימלי? מהו הרווח הזה?

ד. חשיבה האם בתוכנית הטובה ביותר דנה משקיעה את כל הכסף? האם זה מפתיע? הסבירו.

ה. התשואה של קרן ב׳ ירדה ל־r אחוזים בשנה, והתשואה של קרן א׳ נשארה 4%. לאילו ערכים של r כבר לא כדאי להשקיע בקרן ב׳ בכלל?

ו. אתגר ⋆ חוזרים לתשואה של 7% בקרן ב׳. דנה רוצה רווח שנתי של לפחות 5,200 ש״ח, אבל להשקיע בקרן ב׳ המסוכנת סכום קטן ככל האפשר. מהו הסכום הקטן ביותר שעליה להשקיע בקרן ב׳?

פתרון מלא: עמ׳ 49

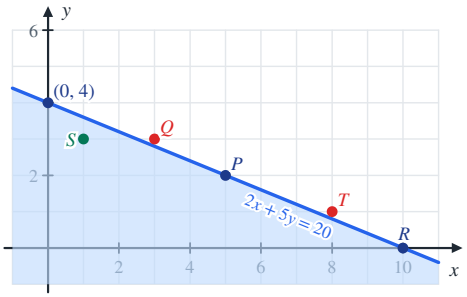
© אור בן שטרית · אינסוף

פתרונות מלאים

פתרון מפורט לכל תרגיל. נסו קודם לבד, ורק אחר כך השוו

פתרון תרגיל 1

חזרה לתרגיל (עמ׳ 24)



א. מציבים $x = 0$: $5y = 20$, $y = 4$, ומקבלים את הנקודה $(0, 4)$.
מציבים $y = 0$: $2x = 20$, $x = 10$, ומקבלים את הנקודה $(10, 0)$. מעבירים ישר דרך שתי הנקודות.

ב. נקודת בדיקה $(0, 0)$: $2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0 \le 20$. המשפט נכון, ולכן צובעים את הצד שבו נמצאת הראשית.

ג. מציבים כל נקודה בביטוי $2x + 5y$ ומשווים ל־20:

נקודה	$2x + 5y$	מסקנה
$P(5, 2)$	$10 + 10 = 20$	מקיימת, ונמצאת בדיוק על הישר
$Q(3, 3)$	$6 + 15 = 21$	לא מקיימת, כי $21 > 20$
$R(10, 0)$	$20 + 0 = 20$	מקיימת, ונמצאת בדיוק על הישר
$S(1, 3)$	$2 + 15 = 17$	מקיימת, ונמצאת בתוך התחום
$T(8, 1)$	$16 + 5 = 21$	לא מקיימת

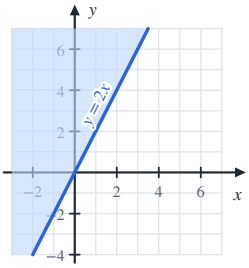
תשובה הנקודות P, R ו־S מקיימות את אי־השוויון. P ו־R נמצאות על הישר.

ד. $5y \le 20 - 2x \Rightarrow y \le 4 - 0.4x$. קיבלנו … $\le y$, ולכן התחום נמצא **מתחת** לישר. זה מתאים לסעיף ב, כי הראשית נמצאת מתחת לישר (הישר חותך את ציר ה־y בגובה 4).

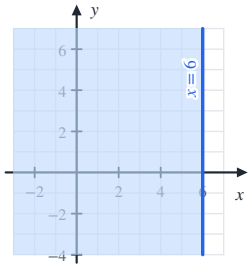
פתרון תרגיל 2

חזרה לתרגיל (עמ׳ 24)

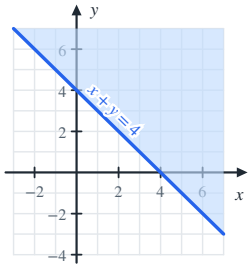
א. $y \ge 2x$



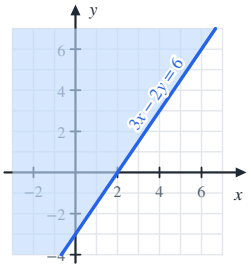
ב. $x \le 6$



ג. $x + y \ge 4$



ד. $3x - 2y \le 6$



א. הישר $y = 2x$ עובר בראשית, ולכן אי אפשר להשתמש ב־$(0, 0)$. בוחרים $(1, 0)$: $0 \ge 2$, לא נכון. צובעים את הצד שבו **לא** נמצאת $(1, 0)$, כלומר מעל הישר. בדיקה עם $(0, 1)$: $1 \ge 0$, נכון.

ב. הישר $x = 6$ אנכי. נקודת בדיקה $(0, 0)$: $0 \le 6$, נכון. צובעים את הצד של הראשית, כלומר משמאל לישר.

ג. הישר $x + y = 4$ עובר דרך $(4, 0)$ ו־$(0, 4)$. נקודת בדיקה $(0, 0)$: $0 \ge 4$, לא נכון. צובעים את הצד שבו לא נמצאת הראשית.

© אור בן שטרית · אינסוף

ד. הישר $3x-2y=6$ עובר דרך $(2,0)$ ו־$(0,-3)$. נקודת בדיקה $(0,0)$: $0\le 6$, נכון, ולכן צובעים את הצד של הראשית. גם בבידוד y מקבלים את אותו צד: $-2y\le 6-3x\Rightarrow y\ge 1.5x-3$ (חילקנו במספר שלילי, ולכן הסימן התהפך). כלומר מעל הישר, והראשית אכן מעל הישר.

פתרון תרגיל 3

חזרה לתרגיל (עמ׳ 24)

א. השוואה: $3x-4=-x+8\Rightarrow 4x=12\Rightarrow x=3$. $y=3\cdot 3-4=5$. נקודת החיתוך: $(3,5)$. בדיקה: $-3+8=5$.

ב. הצבה: מציבים $y=2x$ במשוואה הראשונה: $x+2x=15\Rightarrow x=5, y=10$. נקודת החיתוך: $(5,10)$. בדיקה: $5+10=15$.

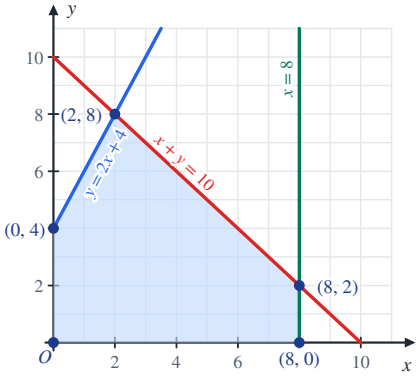
ג. חיסור משוואות: $(2x+3y)-(2x+y)=24-16\Rightarrow 2y=8\Rightarrow y=4$. $2x+4=16\Rightarrow x=6$. נקודת החיתוך: $(6,4)$. בדיקה: $12+12=24$.

ד. משווים מקדמים: כופלים את המשוואה הראשונה ב־2 ואת השנייה ב־3: $4x+6y=60$, $15x+6y=126$. מחסרים: $11x=66\Rightarrow x=6$. $2\cdot 6+3y=30\Rightarrow y=6$. נקודת החיתוך: $(6,6)$. בדיקה: $5\cdot 6+2\cdot 6=42$.

ה. הצבה: $3x+2(\frac{1}{2}x+2)=36\Rightarrow 3x+x+4=36\Rightarrow 4x=32\Rightarrow x=8$. $y=\frac{1}{2}\cdot 8+2=6$. נקודת החיתוך: $(8,6)$. בדיקה: $24+12=36$.

פתרון תרגיל 4

חזרה לתרגיל (עמ׳ 24)



א. ישר 1 עובר דרך $(0,4)$ ו־$(2,8)$. השיפוע הוא $\frac{8-4}{2-0}=2$, והישר חותך את ציר ה־y ב־4, ולכן $y=2x+4$.

ישר 2 עובר דרך $(10,0)$ ו־$(0,10)$, ולכן $x+y=10$.

ישר 3 אנכי ועובר דרך $(8,0)$, ולכן $x=8$.

ב. בוחרים נקודה בתוך התחום, למשל $(2,2)$: $2\le 2\cdot 2+4=8$, $2+2=4\le 10$. מכאן הכיוונים של אי־השוויונות:

$$\begin{cases} x\ge 0, y\ge 0 \\ y\le 2x+4 \\ x+y\le 10 \\ x\le 8 \end{cases}$$

ג. הקודקודים: $(0,0)$; $(8,0)$; $(8,2)$: מציבים $x=8$ ב־$x+y=10$; $(2,8)$:
$x=2, y=8\Rightarrow 3x=6\Rightarrow 2x+4=10-x$; $(0,4)$: ישר 1 חותך את ציר ה־y.

ד. $(5,5)$: $5\le 14$, $5+5=10\le 10$, $5\le 8$. כל האילוצים מתקיימים, ולכן הנקודה בתחום. היא נמצאת על ישר 2, כלומר על גבול התחום.

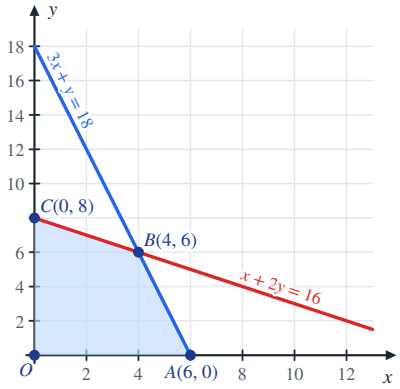
$(1,7)$: האם $2\cdot 1+4=6\le 7$? לא נכון. הנקודה מחוץ לתחום.

$(8,3)$: $8+3=11>10$. הנקודה מחוץ לתחום.

© אור בן שטרית · אינסוף

פתרון תרגיל 5

חזרה לתרגיל (עמ׳ 25)



א. הישר $x+2y=16$ עובר דרך $(16,0)$ ו־$(0,8)$, והישר $3x+y=18$ עובר דרך $(6,0)$ ו־$(0,18)$. הראשית מקיימת את שני האילוצים, ולכן התחום הוא האזור שמתחת לשני הישרים, ברביע הראשון.

ב. $O(0,0)$. $A(6,0)$: מציבים $y=0$ ב־$3x+y=18$. בדיקה: $0 \le 16$.
$C(0,8)$: מציבים $x=0$ ב־$x+2y=16$. בדיקה: $8 \le 18$. B:
מהמשוואה השנייה $y=18-3x$. מציבים בראשונה:
$x+2(18-3x)=16 \Rightarrow -5x=-20 \Rightarrow x=4,\ y=6$. $B(4,6)$.

ג.

קודקוד	שיעורים	הצבה בפונקציית המטרה	$f=4x+5y$
O	$(0,0)$	$4\cdot 0+5\cdot 0$	0
A	$(6,0)$	$4\cdot 6+5\cdot 0$	24
B	$(4,6)$	$4\cdot 4+5\cdot 6=16+30$	**46**
C	$(0,8)$	$4\cdot 0+5\cdot 8$	40

ד. **תשובה** הערך המקסימלי הוא 46, בנקודה $B(4,6)$. הערך המינימלי הוא 0, בנקודה $O(0,0)$.

ה. $4\cdot 2+5=13 \le 16$, אבל $3\cdot 5+4=19>18$. הנקודה $(5,4)$ לא נמצאת בתחום.

פתרון תרגיל 6

חזרה לתרגיל (עמ׳ 25)

א. $x+y \le 50$

ב. $y \ge 10$

ג. $x \ge 2y$. בדיקה: אם $y=10$, צריך לפחות 20 ארגזים קטנים.

ד. $4x+10y \le 300$, ואחרי חלוקה ב־2:
$2x+5y \le 150$

ה. $y \le x$

ו. $x \ge y+5$, או $x-y \ge 5$

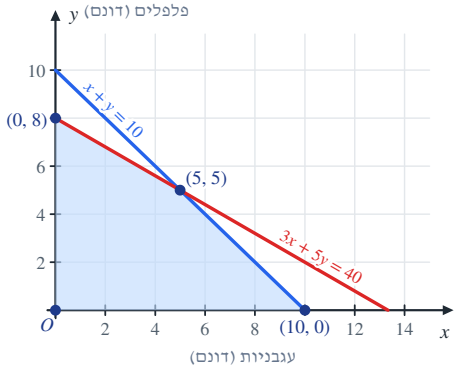
ז. $3x+5y \le 60$ (שעה היא 60 דקות)

ח. הנהג צודק. מספר הארגזים לא שלילי, ולכן $y \ge 0$ ו־$2y \ge y$. אם $x \ge 2y$, אז $x \ge 2y \ge y$, כלומר $x \ge y$, וזה בדיוק האילוץ $y \le x$ של סעיף ה. במילים: אם מספר הארגזים הקטנים גדול לפחות פי 2 ממספר הגדולים, אז בוודאי הוא לפחות כמספר הגדולים.

© אור בן שטרית · אינסוף

פתרון תרגיל 7

חזרה לתרגיל (עמ׳ 25)



א. אדמה: $x+y\le 10$. מים: $300x+500y\le 4{,}000$, ואחרי חלוקה ב־100: $3x+5y\le 40$. ועוד: $x\ge 0$, $y\ge 0$.

ב. הקודקודים: $O(0,0)$; $(10,0)$, ובדיקה: $30\le 40$; $(0,8)$, ובדיקה: $8\le 10$.

החיתוך של שני הישרים:

$x=10-y \Rightarrow 3(10-y)+5y=40 \Rightarrow 2y=10 \Rightarrow y=5,\ x=5$.

הקודקוד $(5,5)$.

ג. $f(x,y)=4{,}000x+6{,}000y$.

ד.

שיעורים	הצבה בפונקציית המטרה	הרווח (ש״ח)
$(0,0)$	0	0
$(10,0)$	$4{,}000\cdot 10$	$40{,}000$
$(5,5)$	**$4{,}000\cdot 5+6{,}000\cdot 5=20{,}000+30{,}000$**	**$50{,}000$**
$(0,8)$	$6{,}000\cdot 8$	$48{,}000$

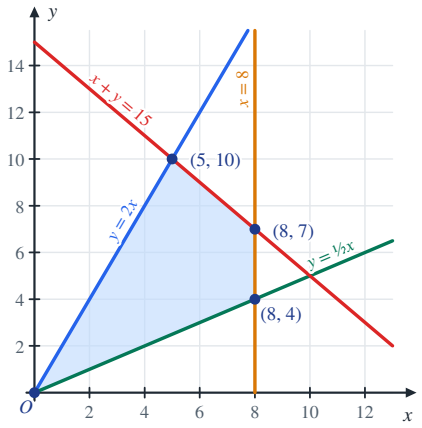
תשובה כדאי לגדל 5 דונם עגבניות ו־5 דונם פלפלים. הרווח המקסימלי הוא 50,000 ש״ח.

ה. $(6,4)$: אדמה: $10=10\le 6+4$. מים: $38=3\cdot 6+5\cdot 4\le 40$. התוכנית אפשרית, והרווח: $6{,}000\cdot 4+4{,}000\cdot 6=48{,}000$ ש״ח.

ו. כן. אדמה: $10=5+5$ דונם, כל האדמה. מים: $300\cdot 5+500\cdot 5=4{,}000$ מ״ק, כל המים. הקודקוד $(5,5)$ הוא נקודת החיתוך של שני הישרים של המשאבים, ולכן בו שני המשאבים מנוצלים עד הסוף.

פתרון תרגיל 8

חזרה לתרגיל (עמ׳ 26)



א. נקודה בתוך התחום, למשל $(5,4)$: $4\ge \frac{1}{2}\cdot 5$, $5\le 2\cdot 5$, $5+4\le 15$, $5\le 8$. לכן:

$$\begin{cases} y\le 2x \\ y\ge \frac{1}{2}x \\ x+y\le 15 \\ x\le 8 \end{cases}$$

(מהאילוצים האלה כבר נובע ש־$x\ge 0$ ו־$y\ge 0$, אבל מותר להוסיף אותם.)

ב. $O(0,0)$: $2x=\frac{1}{2}x \Rightarrow x=0$.

$(8,4)$: $x=8$, $y=\frac{1}{2}\cdot 8=4$.

$(8,7)$: $x=8$, $8+y=15 \Rightarrow y=7$.

$(5,10)$: $y=2x$ ו־$x+2x=15 \Rightarrow x=5,\ y=10$.

© אור בן שטרית · אינסוף

ג, ד. נציב את הקודקודים בשתי הפונקציות יחד:

קודקוד	(0, 0)	(8, 4)	(8, 7)	(5, 10)
$f = x + 2y$	0	16	22	**25**
$g = 3x - y$	0	**20**	17	5

תשובה המקסימום של f הוא 25, ב־(5, 10), והמינימום שלה הוא 0, ב־(0, 0). המקסימום של g הוא 20, ב־(8, 4), והמינימום שלה הוא 0, ב־(0, 0).

ה. הישרים $x = 8$ ו־$x + y = 15$ נפגשים בקודקוד (8, 7). דוגמה: $h(x, y) = 2x + y$. בדיקה: $h(0, 0) = 0$, $h(8, 4) = 20$, $h(8, 7) = 23$, $h(5, 10) = 20$. המקסימום 23 מתקבל רק ב־(8, 7).

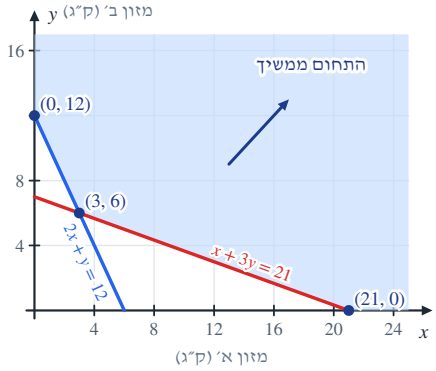
למה זה עובד? בקודקוד (8, 7) נפגשות הצלע האנכית $x = 8$ והצלע $x + y = 15$, שהתלילות שלה $1 : 1 = 1$. כדי שהקודקוד ינצח, קו הרווח צריך להיות תלול יותר מהצלע $x + y = 15$, אבל לא אנכי. כלומר כל $h = ax + by$ עם $a > b > 0$ מתאים, למשל $3x + 2y$ או $5x + y$.

פתרון תרגיל 9

חזרה לתרגיל (עמ׳ 26)

א. חלבון: $2x + y \geq 12$. סיבים: $x + 3y \geq 21$. ועוד: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

ב. הראשית לא מקיימת את האילוצים ($12 \geq 0$ לא נכון), ולכן התחום נמצא מעל שני הישרים. התחום **פתוח**: הוא ממשיך ימינה ולמעלה בלי סוף.



ג. $(0, 12)$: מציבים $x = 0$ ב־$2x + y = 12$. בדיקה: $0 + 36 \geq 21$.
$(21, 0)$: מציבים $y = 0$ ב־$x + 3y = 21$. בדיקה: $42 \geq 12$.
החיתוך: $y = 12 - 2x$. מציבים:
$x + 3(12 - 2x) = 21 \Rightarrow -5x = -15$, ומכאן $x = 3$, $y = 6$.

שימו לב: (0, 7) ו־(6, 0) הן נקודות חיתוך עם הצירים, אבל לא קודקודים: ב־(0, 7) יש רק 7 יחידות חלבון, וב־(6, 0) יש רק 6 יחידות סיבים.

ד. $f(x, y) = 6x + 4y$.

ה.

שיעורים	הצבה בפונקציית המטרה	העלות (ש״ח)
(0, 12)	$6 \cdot 0 + 4 \cdot 12$	48
(3, 6)	$\mathbf{6 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 18 + 24}$	**42**
(21, 0)	$6 \cdot 21$	126

תשובה התערובת הזולה ביותר: 3 ק״ג ממזון א׳ ו־6 ק״ג ממזון ב׳. העלות היומית היא 42 ש״ח.

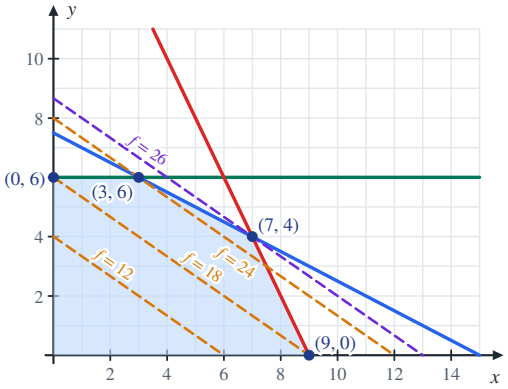
ו. אין עלות מקסימלית. התחום פתוח, ותמיד אפשר לקנות עוד מזון ולשלם יותר. למשל התערובת (100, 100) עולה 1,000 ש״ח.

ז. עכשיו $f(x, y) = 10x + 4y$: $f(0, 12) = 48$, $f(3, 6) = 30 + 24 = 54$, $f(21, 0) = 210$. התערובת הזולה ביותר משתנה: 12 ק״ג ממזון ב׳ בלבד, בעלות של 48 ש״ח.

© אור בן שטרית · אינסוף

פתרון תרגיל 10

חזרה לתרגיל (עמ׳ 26)



א. $O(0,0)$. $(9,0)$: $2x = 18$. בדיקה: $9 \le 15$.

$(7,4)$: $x = 15 - 2y$. מציבים:

$2(15-2y) + y = 18 \Rightarrow -3y = -12$, ומכאן $y = 4$, $x = 7$.

בדיקה: $4 \le 6$.

$(3,6)$: $y = 6$ ו־$x = 3 \Rightarrow x + 12 = 15$. בדיקה:

$6 + 6 = 12 \le 18$.

$(0,6)$.

ב. הישר עובר דרך $(6,0)$ ו־$(0,4)$. בכל נקודה עליו $f = 12$.

ג. $2x + 3y = 18$ עובר דרך $(9,0)$ ו־$(0,6)$, ו־$2x + 3y = 24$ עובר דרך $(12,0)$ ו־$(0,8)$. שלושת הישרים מקבילים: לכולם אותו שיפוע, $-\frac{2}{3}$.

ד. כש־f גדל, הישר זז במקביל ומתרחק מהראשית, למעלה וימינה.

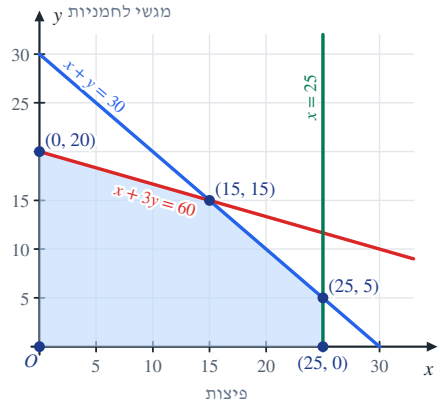
ה. הנקודה האחרונה שהישר נוגע בה היא $(7,4)$. שם $f = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 = 26$. הערך המקסימלי הוא 26.

ו. $f(0,0) = 0$, $f(9,0) = 18$, $f(7,4) = 26$, $f(3,6) = 24$, $f(0,6) = 18$. הערך הגדול ביותר הוא 26, ב־$(7,4)$, כמו בסעיף ה.

ז. $g(0,0) = 0$, $g(9,0) = 9$, $g(7,4) = 15$, $g(3,6) = 15$, $g(0,6) = 12$. הערך המקסימלי 15 מתקבל בשני קודקודים, וגם בכל נקודה על הצלע ביניהם, כי הישר $x + 2y = 15$ הוא בדיוק הגבול של התחום. לכן הוא מתקבל באינסוף נקודות. בנקודות שלמות: על הישר $x + 2y = 15$, בין $x = 3$ לבין $x = 7$, הערך $y = \frac{15-x}{2}$ שלם רק כש־x אי־זוגי: $(3,6)$, $(5,5)$, $(7,4)$. שלוש נקודות.

פתרון תרגיל 11

חזרה לתרגיל (עמ׳ 27)



א. בצק: $x + y \le 30$. תנור: $4x + 12y \le 240$, ואחרי חלוקה ב־4: $x + 3y \le 60$. מכירות: $x \le 25$. ועוד: $x \ge 0$, $y \ge 0$.

ב. $O(0,0)$, $(25,0)$.

$(25,5)$: $x = 25$ ב־$x + y = 30$. בדיקה: $25 + 15 = 40 \le 60$.

$(15,15)$: חיסור:

$(x + 3y) - (x + y) = 60 - 30 \Rightarrow 2y = 30 \Rightarrow y = 15$, $x = 15$.

בדיקה: $15 \le 25$.

$(0,20)$: $3y = 60$. בדיקה: $20 \le 30$.

ג. $(20,12)$: בצק: $20 + 12 = 32 > 30$. אי אפשר, כי אין מספיק בצק.

$(18,12)$: בצק: $30 \le 30$, תנור: $54 \le 60$, מכירות: $18 + 36 = 54 \le 25$. התוכנית אפשרית, והיא משתמשת בכל הבצק.

ד. $f(x,y) = 40x + 60y$:

© אור בן שטרית · אינסוף

שיעורים	הצבה בפונקציית המטרה	הרווח (ש"ח)
(0, 0)	0	0
(25, 0)	40 · 25	1,000
(25, 5)	1,000 + 300	1,300
(15, 15)	**600 + 900**	**1,500**
(0, 20)	60 · 20	1,200

תשובה הרווח המקסימלי הוא 1,500 ש"ח, כשמכינים 15 פיצות ו־15 מגשי לחמניות.

ה. לא. הרווח המקסימלי הוא 1,500 ש"ח, וזה פחות מ־1,600 ש"ח.

ו. $y = 10 \Rightarrow 60y = 600 \Rightarrow 60y + 20 \cdot 40 = 1{,}400$. בדיקה של (20, 10): $30 \le 30$, $60 \le 50 = 30 + 20$, $20 \le 25$. תשובה: 10 מגשי לחמניות.

ז. מחלקים ב־20: $2x + 3y = 70$, כלומר $3y = 70 - 2x$. מציבים באילוצים:
תנור: $x + 3y \le 60 \Rightarrow x + 70 - 2x \le 60 \Rightarrow x \ge 10$.
בצק: $x + y \le 30$, ואחרי כפל ב־3: $3x + 3y \le 90 \Rightarrow 3x + 70 - 2x \le 90 \Rightarrow x \le 20$.
y שלם רק כש־$2x - 70$ מתחלק ב־3. בין 10 ל־20 זה קורה ב־$x = 11, 14, 17, 20$.

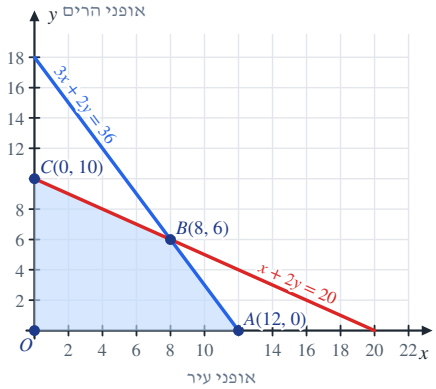
תשובה ארבע תוכניות: (11, 16), (14, 14), (17, 12), (20, 10).

פתרון תרגיל 12

חזרה לתרגיל (עמ' 27)

א. כל עמודה בטבלה היא אילוץ. הרכבה: $3x + 2y \le 36$. צביעה:
$x + 2y \le 20$. ועוד: $x \ge 0$, $y \ge 0$.

ב. $O(0, 0)$.
$A(12, 0)$: $3x = 36$. בדיקה: $12 \le 20$.
$C(0, 10)$: $2y = 20$. בדיקה: $20 \le 36$.
B: חיסור $(3x + 2y) - (x + 2y) = 36 - 20 \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8$.
$B(8, 6)$. $8 + 2y = 20 \Rightarrow y = 6$.



ג. (1) $f(x, y) = 300x + 500y$. (2) הצבה בטבלה:

קודקוד	שיעורים	הצבה בפונקציית המטרה	הרווח (ש"ח)
O	(0, 0)	0	0
A	(12, 0)	300 · 12	3,600
B	**(8, 6)**	**300 · 8 + 500 · 6 = 2,400 + 3,000**	**5,400**
C	(0, 10)	500 · 10	5,000

תשובה כדאי לייצר 8 זוגות של אופני עיר ו־6 זוגות של אופני הרים. הרווח המקסימלי הוא 5,400 ש"ח.

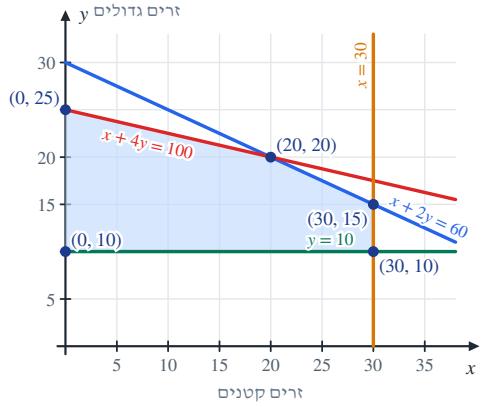
ד. מציבים $x = 0$: הרכבה: $2y \le 36 \Rightarrow y \le 18$. צביעה: $2y \le 20 \Rightarrow y \le 10$. שני האילוצים צריכים להתקיים, ולכן $y \le 10$. אפשר לייצר לכל היותר 10 זוגות, וזה בדיוק הקודקוד C. הרווח: $500 \cdot 10 = 5{,}000$ ש"ח.

ה. $y = 8 \Rightarrow 500y = 4{,}000 \Rightarrow 500y + 300 \cdot 2 = 4{,}600$. בדיקה של (2, 8): $6 + 16 = 22 \le 36$, $2 + 16 = 18 \le 20$. תשובה: יוצרו 8 זוגות של אופני הרים.

© אור בן שטרית · אינסוף

פתרון תרגיל 13

חזרה לתרגיל (עמ׳ 28)



א. פרחים: $5x + 10y \le 300$, ואחרי חלוקה ב־5: $x + 2y \le 60$.
זמן: 10 שעות הן 600 דקות. $6x + 24y \le 600$, ואחרי חלוקה ב־6: $x + 4y \le 100$.
הזמנות: $y \ge 10$. קירור: $x \le 30$. ועוד: $x \ge 0$. (אין צורך ב־$y \ge 0$, כי $y \ge 10$.)

ב. $(0, 10)$ ו־$(30, 10)$: על הישר $y = 10$. בדיקה של $(30, 10)$:
$30 + 20 = 50 \le 60$, $30 + 40 = 70 \le 100$.
$(30, 15)$: $x = 30$ ב־$x + 2y = 60 \Rightarrow y = 15$. בדיקה:
$30 + 60 = 90 \le 100$.
$(20, 20)$: חיסור
$(x + 4y) - (x + 2y) = 100 - 60 \Rightarrow 2y = 40 \Rightarrow y = 20, x = 20$.
$(0, 25)$: $4y = 100$. בדיקה: $50 \le 60$.

ג. $f(x, y) = 30x + 80y$:

שיעורים	הצבה בפונקציית המטרה	הרווח (ש״ח)
$(0, 10)$	$80 \cdot 10$	800
$(30, 10)$	$900 + 800$	1,700
$(30, 15)$	$900 + 1{,}200$	2,100
$(20, 20)$	**$600 + 1{,}600$**	**2,200**
$(0, 25)$	$80 \cdot 25$	2,000

תשובה כדאי להכין 20 זרים קטנים ו־20 זרים גדולים. הרווח המקסימלי הוא 2,200 ש״ח.

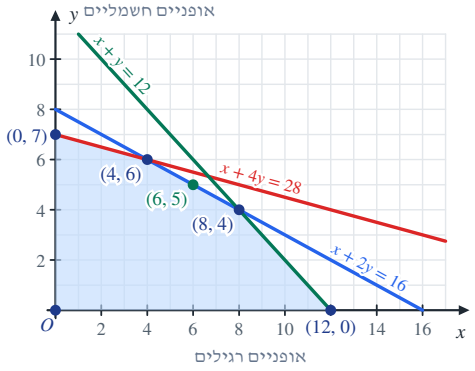
ד. מציבים $y = 22$: פרחים: $x + 44 \le 60 \Rightarrow x \le 16$. זמן: $x + 88 \le 100 \Rightarrow x \le 12$. קירור: $x \le 30$. כל האילוצים צריכים להתקיים, ולכן $x \le 12$. תשובה: לכל היותר 12 זרים קטנים. הרווח:
$30 \cdot 12 + 80 \cdot 22 = 360 + 1{,}760 = 2{,}120$ ש״ח.

ה. בתוכנית $(20, 20)$: פרחים: $5 \cdot 20 + 10 \cdot 20 = 300$, כל הפרחים. זמן: $6 \cdot 20 + 24 \cdot 20 = 600$ דקות, כלומר 10 שעות. אין תוכנית נוספת כזאת: ״כל הפרחים וכל הזמן״ פירושו ששתי המשוואות $x + 2y = 60$ ו־$x + 4y = 100$ מתקיימות יחד, ושני ישרים לא מקבילים נחתכים בנקודה אחת בלבד.

© אור בן שטרית · אינסוף

פתרון תרגיל 14

חזרה לתרגיל (עמ׳ 28)



א. טכנאי: $x + 2y \le 16$.

חלקים: $100x + 400y \le 2{,}800$, ואחרי חלוקה ב־100:

$x + 4y \le 28$.

מקום: $x + y \le 12$. ועוד: $x \ge 0$, $y \ge 0$.

ב. $O(0, 0)$. $(12, 0)$: בדיקה: $16 \le 16$, $12 \le 28$, $12 \le 12$.

$(8, 4)$: $x + y = 12$ ו־$x + 2y = 16 \Rightarrow y = 4, x = 8$. בדיקה:

$8 + 16 = 24 \le 28$.

$(4, 6)$: $x + 2y = 16$ ו־$x + 4y = 28 \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6, x = 4$.

בדיקה: $10 \le 12$.

$(0, 7)$: $4y = 28$. בדיקה: $14 \le 16$.

ג. $f(x, y) = 80x + 160y$:

שיעורים	הצבה בפונקציית המטרה	הרווח (ש״ח)
$(0, 0)$	0	0
$(12, 0)$	$80 \cdot 12$	960
$(8, 4)$	**$640 + 640$**	**1,280**
$(4, 6)$	**$320 + 960$**	**1,280**
$(0, 7)$	$160 \cdot 7$	1,120

תשובה הרווח המקסימלי הוא 1,280 ש״ח. הוא מתקבל בשני קודקודים, $(8, 4)$ ו־$(4, 6)$, וגם בכל נקודה על הצלע שביניהם.

ד. הצלע נמצאת על הישר $x + 2y = 16$, בין $x = 4$ לבין $x = 8$. הערך $y = \frac{16 - x}{2}$ שלם כש־x זוגי: $(4, 6)$, $(6, 5)$, $(8, 4)$. בדיקה של $(6, 5)$: $12 \le 11$, $28 \le 26$, והרווח $1{,}280 = 800 + 480$. תשובה: שלוש תוכניות.

ה. תיקון רגיל מכניס 80 ש״ח בשעת טכנאי אחת, כלומר 80 ש״ח לשעה. תיקון חשמלי מכניס 160 ש״ח בשעתיים, כלומר גם 80 ש״ח לשעה. על הצלע הזאת הטכנאי עובד את כל 16 השעות, וכל שעה שלו מכניסה 80 ש״ח, לא משנה מה הוא מתקן. לכן הרווח תמיד $1{,}280 = 80 \cdot 16$ ש״ח. ובשפה של פונקציות:

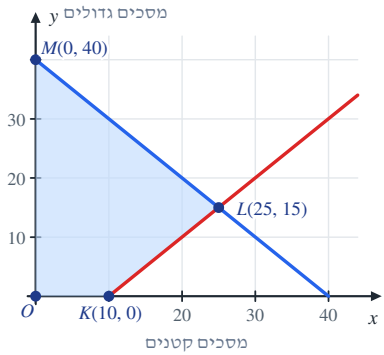
$80x + 160y = 80(x + 2y)$, כלומר פונקציית המטרה היא כפולה של אילוץ הטכנאי.

ו. $f(x, y) = 80x + 170y$: $f(12, 0) = 960$, $f(8, 4) = 640 + 680 = 1{,}320$, $f(4, 6) = 320 + 1{,}020 = 1{,}340$, $f(0, 7) = 1{,}190$. תשובה: עכשיו יש תוכנית אחת טובה ביותר: 4 אופניים רגילים ו־6 חשמליים, עם רווח של 1,340 ש״ח.

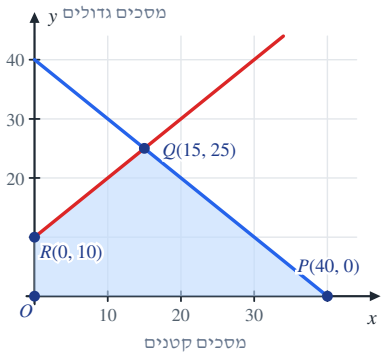
© אור בן שטרית · אינסוף

פתרון תרגיל 15

חזרה לתרגיל (עמ׳ 29)



גרף 1



גרף 2

א. במפעל א׳ הישר $y = x + 10$ חותך את ציר ה־y בנקודה $(0, 10)$, והתחום נמצא מתחתיו. במפעל ב׳ הישר $y = x - 10$ חותך את ציר ה־x בנקודה $(10, 0)$, והתחום נמצא מעליו.
בגרף 1 הישר העולה יוצא מציר ה־x (הנקודה K), והתחום מעליו. לכן **גרף 1 מתאים למפעל ב׳**. בגרף 2 הישר העולה יוצא מציר ה־y (הנקודה R), והתחום מתחתיו. לכן **גרף 2 מתאים למפעל א׳**.
דרך נוספת: הנקודה $(40, 0)$, שבה $x + y = 40$ חותך את ציר ה־x, מקיימת $10 + 40 \le 0$ אבל לא $10 - 40 \ge 0$. היא שייכת רק לתחום של מפעל א׳, וזה הגרף שבו התחום מגיע עד הקצה של ציר ה־x.

ב. $y \le x + 10$: מספר המסכים הגדולים גדול לכל היותר ב־10 ממספר המסכים הקטנים.

ג. מפעל א׳: $O(0, 0)$, $P(40, 0)$, $R(0, 10)$, והקודקוד Q: $x + 10 = 40 - x \Rightarrow x = 15,\ y = 25$, $Q(15, 25)$.
מפעל ב׳: $O(0, 0)$, $K(10, 0)$, $M(0, 40)$, והקודקוד L: $x - 10 = 40 - x \Rightarrow x = 25,\ y = 15$, $L(25, 15)$.

ד. (1) $f(x, y) = 60x + 40y$. (2)

מפעל א׳	O: 0	$P(40, 0)$: **2,400**	$Q(15, 25)$: 1,900	$R(0, 10)$: 400
מפעל ב׳	O: 0	$K(10, 0)$: 600	$L(25, 15)$: **2,100**	$M(0, 40)$: 1,600

תשובה הרווח המקסימלי של מפעל א׳ גבוה יותר: 2,400 ש״ח, כשהוא מייצר 40 מסכים קטנים בלבד.

ה. $2,400 - 2,100 = 300$. הרווח המקסימלי של מפעל א׳ גדול ב־300 ש״ח מזה של מפעל ב׳.

פתרון תרגיל 16

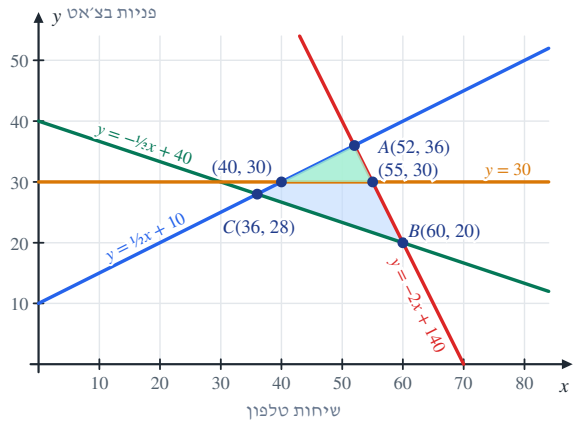
חזרה לתרגיל (עמ׳ 29)

א. התחום נמצא מתחת לשני הישרים העליונים ומעל הישר התחתון. בדיקה עם הנקודה $(30, 50)$ שבתוך התחום: $\frac{1}{2} \cdot 50 + 10 = 35 \ge 30$, $-2 \cdot 50 + 140 = 40 \ge 30$, $-\frac{1}{3} \cdot 50 + 40 = 23\frac{1}{3} \le 30$. לכן:

$$\begin{cases} y \le \frac{1}{2}x + 10 \\ y \le -2x + 140 \\ y \ge -\frac{1}{3}x + 40 \end{cases}$$

ב. A: $\frac{1}{2}x + 10 = -2x + 140 \Rightarrow 2.5x = 130 \Rightarrow x = 52,\ y = 36$.
B: $-2x + 140 = -\frac{1}{3}x + 40$. כופלים ב־3: $-6x + 420 = -x + 120 \Rightarrow 5x = 300 \Rightarrow x = 60,\ y = 20$.
C: $\frac{1}{2}x + 10 = -\frac{1}{3}x + 40$. כופלים ב־6: $3x + 60 = -2x + 240 \Rightarrow 5x = 180 \Rightarrow x = 36,\ y = 28$.

© אור בן שטרית · אינסוף



ג. $f(x,y)=4x+3y$ (בדקות).

ד. $f(A)=208+108=316$, $f(B)=240+60=300$, $f(C)=144+84=228$.

תשובה הזמן הקטן ביותר מתקבל בקודקוד $C(36,28)$: 36 שיחות ו־28 פניות, ב־228 דקות, כלומר 3 שעות ו־48 דקות.

ה. מוסיפים את האילוץ $y\geq 30$. הקודקודים B ו־C יוצאים מהתחום, כי בהם $y<30$. התחום החדש (ירוק בסרטוט) הוא משולש:

עם $y=30$ ב־$y=\frac{1}{2}x+10$: $\frac{1}{2}x=20\Rightarrow x=40$, הנקודה $(40,30)$. בדיקה מול הישר התחתון:

$-\frac{40}{3}+40=26\frac{2}{3}\leq 30$.

עם $y=30$ ב־$y=-2x+140$: $2x=110\Rightarrow x=55$, הנקודה $(55,30)$.

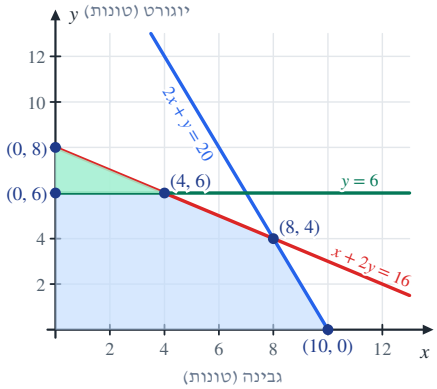
$A(52,36)$, כי $36\geq 30$.

זמנים: $f(40,30)=160+90=250$, $f(55,30)=220+90=310$, $f(A)=316$.

תשובה הזמן הקטן ביותר הוא עכשיו 250 דקות, כלומר 4 שעות ו־10 דקות, עם 40 שיחות ו־30 פניות.

פתרון תרגיל 17

חזרה לתרגיל (עמ' 30)



א. חלב: $4x+2y\leq 40$, ואחרי חלוקה ב־2: $2x+y\leq 20$. אריזה: $x+2y\leq 16$. ועוד: $x\geq 0$, $y\geq 0$.

הקודקודים: $O(0,0)$; $(10,0)$, ובדיקה: $16\leq 10$; $(0,8)$, ובדיקה: $20\leq 8$.

החיתוך: כופלים את אילוץ האריזה ב־2: $2x+4y=32$. מחסרים את אילוץ החלב: $3y=12\Rightarrow y=4$, $x=8$. הקודקוד $(8,4)$.

ב. $f(x,y)=5x+4y$ (באלפי ש"ח): $f(10,0)=50$, $f(8,4)=40+16=56$, $f(0,8)=32$.

תשובה הרווח המקסימלי הוא 56 אלף ש"ח ביום, כשמייצרים 8 טונות גבינה ו־4 טונות יוגורט.

ג. מוסיפים $y\geq 6$. התחום החדש (ירוק בסרטוט) הוא משולש שקודקודיו: $(0,6)$; $(4,6)$, כי $x+12=16$, ובדיקה: $14=6+8\leq 20$; $(0,8)$.

© אור בן שטרית · אינסוף

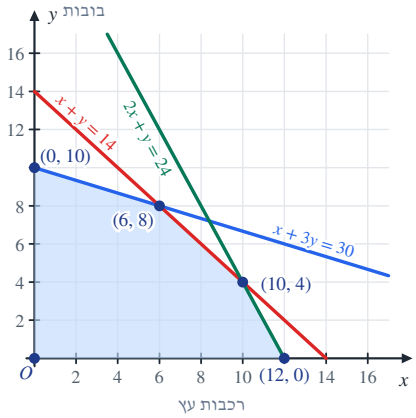
ד. $f(0,6)=24$, $f(4,6)=20+24=44$, $f(0,8)=32$. הרווח המקסימלי עם החוזה הוא 44 אלף ש"ח, ב־4 טונות גבינה ו־6 טונות יוגורט. הוא קטן ב־$12=44-56$ אלף ש"ח ביום.

ה. עם הבונוס: $54=10+44$ אלף ש"ח, פחות מ־56 אלף ש"ח בלי החוזה. תשובה: לא כדאי לחתום, כי המחלבה תפסיד 2 אלף ש"ח ביום. החוזה "עולה" למחלבה 12 אלף ש"ח ביום, ולכן רק בונוס של יותר מ־12 אלף ש"ח ביום יהפוך אותו לכדאי.

פתרון תרגיל 18

חזרה לתרגיל (עמ' 30)

א. כל עמודה בטבלה היא אילוץ. ניסור: $x+3y\le 30$. הרכבה: $x+y\le 14$. צביעה: $2x+y\le 24$. ועוד: $x\ge 0$, $y\ge 0$.



ב. $O(0,0)$.

$(12,0)$: $2x=24$. בדיקה: $12\le 14$, $12\le 30$. (הנקודה $(14,0)$ של אילוץ ההרכבה איננה קודקוד: $28>24$.)

$(10,4)$: חיסור $(2x+y)-(x+y)=24-14\Rightarrow x=10, y=4$.

בדיקה: $10+12=22\le 30$.

$(6,8)$: חיסור

$(x+3y)-(x+y)=30-14\Rightarrow 2y=16\Rightarrow y=8, x=6$. בדיקה:

$12+8=20\le 24$.

$(0,10)$: $3y=30$. בדיקה: $10\le 14$, $10\le 24$.

ג. $f(x,y)=100x+150y$:

שיעורים	הצבה בפונקציית המטרה	הרווח (ש"ח)
(12, 0)	$100\cdot 12$	1,200
(10, 4)	$1{,}000+600$	1,600
(6, 8)	**$600+1{,}200$**	**1,800**
(0, 10)	$150\cdot 10$	1,500

תשובה כדאי לייצר 6 רכבות עץ ו־8 בובות. הרווח המקסימלי הוא 1,800 ש"ח.

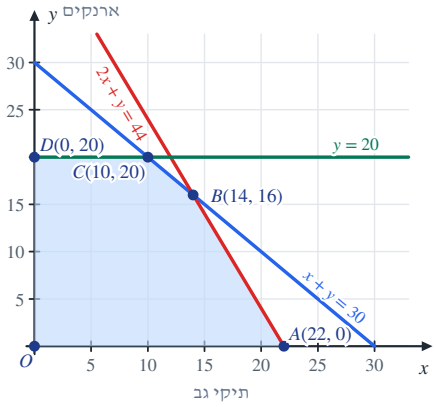
ד. בתוכנית $(6,8)$: ניסור: $30=24+6$ שעות, הכול. הרכבה: $14=8+6$ שעות, הכול. צביעה: $20=8+12$ שעות מתוך 24. תשובה: במחלקת הצביעה נשארות 4 שעות פנויות.

ה. לא כדאי להוסיף שעות למחלקת הצביעה. בתוכנית הטובה ביותר כבר נשארות בה 4 שעות פנויות, ולכן שעות נוספות שם לא מאפשרות לייצר יותר. הניסור וההרכבה הם המשאבים שנגמרים, ורק תוספת שעות שם יכולה להגדיל את הרווח.

© אור בן שטרית · אינסוף

פתרון תרגיל 19

חזרה לתרגיל (עמ׳ 30)



תיקי גב

א. פריטים: $x + y \le 30$. תפירה: $2x + y \le 44$. רוכסנים: $y \le 20$.
ועוד: $x \ge 0$, $y \ge 0$.

ב. $O(0, 0)$.
$A(22, 0)$: $2x = 44$. בדיקה: $22 \le 30$. (הנקודה $(30, 0)$ של אילוץ הפריטים איננה קודקוד: $60 > 44$.)
$B(14, 16)$: חיסור
$x = 14, y = 16 \Rightarrow (2x + y) - (x + y) = 44 - 30$. בדיקה:
$16 \le 20$.
$C(10, 20)$: $y = 20$ ב־$x + y = 30$. בדיקה: $20 + 20 = 40 \le 44$.
$D(0, 20)$.

ג. $f(x, y) = 60x + py$, ולכן: $f(O) = 0$, $f(A) = 1{,}320$,
$f(B) = 840 + 16p$, $f(C) = 600 + 20p$, $f(D) = 20p$.

ד. $840 + 16p = 600 + 20p \Rightarrow 240 = 4p \Rightarrow p = 60$. אז $f(B) = f(C) = 1{,}800$, $f(A) = 1{,}320$, $f(D) = 1{,}200$.

תשובה $p = 60$, והרווח המקסימלי הוא 1,800 ש״ח. הוא מתקבל בכל נקודה על הצלע BC, כי $60x + 60y = 60(x + y)$: כל פריט מכניס 60 ש״ח, ובצלע הזאת מייצרים 30 פריטים.

ה. הערך 2,000 לא יכול להתקבל ב־A, כי $f(A) = 1{,}320$. נבדוק את שלושת המועמדים האחרים:

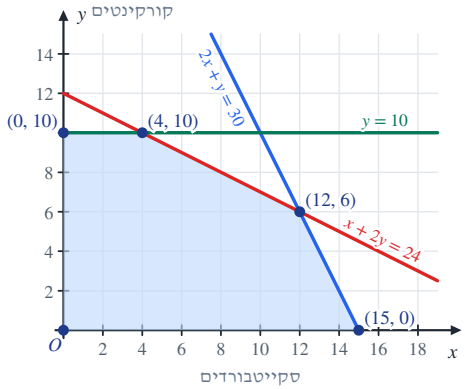
אם המקסימום ב־	משוואה	בדיקה: הערך בקודקוד אחר	המסקנה
B	$840 + 16p = 2{,}000 \Rightarrow p = 72.5$	$f(C) = 600 + 20 \cdot 72.5 = 2{,}050 > 2{,}000$	לא מתאים
C	**$600 + 20p = 2{,}000 \Rightarrow p = 70$**	**$f(B) = 1{,}960$, $f(D) = 1{,}400$, $f(A) = 1{,}320$**	**מתאים**
D	$20p = 2{,}000 \Rightarrow p = 100$	$f(C) = 600 + 2{,}000 = 2{,}600 > 2{,}000$	לא מתאים

תשובה $p = 70$. הרווח המקסימלי 2,000 ש״ח מתקבל כשמייצרים 10 תיקי גב ו־20 ארנקים.

© אור בן שטרית · אינסוף

פתרון תרגיל 20

חזרה לתרגיל (עמ׳ 31)



א. $O(0,0)$.

$(15,0)$: $2x=30$. בדיקה: $15 \le 24$.

$(12,6)$: כופלים את $x+2y=24$ ב־2: $2x+4y=48$. מחסרים את

$2x+y=30$: $3y=18 \Rightarrow y=6,\ x=12$. בדיקה: $6 \le 10$.

$(4,10)$: $y=10$ ו־$x=4$. בדיקה: $x+20=24$.

$8+10=18 \le 30$.

$(0,10)$.

ב. $f(x,y)=40x+50y$: $f(15,0)=600$,

$f(12,6)=480+300=780$, $f(4,10)=160+500=660$,

$f(0,10)=500$.

תשובה הרווח המקסימלי הוא 780 ש״ח, כשמייצרים 12 סקייטבורדים ו־6 קורקינטים.

ג. עם רווח של p מקורקינט, $f(x,y)=40x+py$:

קודקוד	(0, 0)	(15, 0)	(12, 6)	(4, 10)	(0, 10)
f	0	600	$480+6p$	$160+10p$	$10p$

ד. **דרך 1, השוואת הערכים.** $(12,6)$ היא הטובה ביותר כשהערך בה לא קטן מהערכים בשאר הקודקודים:

$480+6p \ge 600 \Rightarrow 6p \ge 120 \Rightarrow p \ge 20$.

$480+6p \ge 160+10p \Rightarrow 320 \ge 4p \Rightarrow p \le 80$.

$480+6p \ge 10p \Rightarrow p \le 120$. זה כבר נובע מ־$p \le 80$.

דרך 2, השוואת תלילות. בקודקוד $(12,6)$ נפגשות צלע ההרכבה (תלילות $2:1=2$) וצלע הצביעה (תלילות $1:2=0.5$). התלילות של פונקציית המטרה היא $p:40$, והיא צריכה להיות בין 0.5 ל־2:

$0.5 \le \frac{40}{p} \le 2 \Rightarrow 20 \le p \le 80$.

תשובה התוכנית $(12,6)$ היא הטובה ביותר כש־$20 \le p \le 80$. כש־$p > 80$ או $p < 20$ היא הטובה ביותר היחידה.

ה. כש־$p=20$: $f(15,0)=600$ וגם $f(12,6)=480+120=600$. שתי התוכניות טובות ביותר, וגם כל נקודה על הצלע ביניהן. כש־$p=80$: $f(12,6)=480+480=960$ וגם $f(4,10)=160+800=960$, וגם כל נקודה על הצלע ביניהן. (כש־$p<20$ הטובה ביותר היא $(15,0)$, וכש־$p>80$ היא $(4,10)$.)

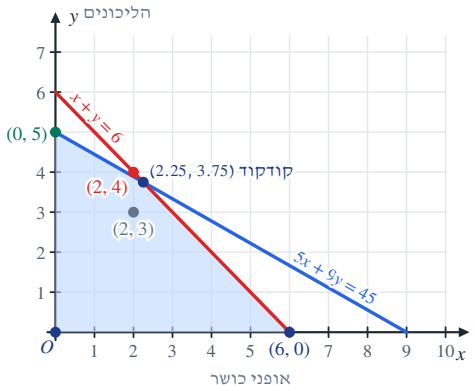
ו. $f(4,10)-f(0,10)=(160+10p)-10p=160>0$, לכל p. לכן $(4,10)$ תמיד טובה יותר מ־$(0,10)$.

במילים: באותו מספר קורקינטים אפשר לייצר עוד 4 סקייטבורדים, וכל סקייטבורד מוסיף 40 ש״ח.

© אור בן שטרית · אינסוף

פתרון תרגיל 21

חזרה לתרגיל (עמ' 31)



א. תקציב (באלפי ש"ח): $5x + 9y \le 45$. מקום: $x + y \le 6$. ועוד: $x \ge 0$, $y \ge 0$. פונקציית המטרה (שעות אימון ביום): $f(x, y) = 5x + 8y$.

ב. $O(0, 0)$. $(6, 0)$: בדיקה: $30 \le 45$. $(0, 5)$: בדיקה: $5 \le 6$. החיתוך: $x = 6 - y$. מציבים:

$$5(6 - y) + 9y = 45 \Rightarrow 30 + 4y = 45,$$

ומכאן $y = 3.75$, $x = 2.25$.

ג. $f(6, 0) = 30$, $f(2.25, 3.75) = 11.25 + 30 = 41.25$, $f(0, 5) = 40$. הערך הגדול ביותר מתקבל בקודקוד $(2.25, 3.75)$. אבל אי אפשר לקנות רבע של אופני כושר, ולכן אי אפשר לבצע את התוכנית.

ד. העיגול הקרוב ביותר הוא $(2, 4)$. תקציב:

$$5 \cdot 2 + 9 \cdot 4 = 10 + 36 = 46 > 45.$$

ההצעה של רון חורגת מהתקציב, ואי אפשר לבצע אותה.

ה. $(2, 3)$: תקציב: $10 + 27 = 37 \le 45$, מקום: $5 \le 6$. ההצעה אפשרית, והיא נותנת $5 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 34$ שעות אימון ביום.

ו. לכל x שלם מוצאים את ה־y השלם הגדול ביותר שמקיים $y \le 6 - x$ וגם $y \le \frac{45 - 5x}{9}$:

x	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{45 - 5x}{9}$	5	4.44	3.89	3.33	2.78	2.22	1.67
y הגדול ביותר	5	4	3	3	2	1	0
$f = 5x + 8y$	**40**	37	34	39	36	33	30

תשובה התוכנית הטובה ביותר בשלמים: 5 הליכונים בלי אופני כושר, עם 40 שעות אימון ביום.

ז. ליד הקודקוד, כל נקודה שלמה "מבזבזת" חלק מהמשאבים. למשל $(2, 3)$ משתמשת רק ב־37 אלף ש"ח מתוך 45, ובחמישה מקומות מתוך שישה. התוכנית $(0, 5)$ מנצלת את כל התקציב בדיוק: $9 \cdot 5 = 45$. כשעובדים במספרים שלמים, בזבוז של משאב עולה ביוקר, ולכן התוכנית הטובה ביותר יכולה להיות במקום שבו משאב מנוצל עד הסוף, גם אם הוא רחוק מהקודקוד.

פתרון תרגיל 22

חזרה לתרגיל (עמ' 31)

א. הישר AB עובר דרך $(12, 0)$ ו־$(10, 6)$. השיפוע הוא $\frac{6 - 0}{10 - 12} = -3$, ולכן $y = -3(x - 12) = -3x + 36$, כלומר $3x + y = 36$.

הישר BC עובר דרך $(10, 6)$ ו־$(0, 8)$. השיפוע הוא $\frac{8 - 6}{0 - 10} = -0.2$, ולכן $y = -0.2x + 8$. כופלים ב־5:

$$x + 5y = 40.$$

הראשית בתוך התחום, ולכן: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $3x + y \le 36$, $x + 5y \le 40$.

ב. $f(A) = 12a + 0 \cdot b = 600 \Rightarrow a = 50$ $\quad f(C) = 0 \cdot a + 8b = 560 \Rightarrow b = 70$.

© אור בן שטרית · אינסוף

ג. $f(x,y)=50x+70y$: $f(O)=0$, $f(A)=600$, $f(B)=500+420=920$, $f(C)=560$. תשובה: הערך המקסימלי הוא 920, בקודקוד B.

ד. עם $b=70$: $f(A)=12a$, $f(B)=10a+420$, $f(C)=560$. A היא נקודת מקסימום כש־$12a\geq 10a+420$, כלומר $a\geq 210$, וגם $12a\geq 560$, כלומר $a\geq 46\frac{2}{3}$. שני התנאים יחד: $a\geq 210$.

בדיקה בשיטת התלילות: הצלע AB היא $3x+y=36$, והתלילות שלה $3:1=3$. כדי ש־A תנצח, קו הרווח צריך להיות תלול לפחות כמוה: $a\geq 210 \Rightarrow \frac{a}{70}\geq 3$.

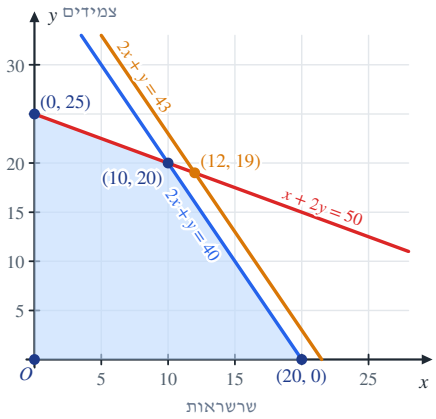
תשובה הערך הקטן ביותר הוא $a=210$. אז $f(A)=f(B)=2{,}520$.

ה. כדי שהמקסימום יתקבל לאורך כל הצלע BC, פונקציית המטרה צריכה להיות מקבילה לישר $x+5y=40$, כלומר $f=k(x+5y)$ עם $k>0$. על הצלע $f=40k$, ולכן $40k=400$ ו־$k=10$:
$f(x,y)=10x+50y$. בדיקה: $f(O)=0$, $f(A)=120$, $f(B)=100+300=400$, $f(C)=400$.

תשובה $a=10$, $b=50$.

פתרון תרגיל 23

חזרה לתרגיל (עמ׳ 32)



א. הלחמה: $2x+y\leq 40$. ליטוש: $x+2y\leq 50$. ועוד: $x\geq 0$, $y\geq 0$.
הקודקודים: $O(0,0)$; $(20,0)$; $(0,25)$; והחיתוך: כופלים את אילוץ ההלחמה ב־2: $4x+2y=80$. מחסרים את אילוץ הליטוש: $3x=30 \Rightarrow x=10$, $y=20$.
$f(x,y)=50x+40y$:
$f(20,0)=1{,}000$, $f(0,25)=1{,}000$, $f(10,20)=500+800=1{,}300$. הרווח המקסימלי: 1,300 ש״ח, עם 10 שרשראות ו־20 צמידים.

ב. עכשיו $2x+y\leq 43$. הקודקודים החדשים: $(21.5,0)$, $(0,25)$, והחיתוך: $4x+2y=86$ פחות $x+2y=50$ נותן $3x=36$, $x=12$, $y=19$. הרווחים: $f(21.5,0)=1{,}075$, $f(0,25)=1{,}000$, $f(12,19)=600+760=1{,}360$. (חצי שרשרת אי אפשר לייצר, אבל זה לא חשוב: התוכנית הטובה ביותר היא $(12,19)$.) הרווח גדל ב־60 ש״ח, וההשכרה עולה $3\cdot 15=45$ ש״ח.

תשובה כדאי לשכור: הרווח נטו גדל ב־15 ש״ח בשבוע.

ג. עכשיו $x+2y\leq 53$. החיתוך: $4x+2y=80$ פחות $x+2y=53$ נותן $3x=27$, $x=9$, $y=22$.
$f(9,22)=450+880=1{,}330$. בשאר הקודקודים: $f(20,0)=1{,}000$, $f(0,26.5)=1{,}060$. הרווח גדל רק ב־30 ש״ח, וההצעה עולה 45 ש״ח.

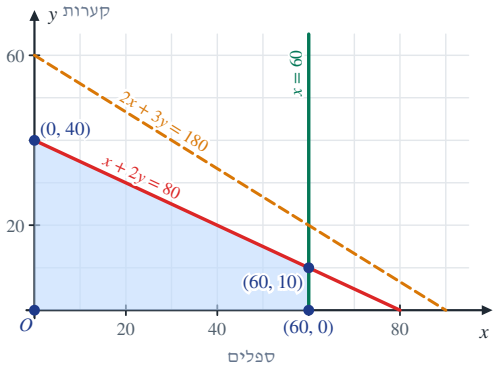
תשובה לא כדאי: הסדנה תפסיד 15 ש״ח בשבוע.

ד. שעת הלחמה נוספת מגדילה את הרווח המקסימלי ב־$\frac{60}{3}=20$ ש״ח, ושעת ליטוש נוספת ב־$\frac{30}{3}=10$ ש״ח. לכן כדאי לשלם על שעת הלחמה לכל היותר 20 ש״ח. (זה נכון לתוספת קטנה של שעות, כל עוד התוכנית הטובה ביותר נשארת בנקודת החיתוך של שני הישרים.)

© אור בן שטרית · אינסוף

פתרון תרגיל 24

חזרה לתרגיל (עמ׳ 32)



א. חימר: $0.5x + y \le 40$, ואחרי כפל ב־2: $x + 2y \le 80$.
זיגוג: 15 שעות הן 900 דקות. $10x + 15y \le 900$, ואחרי חלוקה ב־5: $2x + 3y \le 180$.
מכירות: $x \le 60$. ועוד: $x \ge 0$, $y \ge 0$.

ב. אילוצי החימר והמכירות יוצרים מצולע שקודקודיו $O(0, 0)$, $(60, 0)$, $(60, 10)$ ו־$(0, 40)$. מציבים $x = 60$ ב־$x + 2y = 80$: $(60, 10)$.
מציבים את ארבעת הקודקודים באילוץ הזיגוג $2x + 3y$: 0, 120, $120 + 30 = 150$. כולם קטנים מ־180.

הביטוי $2x + 3y$ לינארי, ולכן הערך הגדול ביותר שלו במצולע מתקבל באחד הקודקודים. מכאן שבכל נקודה של המצולע $2x + 3y \le 150 < 180$. כלומר **אילוץ הזיגוג מתקיים תמיד, והוא לא משפיע על התחום**. בסרטוט רואים שהישר $2x + 3y = 180$, שעובר דרך $(90, 0)$ ו־$(0, 60)$, נמצא כולו מחוץ לתחום.

ג. $f(x, y) = 40x + 60y$: $f(60, 0) = 2{,}400$, $f(60, 10) = 2{,}400 + 600 = 3{,}000$, $f(0, 40) = 2{,}400$.

תשובה הרווח המקסימלי הוא 3,000 ש״ח, עם 60 ספלים ו־10 קערות.

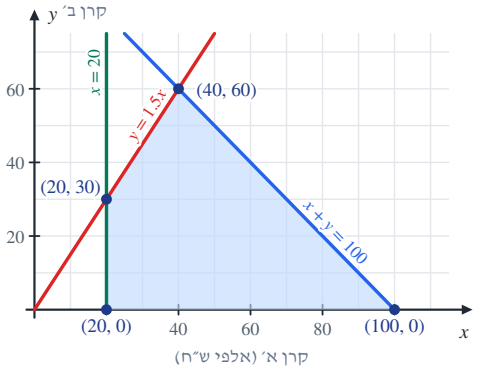
ד. דקות זיגוג, $10x + 15y$, בקודקודים: O: 0, $(60, 0)$: 600, $(60, 10)$: $600 + 150 = 750$, $(0, 40)$: 600. הזמן הארוך ביותר הוא 750 דקות, כלומר 12.5 שעות. לכן בכל תוכנית אפשרית עמדת הזיגוג עובדת לכל היותר 12.5 שעות, ולפחות 2.5 שעות מתוך ה־15 נשארות פנויות.

ה. התוכנית הטובה ביותר, $(60, 10)$, צריכה בדיוק 750 דקות זיגוג. אם עמדת הזיגוג תעבוד 12.5 שעות, התוכנית הזאת עדיין אפשרית, והרווח המקסימלי נשאר 3,000 ש״ח. אם תעבוד פחות, התוכנית $(60, 10)$ כבר לא אפשרית. זו התוכנית היחידה שמכניסה 3,000 ש״ח, ולכן הרווח המקסימלי יקטן.

תשובה אפשר לצמצם את עמדת הזיגוג ל־12.5 שעות בשבוע.

פתרון תרגיל 25

חזרה לתרגיל (עמ׳ 32)



א. סך הכול: $x + y \le 100$. קרן א׳: $x \ge 20$. קרן ב׳: $y \le 1.5x$.
ועוד: $y \ge 0$. פונקציית המטרה (רווח שנתי באלפי ש״ח):
$f(x, y) = 0.04x + 0.07y$.

ב. $(20, 0)$ ו־$(100, 0)$ על ציר ה־x.
$(40, 60)$: $y = 1.5x$ ו־$x + 1.5x = 100 \Rightarrow x = 40$, $y = 60$.
$(20, 30)$: $x = 20$ ו־$y = 1.5 \cdot 20 = 30$.

ג.

שיעורים	הצבה בפונקציית המטרה	רווח (אלפי ש״ח)
(20, 0)	$0.04 \cdot 20$	0.8
(100, 0)	$0.04 \cdot 100$	4
(40, 60)	$\mathbf{0.04 \cdot 40 + 0.07 \cdot 60 = 1.6 + 4.2}$	**5.8**
(20, 30)	$0.8 + 2.1$	2.9

© אור בן שטרית · אינסוף

תשובה כדאי להשקיע 40 אלף ש״ח בקרן א׳ ו־60 אלף ש״ח בקרן ב׳. הרווח השנתי המקסימלי הוא 5,800 ש״ח.

ד. כן: $40 + 60 = 100$, כל הכסף. זה לא מפתיע. כל שקל שמושקע מכניס רווח חיובי, ולכן לא כדאי להשאיר כסף בצד. מכל תוכנית שבה $x + y < 100$ אפשר להוסיף כסף לקרן א׳: האילוץ $y \le 1.5x$ ממשיך להתקיים, והרווח גדל. לכן התוכנית הטובה ביותר נמצאת על הישר $x + y = 100$.

ה. עם תשואה של r אחוזים: $f(100, 0) = 4$ ו־$f(40, 60) = 1.6 + 0.6r$. ההשקעה בקרן ב׳ משתלמת כש־$1.6 + 0.6r > 4$, כלומר $r > 4$. (הקודקוד $(20, 30)$ אף פעם לא הטוב ביותר, כי $f(40, 60) - f(20, 30) = 0.8 + 0.3r > 0$.)

תשובה כש־$r < 4$ כדאי להשקיע הכול בקרן א׳. כש־$r = 4$ כל החלוקות על הצלע בין $(40, 60)$ ל־$(100, 0)$ נותנות אותו רווח, ולכן אין סיבה לקחת סיכון.

במילים: אם הקרן המסוכנת לא מכניסה יותר מהסולידית, אין טעם להשקיע בה.

ו. לכל סכום y בקרן ב׳, הרווח הכי גדול כשמשקיעים את כל השאר בקרן א׳: $x = 100 - y$. אז הרווח הוא $0.04(100 - y) + 0.07y = 4 + 0.03y$. דורשים $0.03y \ge 1.2 \Rightarrow y \ge 40$. בודקים את $(60, 40)$: $60 \ge 20$, $90 = 60 \cdot 1.5 \le 40$, $100 = 60 + 40$. הרווח: $2.4 + 2.8 = 5.2$, כלומר 5,200 ש״ח.

תשובה הסכום הקטן ביותר בקרן ב׳ הוא 40 אלף ש״ח, ו־60 אלף ש״ח, השאר, מושקעים בקרן א׳.

© אור בן שטרית · אינסוף

פינת המורה

מהלך שיעורים, טעויות נפוצות, פעילויות ושאלות לדיון

1.מ איפה הנושא בתוכנית

תכנון לינארי נלמד ב־3 יח״ל בכיתה י״ב, באשכול הפיננסי־כלכלי, והוא נבחן בשאלון 35372. בתוכנית הלימודים מוקצות ליחידה 25 שעות. באותו אשכול לומדים גם גאומטרייה אנליטית של הקו הישר, ושני הנושאים מחזקים זה את זה: משוואת ישר, שיפוע, ישר דרך שתי נקודות ונקודת חיתוך הם בדיוק הכלים שצריך כדי לסרטט תחום ולמצוא קודקודים. בחומרי ההדרכה הארציים לתוכנית החדשה הדגש הוא על בניית מערכת אילוצים מסיפור, סרטוט התחום, מציאת קודקודים ומציאת הערך המקסימלי או המינימלי בהצבת הקודקודים. קווי גובה אינם חלק מהתוכנית, ולכן הם מופיעים בקובץ כהסבר וככלי לבדיקה (פרק 4).

תוכנית הלימודים מגדירה שלוש קבוצות דוגמאות, והקובץ מכסה את כולן: תחום סגור (1.1, פרקים 3 עד 5), תחום פתוח (1.2, סעיף 6.2 ותרגיל 9) ופרמטר בפונקציית המטרה (1.3, סעיף 6.7 ותרגיל 19).

2.מ מהלך שיעורים מוצע

שיעור	נושא ופעילות	פרק	תרגילים
1	הבעיה והניחוש: ״מכרז תוכניות״ בזוגות, ונקודות ירוקות ואדומות על הלוח	1	--
2	ישרים, חיתוכים עם הצירים וחצאי מישור, עם נקודת בדיקה	2	1, 2
3	נקודת חיתוך של שני ישרים, וישר דרך שתי נקודות	2	3
4	מערכת אילוצים, תחום אפשרי וקודקודים, ומסרטוט לאילוצים	3	4, 5
5	פונקציית המטרה ושיטת הקודקודים, עם טבלה ותשובה במילים	4	5, 7
6	קווי רווח שווה בדסמוס: למה המקסימום בקודקוד	4	8, 10
7	מסיפור לאילוצים: מילון, טבלה ובדיקה במספרים	5	6, 12
8	מינימום ותחום פתוח	6	9, 16
9	הרבה פתרונות, מספרים שלמים, ״האם אפשר?״ ואילוץ חדש	6	11, 14, 17
10	פרמטר בפונקציית המטרה: ערך שווה בשני קודקודים, ומקסימום נתון	6	19
11	שאלות בגרות מלאות לפי המתכון	7	13, 15, 18
העשרה	עבודה בקבוצות או פרויקט לתלמידים חזקים	4, 6	20 עד 25

אם כל שורה בטבלה נלמדת בכשעתיים, המהלך תופס כ־22 שעות מתוך 25 השעות שבתוכנית, ונשארות כ־3 שעות לחזרה ולבוחן.

3.מ טעויות נפוצות, ומה עושים איתן

הטעות	מאיפה היא באה	מה עוזר
צביעה של הצד הלא נכון של הישר	הכלל ״$\dots \geq y$ זה מעל״ מופעל בלי לבודד את y, או אחרי כפל במספר שלילי	נקודת בדיקה כשיטה הראשית, ו״מעל ומתחת״ רק כקיצור דרך
שכחה של $x \geq 0$, $y \geq 0$	האילוצים לא כתובים בסיפור במפורש	לשאול: ״אפשר לייצר מינוס 3 שולחנות?״
״פי 2״ בכיוון הלא נכון	תרגום מילה במילה של המשפט	בדיקה עם מספר בכל אילוץ של יחס
שעות ודקות באותו אילוץ	הנתונים בסיפור ביחידות שונות	טבלה עם יחידות בכל שורה

© אור בן שטרית · אינסוף

הטעות	מאיפה היא באה	מה עוזר
הצבה של כל נקודות החיתוך	לא מזהים אילו ישרים נפגשים על גבול התחום	בדיקת כל "קודקוד" בכל האילוצים, או זיהוי בסרטוט
$(0,\,0)$ בבעיית מינימום	הרגל מבעיות מקסימום, שבהן הראשית בתחום	לשאול מה המשמעות של התוכנית $(0,\,0)$ בסיפור
קריאת שיעורי נקודות מסרטוט לא מדויק	קיצור דרך שנראה "בטוח"	חישוב אלגברי של כל קודקוד
עצירה אחרי קודקוד "שנראה טוב"	אינטואיציה שלא נבדקה	טבלה מלאה של כל הקודקודים
עיגול של קודקוד לא שלם	עיגול מרגיש טבעי	בדיקת שייכות, ומעבר מסודר על הנקודות השלמות (תרגיל 21)
עצירה אחרי משוואה של פרמטר	"פתרנו, אז סיימנו"	הצבת הפרמטר בכל הקודקודים (סעיף 6.7)
תשובה בלי מילים ובלי יחידות	"המספר הוא התשובה"	תיבת "כך כותבים בבחינה" בפרק 4

4.מ פעילויות שעובדות בכיתה

- **מכרז תוכניות (פתיחה).** כל זוג מציע תוכנית עבודה לסטודיו מפרק 1. בודקים יחד אם היא אפשרית ומחשבים רווח, ומסמנים נקודה ירוקה או אדומה על הלוח. התחום "מצטייר" מעצמו.
- **דסמוס: הסליידר של הרווח.** כותבים $20x + 50y = k$ עם סליידר ל־k, ומבקשים למצוא את ה־k הגדול ביותר שבו הקו עדיין נוגע בתחום. בגרסה מתקדמת שמים סליידר גם על הרווח ממוצר אחד, ורואים איך הקודקוד הטוב ביותר "קופץ" (תרגיל 20).
- **הפכו את הסיפור.** נותנים מערכת אילוצים בלי סיפור, והתלמידים כותבים סיפור שמתאים לה. אחר כך הם מחליפים סיפורים, ובודקים אם האילוצים חוזרים.
- **מצאו את הטעות.** מציגים פתרון מלא עם טעות אחת מתוכננת: "פי 2" הפוך, נקודת חיתוך שאינה קודקוד, או $(0,\,0)$ בבעיית מינימום. התלמידים צריכים למצוא את הטעות ולהסביר מה היא שינתה בתשובה.
- **כרטיס יציאה (5 דקות).** שלוש שאלות קצרות: לאיזה צד צובעים את $2x - y \le 4$? מה נקודת החיתוך של $x + y = 10$ ו־$x + 3y = 18$? מה הרווח המקסימלי, אם בקודקודים הערכים הם 300, 450 ו־420?

  תשובות לכרטיס היציאה: הצד של הראשית, כי $0 \le 4$ (ואחרי בידוד: $y \ge 2x - 4$, כלומר מעל הישר); $(6,\,4)$; 450.

5.מ שאלות לדיון שמעמיקות את ההבנה

- למה הערך הגדול ביותר נמצא תמיד בקודקוד? (ההוכחה בתיבת המורה בפרק 4)
- מתי אין ערך מקסימלי? ומה זה אומר במציאות? (תחום פתוח, פרק 6)
- למה רווח של 905 ש"ח בסטודיו בלתי אפשרי, אף שהוא קטן מהמקסימום? (כל רווח מתחלק ב־10)
- מה אומר קודקוד במילים של הסיפור? (אילו משאבים מנוצלים עד הסוף)
- כמה שווה שעה נוספת של מכונה? (תרגיל 23). זו נגיעה במושג הכלכלי "מחיר צל", שמנהלים ומהנדסים משתמשים בו.

למורה **על הבחינה**

שאלות תכנון לינארי בשאלון בנויות בדרך כלל מסיפור או טבלה, מערכת אילוצים, סרטוט, קודקודים ופונקציית מטרה, ובסוף שאלה על מקרה מסוים: "במחזור מסוים ייצרו רק..." או "הרווח היה ... והמפעל ייצר...". שאלות השלב השלישי בקובץ (12 עד 19) בנויות במבנה הזה, ואפשר להשתמש בהן כמבחן תרגול. תרגילי השלב הרביעי מתאימים לתלמידים שרוצים אתגר, ולמורים שרוצים להראות את הרעיונות הכלכליים שמאחורי הנושא.

מקורות לתוכנית: תוכנית הלימודים "אשכול פיננסי וכלכלי: תכנון ליניארי"; המלצות ההוראה של הפיקוח על הוראת המתמטיקה ל־3 יח"ל, תשפ"ז; וחוברת ההדרכה בתכנון לינארי לכיתה י"ב (תוכנית הלימודים החדשה) של ההדרכה הארצית במתמטיקה.

© אור בן שטרית · אינסוף

דף סיכום
כל הנושא בעמוד אחד

ארבעת המרכיבים

משתנים: מה מחליטים (x, y), עם "מספר ה..." ויחידות.

אילוצים: אי־שוויונות לינאריים, וגם $x \geq 0$, $y \geq 0$.

תחום אפשרי: כל הנקודות שמקיימות את כל האילוצים.

פונקציית מטרה: $f(x, y) = ax + by$, רווח למקסימום, או עלות וזמן למינימום.

ארגז הכלים

ישר מהר: חיתוכים עם הצירים ($x = 0$, ואחר כך $y = 0$). **ישר דרך הראשית:** נקודה נוספת.

איזה צד: נקודת בדיקה, בדרך כלל $(0, 0)$. משפט נכון: הצד של הנקודה.

קיצור: ... $\geq y$ מעל, ... $\leq y$ מתחת. כפל במספר שלילי הופך סימן.

קודקוד: שני ישרים נפגשים. פותרים בהשוואה, בהצבה או בחיסור, ובודקים בכל האילוצים.

העובדה המרכזית

בתחום סגור, הערך המקסימלי והערך המינימלי של פונקציית המטרה מתקבלים **בקודקודים**.

שלוש שיטות

1. הצבת הקודקודים לבחינה טבלה של כל הקודקודים, ובוחרים את הגדול (או הקטן).

2. קווי רווח שווה להבנה ולבדיקה מזיזים ישר $ax + by = k$ במקביל. הנקודה האחרונה שהוא נוגע בה היא המקסימום.

3. השוואת תלילות העשרה התלילות $a : b$ של פונקציית המטרה נמצאת בין התלילויות של שתי צלעות: הקודקוד שבו הן נפגשות מנצח.

מילון

לכל היותר, לא יותר מ..., עד: $\leq$. **לפחות, לא פחות מ...:** $\geq$.

"x גדול לפחות פי 2 מ־y": $x \geq 2y$ (בודקים עם מספר!).

"x גדול לפחות ב־5 מ־y": $x \geq y + 5$.

טבלת בגרות: כל עמודה של מכונה היא אילוץ אחד. **יחידות אחידות!**

מקרים מיוחדים

מינימום: אותה שיטה, בוחרים את הקטן. הראשית בדרך כלל לא בתחום.

תחום פתוח: יכול להיות מינימום בלי מקסימום.

שני קודקודים שווים: כל הצלע ביניהם טובה ביותר. פונקציית המטרה מקבילה לצלע.

מספרים שלמים: לא מעגלים בעיניים. לכל x שלם מוצאים את y הגדול ביותר.

"האם אפשר להרוויח X?" משווים למקסימום. אם כן, מראים תוכנית.

אילוץ חדש: התחום מצטמצם, והמקסימום לא יכול לגדול.

פרמטר: מציבים את הקודקודים, כותבים משוואה לפי הנתון, ובודקים בכל הקודקודים.

המתכון לבגרות

1. משתנים **2.** טבלה **3.** אילוצים **4.** סרטוט **5.** קודקודים (חישוב ובדיקה) **6.** פונקציית מטרה **7.** טבלת ערכים **8.** תשובה במילים, עם יחידות.

© אור בן שטרית · אינסוף