אינסוף
מתמטיקה

אשכול חברה ומדע · מתמטיקה 3 יחידות לימוד · שאלון 35372

מודל ריבועי: הפרבולה בהקשר

מדריך למורה ולתלמיד: הסברים, נימוקים, אינטואיציה, טיפים, 10 תרגילי דוגמה עם פתרון מלא ותרגול עם תשובות

זריקת כדור, גשר קשת, רכבת הרים והכנסה של עסק: כולם מתוארים באותה פונקציה $y = ax^2 + bx + c$. **תלמיד** ילמד כאן לקרוא את הסיפור מתוך הפרבולה ולהפך. **מורה** ימצא מסגרות «למורה», מפה של הנושא בבחינות 2024–2026 ורצף הוראה. בסוף הקובץ תרגול מודרך, פתרונות עם טעות, תרגול עצמאי ומעורב, תשובות ורמזים.

תוכן העניינים

1. איך השאלה נראית בבגרות **2**

2. הפרבולה ומה אומר כל מקדם **2**

3. הקודקוד: איפה ולמה **4**

4. פתרון משוואה ריבועית **5**

5. מגמה, חיוביות ושליליות **6**

6. מהסיפור למתמטיקה **6**

7. טיפים וטריקים **7**

8. טעויות נפוצות **8**

9. למורה: רצף הוראה מוצע **8**

10. עשרה תרגילי דוגמה עם פתרון מלא **9**

תרגיל 1: קריאה מלאה של פרבולה 9

תרגיל 2: זריקה לסל 11

תרגיל 3: גשר קשת ומעבר של סירה 12

תרגיל 4: נקודת מינימום: מספר מנויים 14

תרגיל 5: גשר טיפוס ועמודי תמיכה 15

תרגיל 6: מגלשת מים: מקדמים עשרוניים 17

תרגיל 7: הכנסה של דוכן: בניית הפונקציה 19

תרגיל 8: גדר לגינה: שטח מקסימלי 20

תרגיל 9: התאמת גרף לנוסחה ומציאת מקדם 22

תרגיל 10: שני טילי מים: שאלה מסכמת ברמת בגרות 23

11. תרגול נוסף **25**

12. תשובות ורמזים **29**

13. דף סיכום **30**

© אור בן שטרית · אינסוף

1. איך השאלה נראית בבגרות

בשאלון 35372 מופיעה שאלה אחת במודל ריבועי, בפרק השני. נתונה פונקציה ריבועית שמתארת סיפור, בדרך כלל גם סרטוט, והסעיפים מתקדמים כמעט תמיד באותו סדר:

1. **ערך התחלתי:** מציבים $x = 0$ ומקבלים את c (גובה הזריקה, נקודת ההתחלה, הכמות בתחילת התקופה).
2. **קודקוד:** $x = -b \div 2a$, ואז הצבה לקבלת y (הגובה המקסימלי, הכמות הקטנה ביותר).
3. **מגמה:** תחום העלייה או תחום הירידה.
4. **הצבה:** x נתון, ומחפשים y.
5. **משוואה:** y נתון, ומחפשים x בנוסחת השורשים. בוחרים פתרון לפי הסיפור.

מועד	שאלה	הסיפור	קודקוד	מה נשאל
קיץ 2024 א	4	כמות מוצרים במפעל לפי הזמן	מינימום	נקודת התחלה, הצבה, הכמות הקטנה ביותר, y נתון עם שתי אפשרויות
קיץ 2024 ב	4	מסלול טיפוס בפארק	מקסימום	גובה עמוד תמיכה, אורך בין נקודות החיתוך עם ציר ה־x, מקסימום, מגמת ירידה, עמוד נוסף באותו גובה
קיץ 2025 א	4	זריקה לסל	מקסימום	גובה הזריקה, מקסימום, מגמת עלייה, y נתון ובחירת פתרון
קיץ 2025 ב	4	גשר מעל נהר	מקסימום	נקודות חיתוך עם ציר ה־x, מקסימום, מגמת ירידה, y נתון ובחירת פתרון
קיץ 2026 א	4	מסירה בכדור	מקסימום	מקסימום, מגמת עלייה, הצבה, פגיעה בקרקע
קיץ 2026 ב	4	רכבת הרים	מקסימום	נקודת התחלה, מקסימום, מגמת עלייה, הצבה, y נתון עם שתי נקודות

מה לומדים מהטבלה

הקודקוד נדרש בכל ששת המועדים, ומגמה בחמישה מהם. נוסחת השורשים מופיעה כמעט תמיד בסעיף האחרון, ובו גם הבחירה בין שני פתרונות. שאלה שהיא «רק» חמש הצבות מזכה בנקודות מלאות, בתנאי שמקפידים על הסימנים ועל ההקשר.

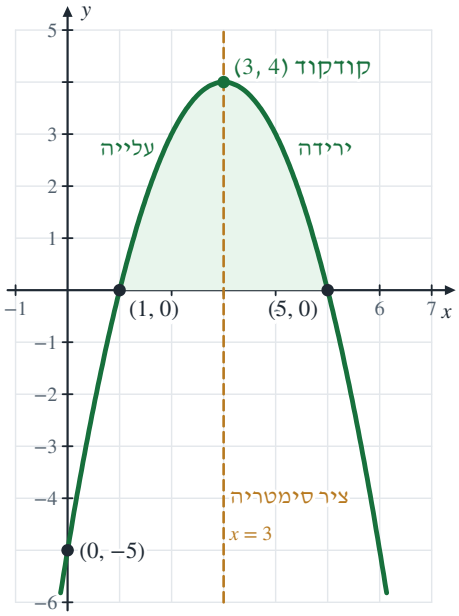
מה יש בדף הנוסחאות

בדף הנוסחאות מופיעות נוסחת השורשים של משוואה ריבועית ונוסחת שיעור ה־x של הקודקוד. שיעור ה־y של הקודקוד אינו מופיע: מקבלים אותו בהצבת x בפונקציה.

2. הפרבולה ומה אומר כל מקדם

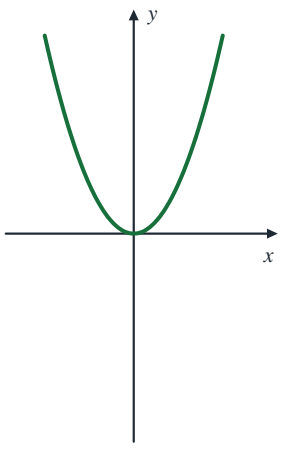
פונקציה ריבועית היא $y = ax^2 + bx + c$ עם $a \neq 0$, והגרף שלה הוא פרבולה.

© אור בן שטרית · אינסוף

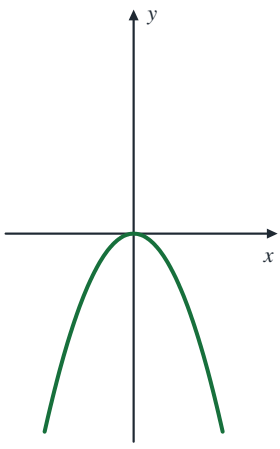


מבנה הפרבולה: $y = -x^2 + 6x - 5$

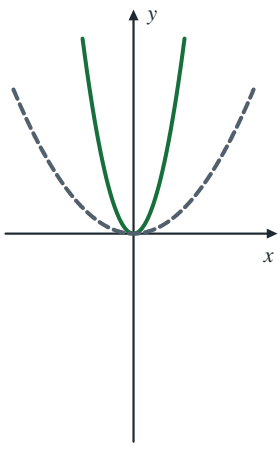
המקדם	מה הוא קובע	למה
a (סימן)	$a > 0$: הפרבולה פתוחה למעלה, והקודקוד הוא מינימום. $a < 0$: הפרבולה פתוחה למטה, והקודקוד הוא מקסימום.	עבור x גדול, האיבר ax^2 גובר על השאר, ולכן סימנו קובע אם הערכים עולים או יורדים בקצוות.
a (גודל)	ככל ש־$\lvert a\rvert$ גדול יותר, הפרבולה צרה יותר.	אותו צעד ב־x משנה את y יותר.
c	החיתוך עם ציר ה־y הוא $(0, c)$.	בהצבת $x = 0$ שני האיברים האחרים מתאפסים.
b	יחד עם a הוא קובע את מיקום ציר הסימטריה: $x = -b \div 2a$.	ראו את הנימוק בסעיף הבא.



$a > 0$: מינימום



$a < 0$: מקסימום



ככל ש־$\lvert a\rvert$ גדול יותר, הפרבולה צרה יותר

אינטואיציה

חשבו על זריקת כדור. כוח המשיכה מושך כלפי מטה, ולכן a שלילי ולכל זריקה יש גובה מקסימלי. גובה הזריקה הוא c, ומהירות הזריקה קשורה ל־b וקובעת מתי מגיעים לשיא.

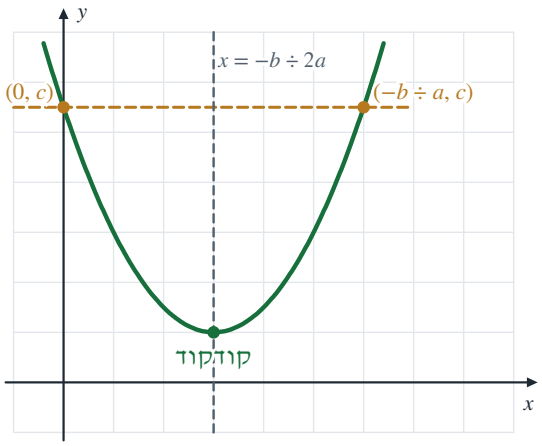
© אור בן שטרית · אינסוף

למורה

תוכנית הלימודים פותחת בקריאת מידע מגרף עם שנתות, ורק אחר כך עוברת לתבנית האלגברית. כדאי להתחיל בתמונה של גשר או מזרקה ולשאול: «איפה בתמונה נמצאים הקודקוד וציר הסימטריה? מה הם אומרים על הגשר?» כך המושגים נולדים מתוך הסיטואציה ולא מתוך הנוסחה.

3. הקודקוד: איפה ולמה

$$x = \frac{-b}{2a}$$



שתי הנקודות בגובה c סימטריות, ולכן הציר באמצע ביניהן

נימוק: למה זו נוסחת הקודקוד?

מחפשים נקודות על הפרבולה בגובה c:

$$ax^2 + bx + c = c \rightarrow ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0$$

הפתרונות הם $x = 0$ ו־$x = -b \div a$. שתי הנקודות באותו גובה, ולכן הן סימטריות סביב ציר הפרבולה. ציר הסימטריה נמצא בדיוק באמצע ביניהן, כלומר ב־$x = -b \div 2a$. הקודקוד נמצא על הציר. זה נימוק שלם, בלי נוסחת שורשים ובלי נגזרות.

שני שלבים למציאת הקודקוד

1. מחשבים $x = -b \div 2a$. שימו לב לסימנים: אם $a = -0.5$ ו־$b = 3$, אז $x = -3 \div (-1) = 3$.
2. מציבים את x בפונקציה: $y = -0.5 \cdot 9 + 3 \cdot 3 + 1.5 = 6$.

טיפ: מקסימום או מינימום?

מסתכלים על סימן a בלבד. בפונקציה $y = x^2 - 8x + 17$ הסימן חיובי, ולכן הקודקוד הוא נקודת **מינימום**, גם אם הסיפור נשמע כמו «שיא».

סימטריה: הטריק החזק ביותר בנושא

שתי נקודות על פרבולה באותו גובה נמצאות במרחק שווה מציר הסימטריה. לכן:

$$x_2 = 2 \cdot x_k - x_1$$

© אור בן שטרית · אינסוף

כאשר x_k הוא שיעור ה־x של הקודקוד. דוגמה: הקודקוד ב־$x = 2$, ועמוד תמיכה ב־$x = 0$. עמוד נוסף באותו גובה ניצב ב־$x = 4$, ואין צורך בנוסחת השורשים.

בדיקה מהירה

אחרי פתרון משוואה, הממוצע של שני הפתרונות חייב להיות שיעור ה־x של הקודקוד. פתרתם וקיבלתם 2 ו־10 כשהקודקוד ב־6? הכול תקין, כי $(2 + 10) \div 2 = 6$.

4. פתרון משוואה ריבועית

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

שלבי העבודה

1. **מביאים לצורה הסטנדרטית:** הכול בצד אחד, ואפס בצד השני. זה השלב שבו קורות רוב הטעויות.
2. **מזהים את a, b, c עם הסימנים.**
3. **מחשבים את הביטוי שמתחת לשורש:** $b^2 - 4ac$.
4. **מציבים בנוסחה** ומפרידים לשני פתרונות.
5. **בודקים:** מציבים פתרון, או בודקים שהממוצע שווה לקודקוד.

דוגמה: «מתי הגובה 3.02?» כאשר $y = -0.5x^2 + 2x + 2$:

$$-0.5x^2 + 2x + 2 = 3.02$$

$$-0.5x^2 + 2x - 1.02 = 0$$

כופלים ב־-2 כדי לקבל מקדמים נוחים: $x^2 - 4x + 2.04 = 0$. לכן:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(16 - 8.16)}}{2} = \frac{4 \pm 2.8}{2} \qquad \rightarrow \qquad x_1 = 3.4,\ x_2 = 0.6$$

כמה פתרונות יש?

$b^2 - 4ac$	מספר הפתרונות	בגרף	בסיפור
חיובי	2	הישר $y = k$ חותך את הפרבולה פעמיים	הכדור בגובה הזה פעם בעלייה ופעם בירידה
אפס	1	הישר משיק לפרבולה בקודקוד	הכדור בדיוק מגיע לגובה הזה
שלילי	0	הישר לא פוגש את הפרבולה	הכדור לא מגיע לגובה הזה

קיצורים

אין c: $-0.1x^2 + 0.8x = 0$ נותן $x(-0.1x + 0.8) = 0$, כלומר $x = 0$ או $x = 8$.

אין b: $-x^2 + 9 = 0$ נותן $x^2 = 9$, כלומר $x = \pm 3$.

מקדמים נוחים

שברים עשרוניים: כופלים ב־10.

שבר עם מכנה: כופלים במכנה.

a שלילי: כופלים ב־-1.

הפתרונות לא משתנים, אבל החישוב מתקצר.

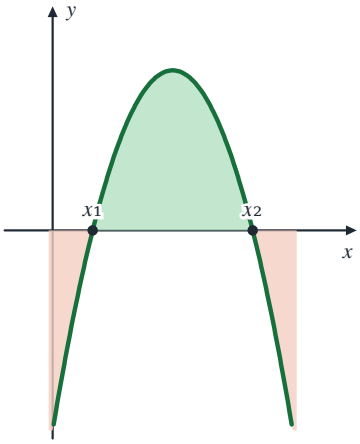
© אור בן שטרית · אינסוף

טעות נפוצה

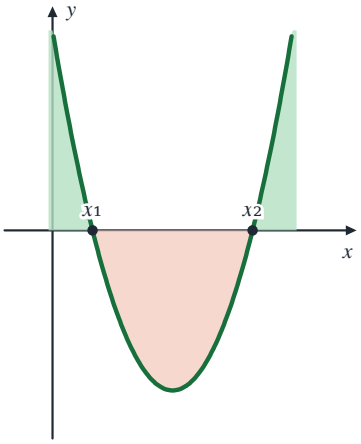
מציבים בנוסחה בלי להעביר את הגובה לצד השני: במשוואה $-0.5x^2 + 2x + 2 = 3.02$ המקדם c אינו 2. הוא $2 - 3.02 = -1.02$.

5. מגמה, חיוביות ושליליות

	$a < 0$ (מקסימום)	$a > 0$ (מינימום)
תחום עלייה	$x < x_k$	$x > x_k$
תחום ירידה	$x > x_k$	$x < x_k$
תחום חיוביות	בין השורשים	מחוץ לשורשים
תחום שליליות	מחוץ לשורשים	בין השורשים



$a < 0$: חיובית בין השורשים



$a > 0$: חיובית מחוץ לשורשים

טעות נפוצה: מגמה נמדדת על ציר ה־x

התשובה ל«באילו ערכים הכדור במגמת עלייה» היא תחום של x, לא של גובה. התשובה «עד גובה 6» אינה נכונה. התשובה הנכונה: $0 < x < 3$.

אינטואיציה

בהקשר של סיפור, התחום מתחיל במקום שבו הסיפור מתחיל. לזריקה מ־$x = 0$ תחום העלייה הוא $0 < x < x_k$ ולא כל $x < x_k$, כי לפני הזריקה אין כדור באוויר.

6. מהסיפור למתמטיקה

במתמטיקה	בסיפור
$x = 0$ ו־$y = c$	נקודת ההתחלה: גובה הזריקה, גובה העמוד, הכמות בתחילת התקופה
קודקוד: x_k	מתי או היכן מגיעים לשיא או לשפל
קודקוד: y_k	הגובה המקסימלי, ההכנסה הגדולה ביותר, הכמות הקטנה ביותר
חיתוך עם ציר ה־x	פגיעה בקרקע, קצה הגשר, הרגע שבו ההכנסה מתאפסת

© אור בן שטרית · אינסוף

במתמטיקה	בסיפור
פתרון שלילי	בדרך כלל נפסל: לפני הזריקה, מרחק שלילי, מחיר שלילי
שני פתרונות של $y = k$	פעם אחת בעלייה ופעם אחת בירידה
$x_2 - x_1$	כמה זמן הכדור מעל הגובה, או מה הרוחב בגובה הזה

בניית הפונקציה מתוך סיפור

בתוכנית הלימודים מופיעים גם סיפורים שבהם צריך לבחור או לבנות את הפונקציה. התבנית הקלאסית היא **«כמות כפול מחיר»** או **«אורך כפול רוחב»**:

1. מגדירים במילים את x.
2. מבטאים כל גורם בעזרת x. למשל, אם כל הוזלה של שקל מוסיפה 20 לקוחות: המחיר $10 - x$, והכמות $120 + 20x$.
3. כופלים ופותחים סוגריים: $y = (10 - x)(120 + 20x)$.
4. מזהים תחום בעל משמעות: $x \geq 0$ והמחיר אינו שלילי.
5. הקודקוד עונה על שאלת «מה הכי כדאי?».

התאמה בין גרף לנוסחה

1. **סימן a:** פתוחה למעלה או למטה?
2. **c:** איפה הפרבולה חותכת את ציר ה־y?
3. **מיקום הקודקוד:** משמאל לציר ה־y או מימין לו? $x = -b \div 2a$ קובע.

> **למורה**
>
> שאלה שמעוררת דיון: «הפרבולה יורדת מתחת לציר ה־x. מה זה אומר על ההכנסה?» כך התלמידים מבינים בעצמם שתחום המשמעות של הפונקציה קטן מהתחום של הפונקציה, ושאין לכתוב תשובה מתמטית בלי לבדוק אם יש לה פירוש.

7. טיפים וטריקים

1. **מתחילים מהקודקוד תמיד:** גם אם הוא לא נשאל ישירות, הוא נותן תמונה של כל הפרבולה.
2. **מסמנים על הסרטוט** כל נקודה שמצאתם. אם הנקודה יוצאת במקום שלא מתאים לסרטוט, בדקו את החישוב.
3. **סוגריים במחשבון:** $(-3)^2 = 9$, אבל $-3^2 = -9$. בהצבה ב־$-x^2$ קודם מעלים בריבוע, ואחר כך מוסיפים את המינוס.
4. **הציבו בזהירות:** $y = -0.5 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1.5$. כתבו את ההצבה המלאה לפני החישוב.
5. **הכפלה לניקוי:** במשוואה עם שברים עשרוניים כדאי להכפיל את שני האגפים, ורק אז להשתמש בנוסחה.
6. **סימטריה חוסכת נוסחה:** אם יודעים פתרון אחד ואת הקודקוד, הפתרון השני הוא $2x_{\text{k}} - x_1$.
7. **בדקו את ערך הקודקוד לפני שפותרים:** אם השיא 6 ושואלים מתי הגובה 7, אין פתרון.
8. **בחירת פתרון היא חלק מהתשובה:** כתבו במפורש «נפסל, כי x מייצג מרחק».

© אור בן שטרית · אינסוף

9 **יחידות:** התשובה הסופית נכתבת במילים עם יחידות: «6 מטרים», «כעבור 5 שנים».

10 **עיגול:** שורש שאינו שלם מעגלים בסוף, בדרך כלל לשתי ספרות אחרי הנקודה.

8. טעויות נפוצות

הטעות	למה היא קורה	התיקון
$x = -b \div 2a$ עם סימן שגוי כאשר a שלילי	שני מינוסים ברצף	כותבים עם סוגריים: $-3 \div (2 \cdot (-0.5)) = 3$
עוצרים אחרי x_k כשמבקשים «גובה מקסימלי»	מערבבים מקום וגובה	הגובה הוא y: מציבים בפונקציה
משאירים k בצד ימין ומשתמשים בנוסחה	הנוסחה דורשת 0 באגף השני	מעבירים אגף לפני זיהוי c
מחלקים ב־2 רק את $-b$ או רק את השורש	שבר ארוך שנקרא מהר	כל המונה מתחלק ב־$2a$
מציבים -3^2 במחשבון ומקבלים $9-$ במקום 9	סדר פעולות	שמים סוגריים על המספר השלילי
כותבים את שני הפתרונות כתשובה	לא חוזרים לסיפור	בוחרים לפי ההקשר: «בירידה», «מרחק חיובי»
כותבים את תחום העלייה בערכי y	המילה «עלייה» מתקשרת לגובה	תחום נכתב תמיד בערכי x
«מינימום» רק כי הערך קטן	לא בודקים את סימן a	$a > 0$ מינימום, $a < 0$ מקסימום

9. למורה: רצף הוראה מוצע

תוכנית הלימודים מקצה לנושא 20 שעות, ובנויה משלוש קבוצות דוגמאות: קריאה מגרף, הקשר בין תבנית לגרף, ומצבים אוריינים.

שלב	שעות	מטרה	שאלה מנחה לכיתה
קריאה מגרף	4	קודקוד, חיתוכים, מגמה, חיוביות וסימטריה מתוך גרף עם שנתות	«מה גובהה של הספינה הגבוהה ביותר שיכולה לעבור מתחת לגשר?»
תבנית וגרף	4	משמעות a, c והיחס $-b \div 2a$; התאמת תבנית לגרף	«מה ישתנה בגרף אם נהפוך את הסימן של a?»
פתרון משוואה	4	נוסחת השורשים, משוואה בלי מכנה ועם מכנה מספרי	«מה אומר לנו מספר הפתרונות על הגרף?»
קודקוד ומגמות	3	חישוב קודקוד, תחומי עלייה וירידה, סימטריה	«למה הקודקוד תמיד באמצע בין שני הפתרונות?»
מצבים אוריינים	3	תרגום סיפור לפונקציה, תחום בעל משמעות, פסילת פתרונות	«מדוע החלק שמתחת לציר אינו מסורטט?»
שילוב לקראת בגרות	2	שאלות מלאות לפי השלד	«מה אומרת כל תשובה על הסיפור?»

© אור בן שטרית · אינסוף

למורה: הדגמה מהירה

זרקו כדור בכיתה וצלמו בטלפון בהילוך איטי. הדפיסו תמונה מרובת חשיפות, סמנו את מיקום הכדור בכל חשיפה, והניחו מעליה מערכת צירים. התלמידים רואים פרבולה אמיתית, והסימטריה מופיעה כעובדה שאפשר למדוד בסרגל.

10. עשרה תרגילי דוגמה עם פתרון מלא

התרגילים מסודרים מהקל אל הקשה ובנויים כמו שאלות בגרות. כל הנתונים הם בדיוניים. נסו לפתור כל סעיף לפני קריאת הפתרון.

תרגיל 1 קריאה מלאה של פרבולה

נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 6x - 5$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה־y.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה־x.

ג. מצאו את שיעורי הקודקוד. קבעו אם הוא נקודת מקסימום או נקודת מינימום. נמקו.

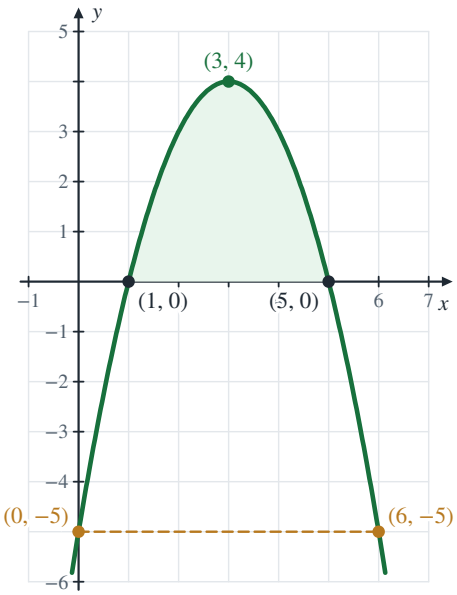
ד. מצאו את תחום העלייה ואת תחום הירידה של הפונקציה.

ה. מצאו את תחום החיוביות ואת תחום השליליות של הפונקציה.

ו. הנקודה $(0, -5)$ נמצאת על הפרבולה. מצאו נקודה נוספת על הפרבולה באותו גובה, בלי לפתור משוואה.

מה מתרגלים: חיתוכים עם הצירים, קודקוד, מגמה, חיוביות ושליליות, סימטריה

פתרון מלא



$y = -x^2 + 6x - 5$, עם נקודות סימטריות בגובה -5

סעיף א

מציבים $x = 0$, ומקבלים $y = -5$.

© אור בן שטרית · אינסוף

תשובה: $(0, -5)$.

סעיף ב

מציבים $y = 0$ וכופלים ב־-1:

$$-x^2 + 6x - 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(36 - 20)}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \qquad \rightarrow \qquad x_1 = 5,\ x_2 = 1$$

תשובה: $(1, 0)$ ו־$(5, 0)$.

סעיף ג

$$x = \frac{-6}{2 \cdot (-1)} = 3 \qquad y = -3^2 + 6 \cdot 3 - 5 = -9 + 18 - 5 = 4$$

המקדם $a = -1$ שלילי, ולכן הפרבולה פתוחה למטה, והקודקוד הוא נקודת מקסימום. בדיקה: $x = 3$ הוא הממוצע של 1 ו־5.

תשובה: $(3, 4)$, נקודת מקסימום.

סעיף ד

הפרבולה פתוחה למטה, ולכן היא עולה עד הקודקוד ויורדת אחריו.

תשובה: עלייה: $x < 3$. ירידה: $x > 3$.

סעיף ה

הפרבולה פתוחה למטה, ולכן היא מעל ציר ה־x בין השורשים ומתחתיו מחוץ להם.

תשובה: חיוביות: $1 < x < 5$. שליליות: $x < 1$ או $x > 5$.

סעיף ו

הנקודה $x = 0$ נמצאת 3 יחידות משמאל לציר $x = 3$. הנקודה הסימטרית נמצאת 3 יחידות מימינו: $x = 6$.
בדיקה: $-36 + 36 - 5 = -5$.

תשובה: $(6, -5)$.

תרגיל 2 זריקה לסל

כדור נזרק לעבר סל ונע במסלול בצורת פרבולה שמשוואתה $y = -0.5x^2 + 3x + 1.5$. ציר ה־x מייצג את המרחק האופקי (במטרים) של הכדור מנקודת הזריקה, וציר ה־y מייצג את גובה הכדור מעל הקרקע (במטרים).

א. מצאו את הגובה שממנו נזרק הכדור.

ב. מצאו את הגובה המקסימלי של הכדור ואת המרחק האופקי שבו הוא הגיע אליו.

ג. מצאו בעבור אילו ערכים של x הכדור במגמת עלייה.

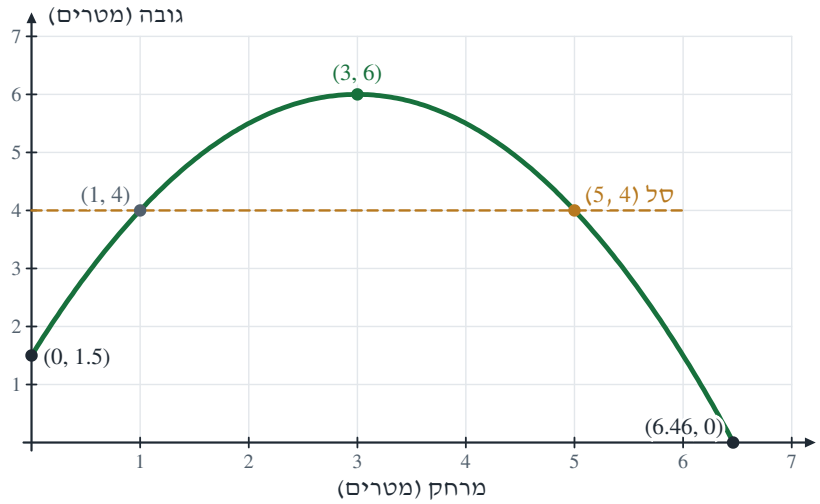
ד. מהו גובה הכדור במרחק אופקי של 2 מטרים מנקודת הזריקה?

ה. הסל נמצא בגובה 4 מטרים, והכדור נכנס אליו במגמת ירידה. מצאו את המרחק האופקי של הסל מנקודת הזריקה.

ו. אילו הכדור לא היה נכנס לסל, באיזה מרחק אופקי מנקודת הזריקה היה פוגע בקרקע?

מה מתרגלים: כל חמשת השלבים של שאלת בגרות, בחירה בין פתרונות, פסילת פתרון שלילי

פתרון מלא



מסלול הכדור

סעיף א

בנקודת הזריקה $x = 0$, ולכן $y = 1.5$.

תשובה: 1.5 מטרים.

סעיף ב

$$x = \frac{-3}{2 \cdot (-0.5)} = 3 \qquad y = -0.5 \cdot 9 + 3 \cdot 3 + 1.5 = 6$$

תשובה: הגובה המקסימלי הוא 6 מטרים, במרחק אופקי של 3 מטרים.

סעיף ג

המסלול מתחיל ב־$x = 0$ ועולה עד הקודקוד.

תשובה: $0 < x < 3$.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ד

$$y = -0.5 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1.5 = -2 + 6 + 1.5 = 5.5$$

תשובה: 5.5 מטרים.

סעיף ה

מציבים $y = 4$, מעבירים אגף וכופלים ב־-2:

$$\begin{aligned} -0.5x^2 + 3x + 1.5 &= 4 \\ -0.5x^2 + 3x - 2.5 &= 0 \\ x^2 - 6x + 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(36 - 20)}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \qquad \rightarrow \qquad x_1 = 5,\ x_2 = 1$$

הפתרון $x = 1$ קטן מ־3, כלומר הכדור שם במגמת עלייה. הכדור נכנס לסל במגמת ירידה, ולכן $x = 5$.

תשובה: 5 מטרים.

סעיף ו

בקרקע $y = 0$. כופלים ב־-2:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x - 3 &= 0 \\ x &= \frac{6 \pm \sqrt{(36 + 12)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{2} \end{aligned}$$

מקבלים $x_1 \approx 6.46$ ו־$x_2 \approx -0.46$. המרחק חיובי, ולכן הפתרון השלילי נפסל. בדיקה: הממוצע הוא $(6.46 - 0.46) \div 2 = 3$.

תשובה: כ־6.46 מטרים.

תרגיל 3 גשר קשת ומעבר של סירה

מעל נהר בנוי גשר קשת בצורת פרבולה שמשוואתה $y = -0.05x^2 + 2x$. ציר ה־x מונח על פני המים, והקשת מתחילה בנקודה O (ראשית הצירים) ומסתיימת בנקודה B על פני המים.

א. מצאו את שיעורי הנקודה B.

ב. מצאו את הגובה המקסימלי של הקשת.

ג. בגובה של 15 מטרים מעל פני המים, מהו רוחב הקשת?

ד. סירה ברוחב 18 מטרים ובגובה 15 מטרים שטה במרכז הנהר. האם היא יכולה לעבור מתחת לקשת? נמקו.

ה. האם סירה בגובה 21 מטרים יכולה לעבור מתחת לקשת? נמקו בלי פתרון משוואה.

מה מתרגלים: פרבולה שעוברת בראשית, פירוק לגורמים, רוחב בגובה נתון, החלטה בהקשר

פתרון מלא

סעיף א

על פני המים $y = 0$. אין c, ולכן מוציאים גורם משותף:

© אור בן שטרית · אינסוף

$$x(-0.05x + 2) = 0$$

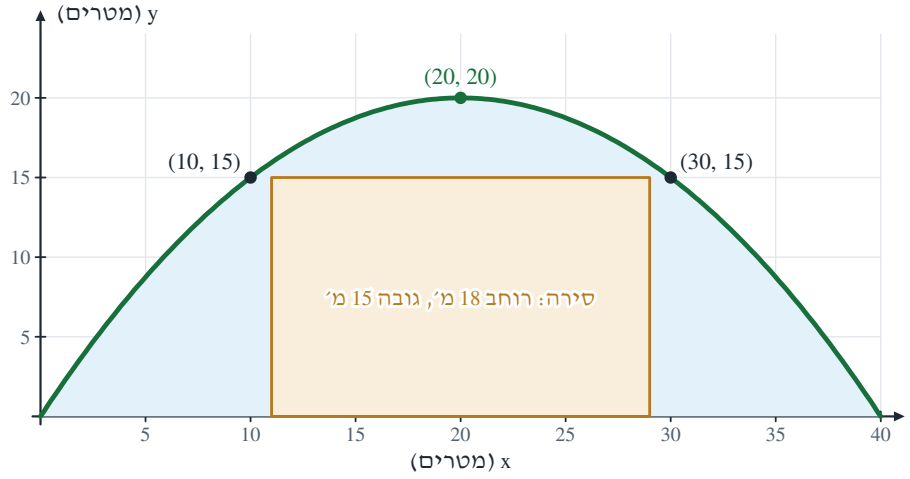
$x = 0$ היא הנקודה O, והפתרון השני הוא $x = 2 \div 0.05 = 40$.

תשובה: $B(40,\ 0)$.

סעיף ב

$$x = \frac{-2}{2 \cdot (-0.05)} = 20 \qquad y = -0.05 \cdot 400 + 2 \cdot 20 = 20$$

תשובה: 20 מטרים.



גשר קשת: בגובה 15 רוחב הקשת 20 מטר

סעיף ג

מציבים $y = 15$ וכופלים ב־-20 כדי לנקות את השבר:

$$-0.05x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x^2 - 40x + 300 = 0$$

$$x = \frac{40 \pm \sqrt{(1{,}600 - 1{,}200)}}{2} = \frac{40 \pm 20}{2} \qquad \rightarrow \qquad x_1 = 30,\ x_2 = 10$$

הרוחב הוא המרחק בין שתי הנקודות: $30 - 10 = 20$.

תשובה: 20 מטרים.

סעיף ד

בגובה 15 מטרים רוחב הקשת הוא 20 מטרים. הסירה במרכז, ולכן היא תופסת 9 מטרים לכל צד של ציר הסימטריה $x = 20$, כלומר מ־$x = 11$ עד $x = 29$. התחום הזה נמצא בתוך התחום מ־10 עד 30.

בדיקה בקצה הסירה: $y(11) = -0.05 \cdot 121 + 22 = 15.95$, וזה גבוה מ־15.

תשובה: כן, כי רוחב הקשת בגובה 15 מטרים (20 מטרים) גדול מרוחב הסירה (18 מטרים).

סעיף ה

הגובה המקסימלי של הקשת הוא 20 מטרים, ו־21 גדול ממנו.

תשובה: לא. הסירה גבוהה מהנקודה הגבוהה ביותר של הקשת.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 4 נקודת מינימום: מספר מנויים

מספר המנויים של ספרייה דיגיטלית (באלפים) במשך תקופה של 10 חודשים מתואר בפונקציה $y = x^2 - 10x + 29$, כאשר x הוא מספר החודשים מתחילת התקופה.

א. כמה מנויים היו בתחילת התקופה?

ב. כמה מנויים היו כעבור 8 חודשים?

ג. כעבור כמה חודשים מספר המנויים היה הקטן ביותר? מהו מספר זה?

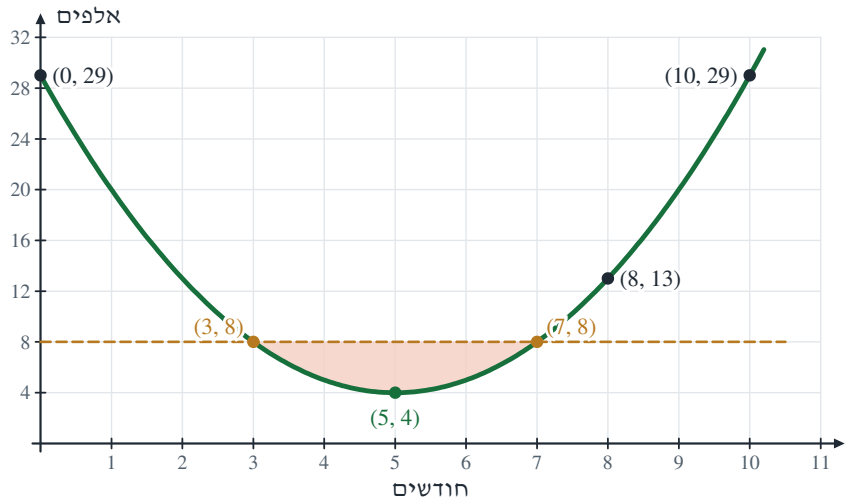
ד. כעבור כמה חודשים היו 8,000 מנויים? מצאו את שתי האפשרויות.

ה. במשך כמה חודשים מספר המנויים היה קטן מ־8,000?

ו. האם בתקופה זו חזר מספר המנויים לערכו ההתחלתי? אם כן, מתי? נמקו.

מה מתרגלים: פרבולה עם מינימום, המרת יחידות (אלפים), שני פתרונות שתקפים, תחום, סימטריה

פתרון מלא



מספר המנויים לאורך הזמן: נקודת מינימום

סעיף א

בהצבת $x = 0$ מתקבל $y = 29$. היחידות הן אלפים.

תשובה: 29,000 מנויים.

סעיף ב

$$y = 8^2 - 10 \cdot 8 + 29 = 64 - 80 + 29 = 13$$

תשובה: 13,000 מנויים.

סעיף ג

$a = 1$ חיובי, ולכן הקודקוד הוא נקודת מינימום:

$$x = \frac{10}{2} = 5 \qquad y = 25 - 50 + 29 = 4$$

תשובה: כעבור 5 חודשים, ומספר המנויים הוא 4,000.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ד

8,000 מנויים הם $y = 8$:

$$x^2 - 10x + 29 = 8$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(100 - 84)}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2} \quad \rightarrow \quad x_1 = 7, x_2 = 3$$

תשובה: כעבור 3 חודשים וכעבור 7 חודשים.

סעיף ה

הפרבולה פתוחה למעלה, ולכן בין שני הפתרונות הערכים נמוכים מ־8: $3 < x < 7$. אורך התחום הוא $7 - 3 = 4$.

תשובה: במשך 4 חודשים.

סעיף ו

הערך ההתחלתי התקבל ב־$x = 0$, והקודקוד ב־$x = 5$. בגלל הסימטריה אותו ערך מתקבל ב־$x = 10$. בדיקה: $100 - 100 + 29 = 29$.

תשובה: כן, בתום 10 חודשים, כי הנקודות $x = 0$ ו־$x = 10$ סימטריות סביב $x = 5$.

תרגיל 5 גשר טיפוס ועמודי תמיכה

בגן הרפתקאות הותקן מעל קרקע ישרה גשר טיפוס מקושת בצורת פרבולה, והוא נמשך מהנקודה A עד הנקודה B שעל הקרקע. הגשר מתואר בפונקציה $y = -x^2 + 4x + 12$. ציר ה־x צמוד לקרקע, וציר ה־y עובר לאורך עמוד אנכי OD שתומך בגשר (O ראשית הצירים, D על הגשר).

א. מצאו את גובה העמוד OD.

ב. מצאו את המרחק בין הנקודות A ו־B.

ג. (1) מצאו את הגובה המקסימלי של הגשר.

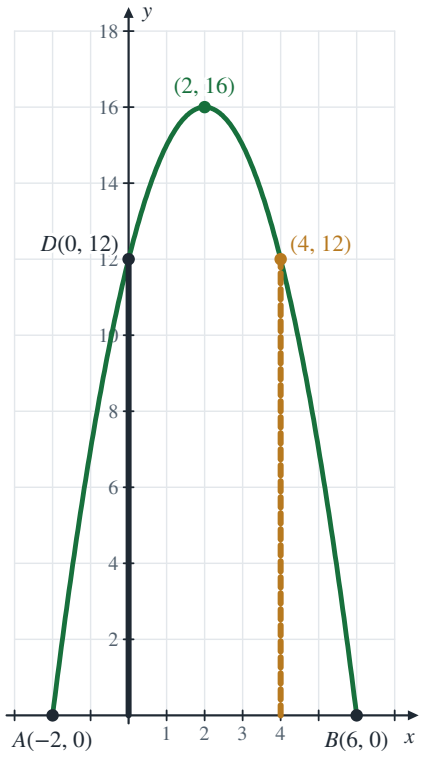
(2) מצאו בעבור אילו ערכים של x הולך המטפס במגמת ירידה.

ד. מוסיפים עמוד תומך שני, שאורכו שווה לאורך OD. מצאו את המרחק בין שני העמודים.

ה. בגובה 7 מטרים תלויות על הגשר שתי נורות. מצאו את שיעורי ה־x של הנורות.

מה מתרגלים: ערך שלילי של x שיש לו משמעות, אורך בין שורשים, סימטריה במקום נוסחה

פתרון מלא



גשר טיפוס עם שני עמודי תמיכה שווים

סעיף א

D על ציר ה־y: בהצבת $x = 0$ מתקבל $y = 12$.

תשובה: 12 מטרים.

סעיף ב

A ו־B על הקרקע, כלומר $y = 0$. כופלים ב־-1:

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(16 + 48)}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2}$$

מקבלים $x_1 = 6$ ו־$x_2 = -2$. כאן הערך השלילי **אינו נפסל**: הראשית נמצאת בעמוד, והגשר מתחיל משמאל לעמוד. המרחק הוא $6 - (-2) = 8$.

תשובה: 8 מטרים.

סעיף ג

(1) $x = -4 \div (2 \cdot (-1)) = 2$, ו־$y = -4 + 8 + 12 = 16$.

(2) אחרי הקודקוד ועד סוף הגשר: $2 < x < 6$.

תשובה: (1) 16 מטרים. (2) $2 < x < 6$.

סעיף ד

העמוד הראשון נמצא ב־$x = 0$, והקודקוד ב־$x = 2$. בגלל הסימטריה העמוד השני נמצא ב־$x = 4$. המרחק הוא 4.

© אור בן שטרית · אינסוף

תשובה: 4 מטרים.

סעיף ה

$$-x^2 + 4x + 12 = 7$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(16 + 20)}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \qquad \rightarrow \qquad x_1 = 5,\ x_2 = -1$$

שני הפתרונות נמצאים על הגשר, שנמשך מ־$x = -2$ עד $x = 6$.

תשובה: $x = -1$ ו־$x = 5$.

תרגיל 6 מגלשת מים: מקדמים עשרוניים

בלונה־פארק נבנתה מגלשת מים ארוכה, וקטע אחד שלה הוא בצורת פרבולה. הקטע יוצא מהנקודה A שעל ציר ה־y, מגיע עד הנקודה B, ומתואר בפונקציה $f(x) = -0.2x^2 + 2.4x + 3$. ציר ה־$x$ מודד מרחק אופקי (במטרים) מהנקודה A, וציר ה־y מודד גובה מעל הקרקע (במטרים).

א. מצאו את גובה הנקודה A.

ב. (1) מצאו את הגובה המקסימלי של הקטע.

(2) מצאו בעבור אילו ערכים של x הקטע נמצא במגמת עלייה.

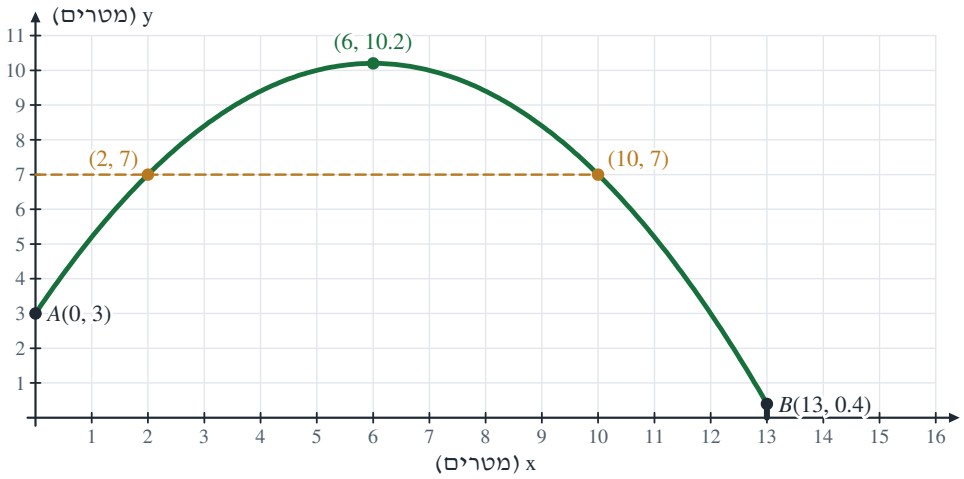
ג. שיעור ה־x של הנקודה B הוא 13. מצאו את גובה הנקודה B מעל הקרקע.

ד. חיישני בטיחות מותקנים בנקודות שבהן גובה המגלשה 7 מטרים. מצאו את שיעורי ה־x של נקודות אלה.

ה. באיזה תחום של x הקטע גבוה מ־7 מטרים?

מה מתרגלים: מקדמים עשרוניים, כפל לניקוי שברים, שימוש בתוצאות לתחום

פתרון מלא



קטע של מגלשת המים, עם שני חיישנים בגובה 7

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף א

$$f(0) = 3$$

תשובה: 3 מטרים.

סעיף ב

$$x = \frac{-2.4}{2 \cdot (-0.2)} = \frac{-2.4}{-0.4} = 6$$

$$f(6) = -0.2 \cdot 36 + 2.4 \cdot 6 + 3 = -7.2 + 14.4 + 3 = 10.2$$

תשובה: (1) 10.2 מטרים. (2) $0 < x < 6$.

סעיף ג

$$f(13) = -0.2 \cdot 169 + 2.4 \cdot 13 + 3 = -33.8 + 31.2 + 3 = 0.4$$

תשובה: 0.4 מטרים (40 ס״מ).

סעיף ד

מציבים 7, מעבירים אגף, וכופלים ב־5− כדי להיפטר מהשברים:

$$-0.2x^2 + 2.4x + 3 = 7$$

$$-0.2x^2 + 2.4x - 4 = 0$$

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{(144 - 80)}}{2} = \frac{12 \pm 8}{2} \qquad \rightarrow \qquad x_1 = 10,\ x_2 = 2$$

בדיקה: הממוצע של 2 ו־10 הוא 6, שיעור הקודקוד.

תשובה: $x = 2$ ו־$x = 10$.

סעיף ה

הפרבולה פתוחה למטה, ולכן בין שני הפתרונות היא גבוהה מ־7.

תשובה: $2 < x < 10$.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 7 הכנסה של דוכן: בניית הפונקציה

דוכן מיץ מוכר כוס במחיר 10 שקלים, ובמחיר זה הוא מוכר 120 כוסות ביום. מניסיון התברר שכל הוזלה של שקל אחד במחיר הכוס מוסיפה 20 כוסות ביום. נסמן ב־x את מספר ההוזלות של שקל אחד.

א. הביעו באמצעות x את מחיר הכוס ואת מספר הכוסות הנמכרות ביום.

ב. הראו כי ההכנסה היומית מתוארת בפונקציה $y = -20x^2 + 80x + 1{,}200$.

ג. כמה הוזלות כדאי לבצע כדי שההכנסה תהיה מקסימלית? מהי ההכנסה המקסימלית, ומהו המחיר המתאים?

ד. באילו מחירים ההכנסה היומית היא 1,200 שקלים?

ה. מצאו את התחום של x שיש לו משמעות בסיפור. נמקו.

מה מתרגלים: מידול: מחיר כפול כמות, פתיחת סוגריים, קודקוד כהחלטה, תחום בעל משמעות

פתרון מלא

סעיף א

כל הוזלה מורידה את המחיר בשקל ומוסיפה 20 כוסות.

תשובה: המחיר: $10 - x$ שקלים. מספר הכוסות: $120 + 20x$.

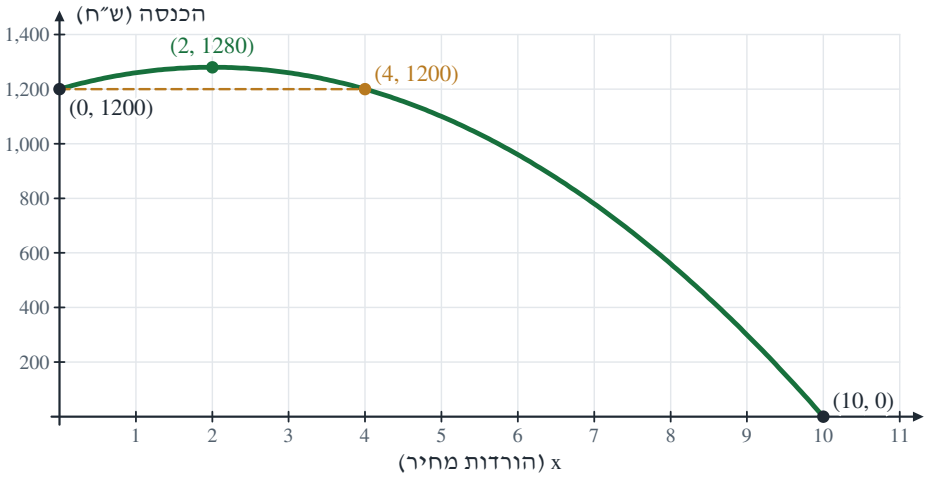
סעיף ב

הכנסה היא מחיר כפול כמות:

$$y = (10 - x)(120 + 20x)$$

$$y = 1{,}200 + 200x - 120x - 20x^2$$

$$y = -20x^2 + 80x + 1{,}200$$



ההכנסה היומית כפונקציה של מספר הורדות המחיר

סעיף ג

$$x = \frac{-80}{2 \cdot (-20)} = 2 \qquad y = -20 \cdot 4 + 80 \cdot 2 + 1{,}200 = 1{,}280$$

המחיר הוא $10 - 2 = 8$ שקלים, ומספר הכוסות הוא $120 + 40 = 160$. בדיקה: $8 \cdot 160 = 1{,}280$.

© אור בן שטרית · אינסוף

תשובה: 2 הוזלות. ההכנסה המקסימלית היא 1,280 שקלים, במחיר 8 שקלים לכוס.

סעיף ד

$$-20x^2 + 80x + 1{,}200 = 1{,}200$$

$$-20x^2 + 80x = 0$$

$$x(-20x + 80) = 0$$

מכאן $x = 0$ או $x = 4$. המחירים הם 10 שקלים ו־6 שקלים. בדיקה: $6 \cdot 200 = 1{,}200$.

תשובה: במחיר 10 שקלים ובמחיר 6 שקלים.

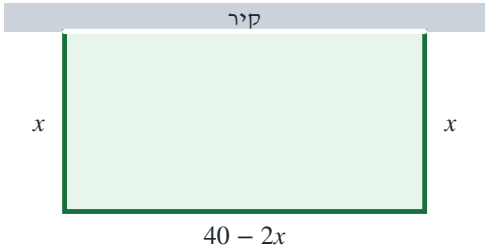
סעיף ה

מספר ההוזלות אינו שלילי, ולכן $x \geq 0$. המחיר אינו שלילי, ולכן $10 - x \geq 0$, כלומר $x \leq 10$. ההוזלות הן בשקלים שלמים, ולכן בסיפור x הוא מספר שלם.

תשובה: $0 \leq x \leq 10$.

תרגיל 8 גדר לגינה: שטח מקסימלי

רוצים לגדר גינה בצורת מלבן, כאשר צלע אחת של הגינה היא קיר בית. לרשותנו 40 מטרים של גדר, והיא מקיפה את שלוש הצלעות האחרות. נסמן ב־x את אורך כל אחת מהצלעות המאונכות לקיר.



גדר משלושה צדדים

א. הביעו באמצעות x את אורך הצלע המקבילה לקיר.

ב. הראו כי שטח הגינה הוא $y = -2x^2 + 40x$.

ג. מצאו את התחום של x שיש לו משמעות בבעיה.

ד. מצאו את ממדי הגינה שעבורם השטח מקסימלי, ואת השטח הזה.

ה. מצאו את ממדי הגינה אם שטחה 150 מטרים רבועים.

מה מתרגלים: מידול: אורך כפול רוחב, תחום בעל משמעות, מקסימום, שני פתרונות תקפים

פתרון מלא

סעיף א

שתי הצלעות המאונכות משתמשות ב־$2x$ מטרים של גדר, והנותר הולך לצלע המקבילה.

תשובה: $40 - 2x$ מטרים.

© אור בן שטרית · אינסוף

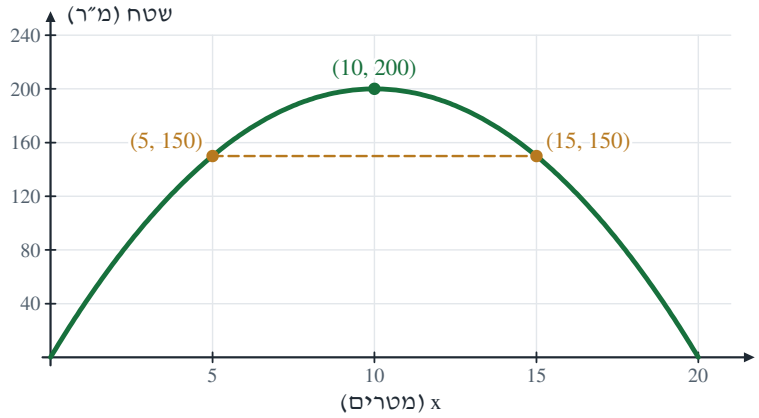
סעיף ב

$$y = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$$

סעיף ג

אורך הצלעות חיובי: $x > 0$, וגם $40 - 2x > 0$, כלומר $x < 20$.

תשובה: $0 < x < 20$.



השטח כפונקציה של x

סעיף ד

$$x = \frac{-40}{2 \cdot (-2)} = 10 \qquad y = -2 \cdot 100 + 40 \cdot 10 = 200$$

הצלע המקבילה לקיר: $40 - 2 \cdot 10 = 20$ מטרים.

תשובה: ממדים: 10 מטרים על 20 מטרים. השטח: 200 מטרים רבועים.

אינטואיציה

בלי קיר, הריבוע הוא המלבן הגדול ביותר להיקף נתון. עם קיר, הצלע המקבילה יוצאת **כפולה** מהצלע המאונכת. אפשר לראות זאת כך: אם משקפים את הגינה מעבר לקיר מקבלים מלבן סגור בהיקף 80 מטרים, והוא הגדול ביותר כשהוא ריבוע, 20 על 20. חצי ממנו הוא 10 על 20.

סעיף ה

$$-2x^2 + 40x = 150$$

$$x^2 - 20x + 75 = 0$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{(400 - 300)}}{2} = \frac{20 \pm 10}{2} \qquad \rightarrow \qquad x_1 = 15,\ x_2 = 5$$

שני הפתרונות בתוך התחום. עבור $x = 5$ הצלע המקבילה היא 30, ועבור $x = 15$ היא 10.

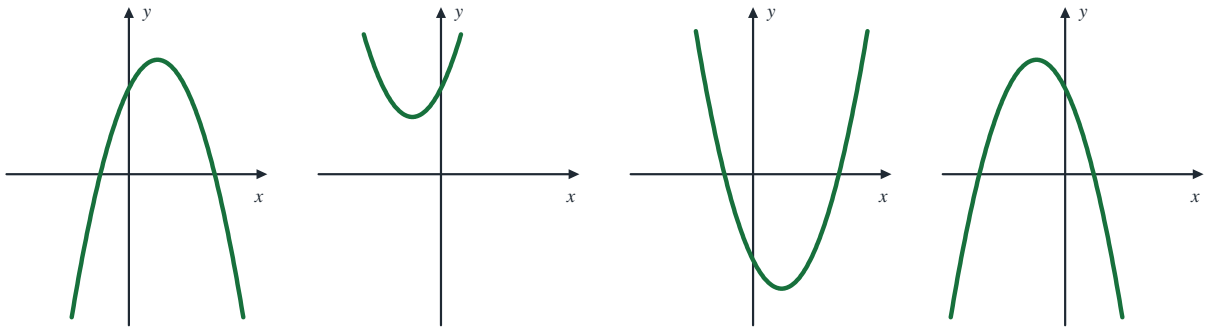
תשובה: 5 מטרים על 30 מטרים, או 15 מטרים על 10 מטרים.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 9 התאמת גרף לנוסחה ומציאת מקדם

לפניכם ארבעה גרפים וארבע פונקציות:

I. $y = x^2 - 2x - 3$ II. $y = -x^2 + 2x + 3$ III. $y = x^2 + 2x + 3$ IV. $y = -x^2 - 2x + 3$



גרף א גרף ב גרף ג גרף ד

א. התאימו לכל פונקציה את הגרף שלה. נמקו.

ב. מצאו את תחום החיוביות של פונקציה II.

ג. הסבירו, בעזרת נוסחת השורשים, מדוע הגרף של פונקציה III אינו חותך את ציר ה־x.

ד. נתונה הפונקציה $y = ax^2 - 4x + 6$. הקודקוד של הפרבולה נמצא ב־$x = 2$. מצאו את a ואת שיעורי הקודקוד.

מה מתרגלים: זיהוי לפי סימן a, ערך c ומיקום הקודקוד; ביטוי שלילי מתחת לשורש; מציאת פרמטר

פתרון מלא

סעיף א

משתמשים בשלושה סימנים: סימן a, ערך c, ומיקום הקודקוד $x = -b \div 2a$.

פונקציה	פתיחה	c	x של הקודקוד	גרף
I	למעלה	-3	1	B
II	למטה	3	1	D
III	למעלה	3	-1	C
IV	למטה	3	-1	A

תשובה: פונקציה I מתאימה לגרף ב, פונקציה II לגרף ד, פונקציה III לגרף ג, ופונקציה IV לגרף א.

סעיף ב

השורשים של פונקציה II:

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(4 + 12)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

מקבלים $x_1 = 3$ ו־$x_2 = -1$. הפרבולה פתוחה למטה, ולכן היא חיובית בין השורשים.

© אור בן שטרית · אינסוף

תשובה: $-1 < x < 3$.

סעיף ג

עבור $x^2 + 2x + 3 = 0$ הביטוי שמתחת לשורש הוא $b^2 - 4ac = 4 - 12 = -8$, וזה מספר שלילי. למשוואה אין פתרון, ולכן אין לגרף נקודות חיתוך עם ציר ה־x.

תשובה: הביטוי שמתחת לשורש שלילי, ולכן אין פתרונות.

סעיף ד

מציבים בנוסחת הקודקוד:

$$2 = \frac{-(-4)}{2a} = \frac{4}{2a}$$

$$4a = 4$$

$$a = 1$$

הפונקציה היא $y = x^2 - 4x + 6$, ושיעור ה־y של הקודקוד הוא $4 - 8 + 6 = 2$.

תשובה: $a = 1$, והקודקוד הוא $(2, 2)$.

תרגיל 10 שני טילי מים: שאלה מסכמת ברמת בגרות

שני טילי מים משוגרים בו־זמנית. גובהם (במטרים) כעבור t שניות מתואר בפונקציות:

טיל 1: $h_1 = -5t^2 + 20t + 1.6$ טיל 2: $h_2 = -5t^2 + 25t$

א. מאיזה גובה שוגר כל טיל?

ב. מצאו את הגובה המקסימלי של כל טיל. איזה טיל מגיע גבוה יותר?

ג. כמה זמן שוהה טיל 1 מעל גובה של 16.6 מטרים?

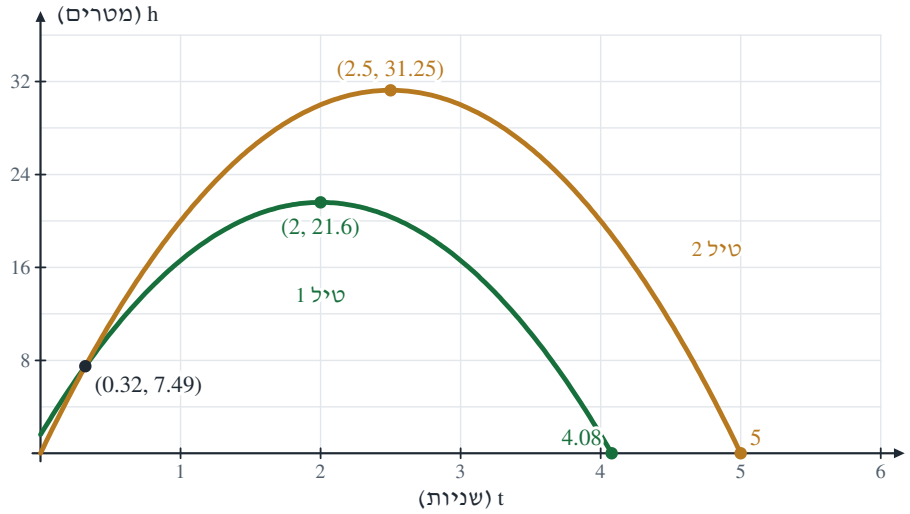
ד. כעבור כמה שניות נוחת כל טיל על הקרקע? איזה טיל שוהה באוויר זמן רב יותר?

ה. באיזה רגע, אחרי השיגור, שני הטילים נמצאים באותו גובה? מהו הגובה הזה?

מה מתרגלים: שילוב: קודקוד, משך זמן מעל גובה, פסילת פתרון, השוואה בין שתי פרבולות

© אור בן שטרית · אינסוף

פתרון מלא



שני טילי מים

סעיף א

בהצבת $t = 0$: $h_1 = 1.6$, ו־$h_2 = 0$.

תשובה: טיל 1 שוגר מגובה 1.6 מטרים, וטיל 2 מגובה הקרקע.

סעיף ב

טיל 1: $t = -20 \div (-10) = 2$, ואז $h_1 = -20 + 40 + 1.6 = 21.6$.

טיל 2: $t = -25 \div (-10) = 2.5$, ואז $h_2 = -31.25 + 62.5 = 31.25$.

תשובה: טיל 1: 21.6 מטרים. טיל 2: 31.25 מטרים. טיל 2 מגיע גבוה יותר.

סעיף ג

$$-5t^2 + 20t + 1.6 = 16.6$$

$$-5t^2 + 20t - 15 = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

הפתרונות הם $t = 1$ ו־$t = 3$. הטיל מעל הגובה הזה בין שני הזמנים: $3 - 1 = 2$.

תשובה: 2 שניות.

סעיף ד

טיל 2: $t(-5t + 25) = 0$, ולכן $t = 0$ (השיגור) או $t = 5$ (הנחיתה).

טיל 1: מחלקים ב־-5:

$$t^2 - 4t - 0.32 = 0$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{(16 + 1.28)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{17.28}}{2}$$

מקבלים $t_1 \approx 4.08$ ו־$t_2 \approx -0.08$. זמן שלילי הוא לפני השיגור, ולכן הוא נפסל.

תשובה: טיל 1 נוחת כעבור כ־4.08 שניות, וטיל 2 כעבור 5 שניות. טיל 2 שוהה באוויר זמן רב יותר.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ה

משווים בין הפונקציות. האיבר $-5t^2$ מופיע בשתיהן ומתבטל, ונשארת משוואה ממעלה ראשונה:

$$-5t^2 + 20t + 1.6 = -5t^2 + 25t$$

$$1.6 = 5t$$

$$t = 0.32$$

מציבים: $h_2 = -5 \cdot 0.32^2 + 25 \cdot 0.32 = -0.512 + 8 = 7.488$. בדיקה: $h_1 = -0.512 + 6.4 + 1.6 = 7.488$.

תשובה: כעבור 0.32 שניות, בגובה של כ־7.49 מטרים.

11. תרגול נוסף

תחילה שלושה תרגילים מודרכים, אחריהם ארבעה פתרונות עם טעות, ובסוף תרגול עצמאי ותרגול מעורב. כל התשובות מרוכזות בסוף הקובץ.

תרגיל מודרך 1 קריאה מלאה של פרבולה

נתונה הפונקציה $y = x^2 - 6x + 5$. מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים ואת הקודקוד, וקבעו אם הקודקוד הוא נקודת מינימום או נקודת מקסימום.

השלימו את הפתרון

חיתוך עם ציר ה־y: מציבים $x = 0$ ומקבלים את הנקודה $(0, _____)$.

חיתוך עם ציר ה־x: פותרים $x^2 - 6x + 5 = 0$, ומקבלים $x = _____$ או $x = _____$.

הקודקוד: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = _____$, ו־$y = _____$.

המקדם $a = 1$ חיובי, ולכן הקודקוד הוא נקודת ____.

מה מתרגלים: חיתוך עם הצירים, קודקוד, סוג הקודקוד

תרגיל מודרך 2 טיסה של רחפן

גובהו של רחפן (במטרים), x שניות אחרי ההמראה, נתון על ידי הפונקציה $y = -x^2 + 10x$. מצאו מתי הרחפן נוחת, מהו גובהו המקסימלי, ומתי הוא נמצא בגובה של 16 מטרים.

השלימו את הפתרון

נחיתה: $-x^2 + 10x = 0$, כלומר $x(_____) = 0$. הפתרון המתאים לנחיתה הוא $x = _____$ שניות.

גובה מקסימלי: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{-2} = _____$, ו־$y = _____$ מטרים.

גובה של 16 מטרים: $-x^2 + 10x = 16$, כלומר $x^2 - 10x + _____ = 0$. הפתרונות הם $x = _____$ ו־$x = _____$.

מה מתרגלים: פתרון בהקשר, קודקוד, שני פתרונות ל־y נתון

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל מודרך 3 תחומי חיוביות ומגמות

נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 4x + 5$. מצאו את תחום החיוביות, את תחום העלייה ואת תחום הירידה שלה.

השלימו את הפתרון

נקודות החיתוך עם ציר ה־x: $x =$ _____ ו־ $x =$ _____.

המקדם a שלילי, ולכן הפרבולה פתוחה כלפי מטה. הפונקציה חיובית בתחום ____ .

שיעור ה־x של הקודקוד: $x =$ _____.

מגמת עלייה: ___ . מגמת ירידה: ___ .

מה מתרגלים: סימן הפונקציה לפי a והשורשים, מגמות

מצאו את הטעות 1 הסימן בנוסחת הקודקוד

מצאו את הקודקוד של הפונקציה $y = 2x^2 - 8x + 3$.

הפתרון של התלמיד

שורה 1 $a = 2$, $b = -8$

שורה 2 $x = b \div 2a = -8 \div 4 = -2$

שורה 3 $y = 2 \cdot 4 + 16 + 3 = 27$

שורה 4 הקודקוד הוא $(-2, 27)$.

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: נוסחת הקודקוד כש־b שלילי

מצאו את הטעות 2 מינימום או מקסימום?

מצאו את הקודקוד של הפונקציה $y = x^2 - 4x + 7$, וקבעו אם הוא נקודת מינימום או נקודת מקסימום.

הפתרון של התלמיד

שורה 1 $x = 4 \div 2 = 2$

שורה 2 $y = 4 - 8 + 7 = 3$

שורה 3 לכן $(2, 3)$ היא נקודת מקסימום, והערך הגדול ביותר של הפונקציה הוא 3.

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: הקשר בין סימן a לסוג הקודקוד

© אור בן שטרית · אינסוף

מצאו את הטעות 3 מקום או גובה?

מסלול של קופץ למים מקרש קפיצה נתון על ידי הפונקציה $y = -x^2 + 6x + 1$, כאשר x הוא המרחק האופקי ו־y הוא הגובה, במטרים. מהו הגובה המקסימלי של הקופץ?

הפתרון של התלמיד

שורה 1 $x = -6 \div (-2) = 3$

שורה 2 הגובה המקסימלי הוא 3 מטרים.

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: ההבדל בין שיעור ה־x לשיעור ה־y של הקודקוד

מצאו את הטעות 4 הביטוי שמתחת לשורש

פתרו את המשוואה $x^2 + 2x - 3 = 0$.

הפתרון של התלמיד

שורה 1 $a = 1,\ b = 2,\ c = -3$

שורה 2 $b^2 - 4ac = 4 - 12 = -8$

שורה 3 הביטוי שמתחת לשורש שלילי, ולכן אין פתרונות.

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: סימנים בהצבה בנוסחת השורשים

תרגול עצמאי פרבולה: קריאה, בנייה ופתרון

מהקל אל הקשה. נסו בלי רמז, ורק אם נתקעתם פנו לעמוד התשובות.

1. מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים ואת הקודקוד של הפונקציה $y = x^2 - 4x + 3$.
2. מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים ואת הקודקוד של הפונקציה $y = -x^2 + 2x + 8$.
3. מצאו את נקודות החיתוך עם ציר ה־x ואת הקודקוד של הפונקציה $y = 2x^2 - 8x$.
4. מצאו את תחום החיוביות ואת תחום השליליות של הפונקציה $y = x^2 - x - 6$.
5. מצאו את תחום העלייה ואת תחום הירידה של הפונקציה $y = -x^2 + 6x - 1$.
6. גרף הפונקציה $y = x^2 - 3x + c$ עובר דרך הנקודה $(1, 4)$. מצאו את c.
7. גרף הפונקציה $y = ax^2 + 4x - 3$ עובר דרך הנקודה $(1, 3)$. מצאו את a ואת הקודקוד.
8. קודקוד של פרבולה נמצא על הישר $x = 2$, והנקודה $(0, 7)$ נמצאת על הפרבולה. מצאו נקודה נוספת על הפרבולה שגובהה 7.

© אור בן שטרית · אינסוף

9. מסלול של סילון מים במזרקה נתון על ידי הפונקציה $y = -x^2 + 4x + 1$, כאשר x הוא המרחק האופקי ו־y הוא הגובה, במטרים. (א) מאיזה גובה יוצא הסילון? (ב) מהו הגובה המקסימלי? (ג) באיזה מרחק הסילון פוגע במשטח שבגובה 0?

10. הרווח של עסק (באלפי שקלים) נתון על ידי הפונקציה $y = -2x^2 + 40x - 150$, כאשר x הוא מספר המוצרים שנמכרו, במאות. (א) באיזה תחום העסק מרוויח? (ב) בכמה מוצרים מתקבל הרווח המקסימלי, ומהו הרווח?

11. היקפה של מסגרת מלבנית הוא 24 ס״מ, ואורכה x ס״מ. (א) הביעו את הרוחב ואת השטח בעזרת x. (ב) מהו התחום של x? (ג) מהו השטח המקסימלי, ובאילו ממדים הוא מתקבל?

12. נתונה הפונקציה $y = x^2 - 2x - 3$. מצאו את ערכי x שעבורם $y = 5$.

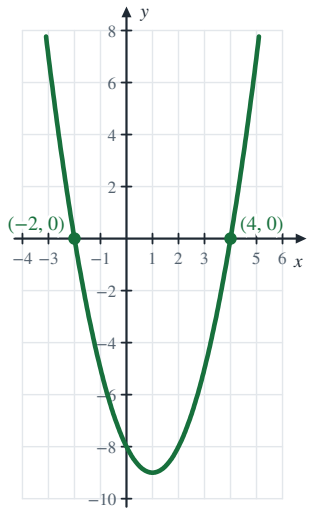
תרגול מעורב שאלות מסכמות

13. נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 4x$ ונתון הישר $y = x$. (א) מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים. (ב) מצאו את קודקוד הפרבולה. (ג) באיזה תחום הפרבולה נמצאת מעל הישר?

14. קפיצת דולפין מתוארת על ידי הפונקציה $y = -5x^2 + 10x - 3.2$, כאשר x הוא הזמן בשניות ו־y הוא הגובה במטרים ביחס לפני המים. ערך שלילי של y פירושו מתחת למים. (א) באיזה עומק הדולפין מתחיל? (ב) מתי הוא יוצא מהמים, ומתי הוא חוזר אליהם? (ג) מהו הגובה המקסימלי שלו? (ד) כמה זמן הוא נמצא מעל המים?

15. כרטיס למופע עולה 60 שקלים, ומגיעים 100 צופים. כל הוזלה של 5 שקלים מוסיפה 25 צופים. נסמן ב־x את מספר ההוזלות. (א) הביעו את מחיר הכרטיס ואת מספר הצופים בעזרת x. (ב) כתבו את ההכנסה y כפונקציה של x. (ג) מהו מחיר הכרטיס שנותן הכנסה מקסימלית, ומהי ההכנסה? (ד) באיזה מחיר נוסף ההכנסה שווה להכנסה בלי הוזלה?

16. בסרטוט גרף הפונקציה $y = x^2 + bx + c$, ומסומנות נקודות החיתוך שלו עם ציר ה־x. (א) מהי משוואת ציר הסימטריה? (ב) מצאו את b ואת c. (ג) מצאו את הקודקוד. (ד) מצאו את תחום החיוביות. (ה) הנקודה $(0, -8)$ נמצאת על הגרף. מצאו את הנקודה הסימטרית לה.



17. נכון או לא נכון? נמקו. (א) לכל פרבולה יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה־x. (ב) אם $a < 0$, לפונקציה יש נקודת מקסימום. (ג) נקודת החיתוך עם ציר ה־y היא תמיד $(0, c)$. (ד) אם הנקודות $(1, 5)$ ו־$(7, 5)$ נמצאות על הפרבולה, ציר הסימטריה הוא $x = 4$. (ה) אם $a > 0$, הפונקציה יורדת משמאל לקודקוד ועולה מימינו.

© אור בן שטרית · אינסוף

12. תשובות ורמזים

רמזים לתרגול העצמאי

8. פרבולה סימטרית ביחס לישר שעובר דרך הקודקוד.

9. למשוואה בסעיף ג יש שני פתרונות. בחרו את המתאים למציאות.

תרגילים מודרכים ומציאת טעויות

תרגיל מודרך 1

$(0, 5)$; $x = 1$ או $x = 5$; הקודקוד $(3, -4)$; נקודת מינימום.

תרגיל מודרך 2

$x(-x + 10) = 0$; $x = 10$ שניות; $x = 5$, $y = 25$ מטרים; $x^2 - 10x + 16 = 0$, $x = 2$ בעלייה ו־$x = 8$ בירידה.

תרגיל מודרך 3

$x = -1$ ו־$x = 5$; $-1 < x < 5$; $x = 2$; עלייה ב־$x < 2$, וירידה ב־$x > 2$.

מצאו את הטעות 1

הטעות בשורה 2: בנוסחה יש מינוס: $x = -b \div 2a = 8 \div 4 = 2$. לכן $y = 8 - 16 + 3 = -5$, והקודקוד הוא $(2, -5)$.

מצאו את הטעות 2

הטעות בשורה 3: המקדם $a = 1$ חיובי, ולכן הפרבולה פתוחה כלפי מעלה. $(2, 3)$ היא נקודת מינימום, ו־3 הוא הערך הקטן ביותר של הפונקציה.

מצאו את הטעות 3

הטעות בשורה 2: 3 הוא המרחק האופקי שבו מתקבל הקודקוד. הגובה הוא ערך ה־y בנקודה הזאת:
$y = -9 + 18 + 1 = 10$ מטרים.

מצאו את הטעות 4

הטעות בשורה 2: $-4 \cdot 1 \cdot (-3) = +12$, ולכן $b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16$. הפתרונות הם $x = 1$ ו־$x = -3$.

תשובות לתרגול העצמאי

1. $(0, 3)$; $(1, 0)$, $(3, 0)$; קודקוד $(2, -1)$, מינימום.

2. $(0, 8)$; $(-2, 0)$, $(4, 0)$; קודקוד $(1, 9)$, מקסימום.

3. $(0, 0)$, $(4, 0)$; קודקוד $(2, -8)$, מינימום.

4. שורשים $x = -2$ ו־$x = 3$. חיובית: $x < -2$ או $x > 3$. שלילית: $-2 < x < 3$.

5. קודקוד $(3, 8)$. עלייה: $x < 3$. ירידה: $x > 3$.

6. $4 = c + 3 - 1$, ולכן $c = 6$.

7. $a = 2$; הקודקוד $(-1, -5)$.

8. $(4, 7)$.

9. (א) 1 מטר. (ב) 5 מטרים. (ג) $x = 2 + \sqrt{5} \approx 4.24$ מטרים.

10. (א) $5 < x < 15$, כלומר בין 500 מוצרים ל־1,500 מוצרים. (ב) 1,000 מוצרים, ורווח של 50,000 שקלים.

11. (א) רוחב $12 - x$, שטח $y = x(12 - x)$. (ב) $0 < x < 12$. (ג) 36 סמ״ר, כשהמסגרת ריבוע שצלעו 6 ס״מ.

12. $x^2 - 2x - 8 = 0$, ולכן $x = 4$ או $x = -2$.

13. (א) $(0, 0)$ ו־$(3, 3)$. (ב) $(2, 4)$. (ג) $0 < x < 3$.

14. (א) 3.2 מטרים. (ב) $x = 0.4$ ו־$x = 1.6$. (ג) 1.8 מטרים. (ד) 1.2 שניות.

15. (א) $60 - 5x$; $100 + 25x$. (ב) $y = -125x^2 + 1{,}000x + 6{,}000$. (ג) 40 שקלים, והכנסה של 8,000 שקלים. (ד) 20 שקלים, כי $x = 8$ סימטרי ל־$x = 0$ ביחס ל־$x = 4$.

16. (א) $x = 1$. (ב) $y = (x + 2)(x - 4)$, ולכן $b = -2$ ו־$c = -8$. (ג) $(1, -9)$. (ד) $x < -2$ או $x > 4$. (ה) $(2, -8)$.

17. (א) לא נכון: ייתכנו נקודה אחת או אף נקודה. (ב) נכון. (ג) נכון: מציבים $x = 0$. (ד) נכון: 4 הוא האמצע בין 1 ל־7. (ה) נכון.

© אור בן שטרית · אינסוף

13. דף סיכום

הפונקציה

$$y = ax^2 + bx + c$$

- $a > 0$: מינימום. $a < 0$: מקסימום.
- c: החיתוך עם ציר ה־y, $(0, c)$.
- הקודקוד: $x = -b \div 2a$, ו־y בהצבה.

נוסחת השורשים

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

- קודם מעבירים הכול לאגף אחד.
- שורש של מספר שלילי: אין פתרון.
- הממוצע של שני הפתרונות הוא x_k.

סימטריה

- נקודות באותו גובה: $x_2 = 2x_k - x_1$.
- הנקודה $(0, c)$ משתקפת ל־$x = 2x_k$.

מהשאלה לפעולה

- **מאיזה גובה, בתחילת התקופה:** $x = 0$.
- **גובה מקסימלי, כמות קטנה ביותר:** קודקוד, y.
- **מתי, היכן:** קודקוד, x.
- **במגמת עלייה או ירידה:** תחום של x.
- **פגיעה בקרקע, קצוות הגשר:** $y = 0$.
- **מה הגובה כאשר:** הצבה של x.
- **מתי הגובה הוא:** $y = k$, נוסחת שורשים ובחירה.
- **כמה זמן מעל גובה:** $x_2 - x_1$.

מתכון לשאלה בבחינה

1. רושמים a, b, c עם סימנים.
2. מחשבים קודקוד, גם אם לא נשאל עדיין.
3. מסמנים נקודות על הסרטוט.
4. בכל משוואה: מעבירים אגף, מנקים שברים.
5. בוחרים פתרון לפי הסיפור, וכותבים נימוק.
6. עונים במילים עם יחידות.

© אור בן שטרית · אינסוף